2017 年度修了テスト

(2017 年 7 月 26 日 (水))

試験に関する注意事項

(1) 試験時間 (3 時間) は黒板に記載する.

(2) 試験開始後, 1 時間半経過するまでは中途退出してはいけない.

(3) 問題用紙は両面 2 枚, 答案用紙は 4 枚, 草稿用紙は 4 枚である. そのうち, 答案用紙のみを回収する. 他は持ち帰ること.

(4) 各問 30 点満点, 計 120 点満点とし, 90 点以上を合格とする.

(5) リラックスして自分の現在の力を十分に発揮すること. また, 不正行為は決してしないこと.

(6) 携帯電話の電源は切っておくこと.

答案作成に関する注意事項

(1) 各答案用紙の左上に問題番号, 右上に学生番号, 氏名を記入すること.

(2) 答案は問題毎 (原則として 1 枚以内) に作成すること.

(3) 裏面を使用するときは, 表面の最後にその旨を明記すること.

(4) 数学的論証の表現力も採点対象とする. いきなり答案用紙に書くのではなく, 草稿用紙でよく練ってから解答を書くこと.

(5) あなたが正確に理解しているかを示してもらうことがこのテストの目的であるので, 論証においては「明らかに」という表現は避け, 論証の要点を的確に記すこと. また, 解の導出においては導出過程の要点を的確に記すこと.

(6) もし途中に解けない小問があっても, その結果を認めて後続の小問を解いて構わない.

試験後の注意事項

(1) 合否については, 7 月 31 日 (月) 10:00 より多元数理科学研究科教育研究支援室にて確認することができる. 答案の返却も教育研究支援室にて同時に行う.

(2) 不合格となってしまった場合, 2018 年度の予備テストを受験する必要がある. 予備テストは 2018 年 4 月に行われるので, 不合格者は必ず受験すること.

$\boxed{1}$ $\mathbb{R}$ 上の定数でない C^1 級の関数 f が, 1 を周期とする周期関数である (つまり任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x+1) = f(x)$ を満たす) とき, 以下の問いに答えよ.

(1) f は $\mathbb{R}$ 上の有界関数であることを示せ. (ヒント: f の閉区間 $[0,1]$ への制限を考えよ.)

(2) ある定数 $C > 0$ が存在して, 任意の実数 $N > M > 0$ に対して,

$$\left| \int_M^N \frac{f'(x)}{x}\, dx \right| \leq \frac{C}{M}$$

が成り立つことを示し, 積分

$$I = \int_1^\infty \frac{f'(x)}{x}\, dx$$

が収束することを確かめよ. (ヒント: 前半は部分積分を利用せよ. 後半はコーシーの収束条件を利用せよ.)

(3) 導関数 f' も周期 1 の周期関数となる. これを用いて, 任意の自然数 n に対して

$$\int_n^{(n+1)} \frac{|f'(x)|}{x}\, dx \geq \frac{1}{(n+1)} \int_0^1 |f'(x)|\, dx$$

が成り立つことを示せ. また, 積分 I が絶対収束しないことを示せ.

$\boxed{2}$ 以下の問いに答えよ．

(1) 区間 $I=[0,2]$ 上で定義された関数の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を以下で定義する．

$$f_n(x)=\begin{cases} n^2x, & 0\le x\le \frac{1}{n}, \\ -n^2x+2n, & \frac{1}{n}\le x\le \frac{2}{n}, \\ 0, & \frac{2}{n}\le x\le 2. \end{cases}$$

また，$f(x)=0,(x\in I)$ とおく．このとき，

(a) f_n は f に I 上で各点収束するか．各点収束の定義に基づいて調べよ．

(b) 一般に，I 上の関数列 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ が I 上の関数 g に一様収束するとは，

$$(*)\begin{cases} \text{任意の } \epsilon>0 \text{ に対して，ある自然数 } N \text{ が存在し，} \\ n\ge N \text{ なる任意の自然数 } n \text{ と任意の } x\in I \text{ について，} \\ |g_n(x)-g(x)|<\epsilon \text{ が成り立つ} \end{cases}$$

ことである．$(*)$ の否定を ϵ-N 論法を用いて書き，それに基づいて f_n は f に I 上一様収束しないことを示せ．

(2) $\|\cdot\|$ を $\mathbb{R}^k$ のユークリッドノルムとする．$P\in\mathbb{R}^k$ と実数 $\delta>0$ に対し，

$$B(P,\delta):=\{Q\in\mathbb{R}^k\mid \|Q-P\|<\delta\}$$

とおく．$U\subset\mathbb{R}^k$ が開集合であるとは, 任意の点 $P\in U$ に対しある $\delta>0$ が存在し，$B(P,\delta)\subset U$ が成り立つときをいう．いま，$F\subset\mathbb{R}^k$ の補集合 $F^c:=\mathbb{R}^k\setminus F$ が開集合であるとき，命題

『F 内の任意の点列 $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し $\displaystyle\lim_{n\to\infty}P_n=P$ ならば $P\in F$ が成り立つ』

を示せ．

$\boxed{3}$　V を 有限次元実計量ベクトル空間 (内積空間) とし, $\langle u, v\rangle$ で 2 つのベクトル $u, v \in V$ の内積をあらわす. W を V の部分空間とする. また, W のすべてのベクトルと直交するような V のベクトル全体を $W^\perp$ とおく:

$$W^\perp = \{v \in V : \text{任意の } w \in W \text{ に対して } \langle v, w\rangle = 0\}.$$

このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $W^\perp$ は V の部分空間であることを示せ.

(2) $w_1, \ldots, w_r$ を W の正規直交基底とする. このとき, $x \in V$ に対して

$$x - (c_1 w_1 + \cdots + c_r w_r) \in W^\perp$$

となるような実数 c_j $(j = 1, \ldots, r)$ を, 内積を用いて表せ.

(3) $v_1, \ldots, v_s$ を $W^\perp$ の任意の基底とするとき, $w_1, \ldots, w_r, v_1, \ldots, v_s$ は V の基底となることを示せ. また, これより $\dim V = \dim W + \dim W^\perp$ が成り立つことを結論せよ.

$\boxed{4}$ $\mathbb{C}$ ベクトル空間の線形写像 $f : V \to W$ に対し，

$$\operatorname{rank} f = \dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{Im} f)$$

で f の階数を定義する．$\mathbb{C}$ 上の $m \times n$ 行列 A に対し，線形写像 $f_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ を $f_A(x) = Ax$ で定義し，

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(f_A)$$

で A の階数を定義する．この定義のもとに次の問いに答えよ．

(1) $\mathbb{C}$ 上の $m \times n$ 行列 A，m 次正則行列 P，n 次正則行列 Q に対し，$\operatorname{rank}(PAQ) = \operatorname{rank} A$ が成り立つことを示せ．

(2) $\mathbb{C}$ 上の $m \times n$ 行列 A が行と列の基本変形により

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

になったとする（ただし E_r は r 次単位行列，O は零行列）．このとき，$\operatorname{rank} A = r$ であることを示せ．

(3) $\mathbb{C}$ 上の $m \times n$ 行列 A に対し，$\operatorname{rank}({}^tA) = \operatorname{rank} A$ となることを示せ．