2021 年度修了テスト 2021 年 7 月 21 日実施

試験について

1. 試験終了時刻は黒板に記載する．
2. 座席表に従って着席し，学生証を机に出しておくこと．
3. 途中退室は試験開始後 90 分経過してから許可する．
4. 問題用紙：1 枚・答案用紙：4 枚・草稿用紙：4 枚．
5. 答案用紙の追加は認めない．
6. 答案用紙のみを回収する．
7. 各問 30 点満点の計 120 点満点であり，90 点以上を合格とする．
8. 不正行為は決してしないこと．
9. 携帯電話の電源は切っておくこと．

答案作成についての注意事項

1. 全ての答案用紙の左上に問題番号を，右上に学生番号と氏名を記入すること．
2. 答案は各問題について一枚を使用すること．
3. 答案用紙の裏面を使用してもよい．表面の最下行にその旨を明記すること．
4. 数学的論証の表現力も採点対象である．いきなり答案用紙に書くのではなく， 草稿用紙でよく練ってから解答を書くこと．
5. 解答者の理解の正確さを示すことがこのテストの目的である．論証においては「明らかに」という表現は避け，要点を的確に記すこと．
6. もしも途中に解けない小問があっても，その結果を認めて後続の小問を解いてよい．

試験後の注意事項

1. 合否の連絡と答案の返却は，7 月 28 日までに NUCT で行う．（ただし，合格していないレポート問題のある者を除く．）
2. 不合格のときは 2022 年度予備テストを受験せねばならない．

2021 年度修了テスト

$\boxed{1}$ $\mathbb{R}$ 上の定数でない C^1 級の関数 f が, 1 を周期とする周期関数である (つまり任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x+1) = f(x)$ を満たす) とき, 以下の問いに答えよ.

1. f は $\mathbb{R}$ 上の有界関数であることを示せ. (ヒント: f の閉区間 $[0,1]$ への制限を考えよ.)
2. ある定数 $C > 0$ が存在して, 任意の実数 $N > M > 0$ に対して,
$$\left| \int_M^N \frac{f'(x)}{x}\, dx \right| \leq \frac{C}{M}$$
が成り立つことを示し, 積分
$$I = \int_1^\infty \frac{f'(x)}{x}\, dx$$
が収束することを確かめよ. (ヒント: 前半は部分積分を利用せよ. 後半はコーシーの収束条件を利用せよ.)
3. 導関数 f' も周期 1 の周期関数となる. これを用いて, 任意の自然数 n に対して
$$\int_n^{(n+1)} \frac{|f'(x)|}{x}\, dx \geq \frac{1}{(n+1)} \int_0^1 |f'(x)|\, dx$$
が成り立つことを示せ. また, 積分 I が絶対収束しないことを示せ.

$\boxed{2}$ 区間 $I = [0,1]$ で定義された連続関数列 $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ を
$$f_n(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$$
で定義する.

1. 各 $x \in I$ に対して, 数列 $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ は絶対収束するか否かを理由をつけて答えよ.
2. 任意の $x \in I$ に対して, 連続関数列 $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ は, ある関数 f に各点収束することを示せ.
ヒント：恒等式
$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j t^{2j} = \frac{1-(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}$$
の両辺を t に関して $[0,x]$ 上で積分してみよ.
3. 連続関数列 $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ は I 上で f に一様収束するか否かを理由をつけて答えよ.

$\boxed{3}$ V を体 K 上の有限次元ベクトル空間とし, V から K への線形写像全体の集合を V^* で表す. $\varphi, \psi \in V^*$, $a \in K$ に対して, 和 $\varphi + \psi \in V^*$, スカラー倍 $a\varphi \in V^*$ を
$$(\varphi+\psi)(v) = \varphi(v)+\psi(v), \quad (a\varphi)(v) = a(\varphi(v)) \quad (v \in V)$$
と定めることにより, V^* はベクトル空間となる.

以下, U, V を体 K 上の有限次元ベクトル空間, $f : U \to V$ を線形写像とし, 写像 $f^* : V^* \to U^*$ を
$$(f^*(\varphi))(u) = \varphi(f(u)) \quad (\varphi \in V^*, u \in U)$$
によって定義する. 以下の問いに答えよ.

1. $f^*(\varphi) \in U^*$ であること, すなわち $f^*(\varphi) : U \to K$ が線形写像であることを示せ.
2. f^* は線形写像であることを示せ.
3. f が全射ならば, f^* は単射になることを証明せよ.

$\boxed{4}$ n 次複素正方行列 A と n 次複素正則行列 P は関係式 $PAP^{-1} = -A$ を満たすとする. 以下の問に答えよ.

1. v を A の固有値 λ の固有ベクトルとする. Pv は A の固有値 $-\lambda$ の固有ベクトルであることを示せ.
2. A の固有値 λ に対する固有空間を W_λ とする. $v_1, v_2, \ldots, v_k$ が W_λ の基底であるとき $Pv_1, Pv_2, \ldots, Pv_k$ は $W_{-\lambda}$ の基底であることを示せ.
3. $n = 3$ とし, A は 0 でない固有値 λ をもつとする. A は対角化可能であることを示せ.