

2016 年度修了テスト

(2016 年 7 月 27 日(水))

試験に関する注意事項

- (1) 試験時間(3時間)は黒板に記載する。
- (2) 試験開始後, 1 時間半経過するまでは中途退出してはいけない。
- (3) 問題用紙は両面 2 枚, 答案用紙は 4 枚, 草稿用紙は 4 枚である。そのうち, 答案用紙のみを回収する。他は持ち帰ること。
- (4) 各問 30 点満点, 計 120 点満点とし, 90 点以上を合格とする。
- (5) リラックスして自分の現在の力を十分に発揮すること。また, 不正行為は決してしないこと。
- (6) 携帯電話の電源は切っておくこと。

答案作成に関する注意事項

- (1) 各答案用紙の左上に問題番号, 右上に学生番号, 氏名を記入すること。
- (2) 答案は問題毎(原則として 1 枚以内)に作成すること。
- (3) 裏面を使用するときは, 表面の最後にその旨を明記すること。
- (4) 数学的論証の表現力も採点対象とする。いきなり答案用紙に書くのではなく, 草稿用紙でよく練ってから解答を書くこと。
- (5) あなたが正確に理解しているかを示してもらうことがこのテストの目的であるので, 論証においては「明らかに」という表現は避け, 論証の要点を的確に記すこと。また, 解の導出においては導出過程の要点を的確に記すこと。
- (6) もし途中で解けない小問があっても, その結果を認めて後続の小問を解いて構わない。

試験後の注意事項

- (1) 合否については, 8 月 1 日(月) 10:00 より多元数理科学研究科教育研究支援室にて確認することができる。答案の返却も教育研究支援室にて同時に行う。
- (2) 不合格となってしまった場合, 2017 年度の予備テストを受験する必要がある。予備テストは 2017 年 4 月に行われるので, 不合格者は必ず受験すること。

1 f を开区間 $(0, 1)$ 上で定義された関数とする. f が一様連続であるとは,

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して, ある } \delta > 0 \text{ が存在して,} \\ |x - y| < \delta \text{ となるすべての } x, y \in (0, 1) \text{ に対して,} \\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon \text{ が成り立つ} \end{array} \right.$$

ことである. 以下の問いに答えよ.

- (1) f が微分可能であり, ある正数 M が存在して $|f'(x)| \leq M$ が任意の $x \in (0, 1)$ に対して成り立つならば, f は一様連続であることを示せ.
- (2) 一様連続な関数について, 次の事実が知られている:

(**) 「関数 f が开区間 $(0, 1)$ で一様連続ならば,
閉区間 $[0, 1]$ 上の連続関数に拡張できる。」

この事実を示すために以下の (a), (b) を示せ.

(a) 数列 $\{f(\frac{1}{n})\}_{n=2}^{\infty}$ は有限の極限值を持つ.

(b) $f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\frac{1}{n})$ とするとき, $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = f(0)$ である.

(これにより f は $[0, 1)$ 上の連続関数に拡張出来る事が示される. さらに $f(1)$ を $f(0)$ と同様の方法で定義し, 上記の (b) の議論を $x \rightarrow 1 - 0$ に用いることにより, f が $[0, 1]$ 上の連続関数に拡張されることが示される.)

2 関数は全て \mathbb{R} 上もしくは \mathbb{R}^2 上で定義されているものとする. 又 $\dot{X}(t) := \frac{dX}{dt}(t)$, $f_x(x, y) := \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $f_y(x, y) := \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ とする. C^2 級曲線 $C : (x, y) = (X(t), Y(t))$, $(\dot{X}(t), \dot{Y}(t)) \neq (0, 0)$ 及び C^2 級関数 $f(x, y)$ を考える. このとき, $F(t) := f(X(t), Y(t))$ も C^2 級で

$$(0) \quad \dot{F}(t) = (\dot{X}(t), \dot{Y}(t)) \nabla F(t), \quad \text{ただし} \quad \nabla F(t) := \begin{pmatrix} F_x(t) \\ F_y(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f_x(X(t), Y(t)) \\ f_y(X(t), Y(t)) \end{pmatrix}$$

であった. 以下の問いに答えよ.

(1) (0) の両辺を t で微分することにより, 次を示せ.

$$\ddot{F}(t) = (\ddot{X}(t), \ddot{Y}(t)) \nabla F(t) + (\dot{X}(t), \dot{Y}(t)) H_F(t) \begin{pmatrix} \dot{X}(t) \\ \dot{Y}(t) \end{pmatrix},$$

$$\text{ただし} \quad H_F(t) := \begin{pmatrix} F_{xx}(t) & F_{xy}(t) \\ F_{yx}(t) & F_{yy}(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f_{xx}(X(t), Y(t)) & f_{xy}(X(t), Y(t)) \\ f_{yx}(X(t), Y(t)) & f_{yy}(X(t), Y(t)) \end{pmatrix}.$$

(2) 以下, 上の曲線 C が C^2 級関数 $g(x, y)$ を用いて $g(x, y) = 0$ つまり $G(t) := g(X(t), Y(t)) = 0$, $\nabla G(t) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と書けている場合を考える. このとき

$$\forall t \in \mathbb{R}, \exists \alpha(t) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \alpha(t) (\dot{X}(t), \dot{Y}(t)) = (G_y(t), -G_x(t))$$

であること, 及び, $F(t)$ の停留点 t_0 に対し

$$\exists \lambda(t_0) \in \mathbb{R}, \quad \lambda(t_0) \nabla G(t_0) = \nabla F(t_0)$$

であることを示せ.

(3) (2) の α, λ に対し, 次を示せ.

$$\alpha(t_0)^2 \ddot{F}(t_0) = (G_y(t_0), -G_x(t_0)) (H_F(t_0) - \lambda(t_0) H_G(t_0)) \begin{pmatrix} G_y(t_0) \\ -G_x(t_0) \end{pmatrix}.$$

3] V を体 K 上のベクトル空間, W を V の部分ベクトル空間とする. V の元 v, v' の間の 2 項関係 \sim を

$$v \sim v' \iff v - v' \in W$$

によって定義する. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) \sim は同値関係であることを示せ.

(即ち, (i) 反射律 $v \sim v$, (ii) 対称律 $v \sim v' \implies v' \sim v$, (iii) 推移律 $v \sim v', v' \sim v'' \implies v \sim v''$ の 3 つが成り立つことを示せ. ただし, W に関するどのような条件をどう使ったかわかるように書くこと.)

以下では, V の元同値関係 \sim による同値類の集合 V/\sim を考える. また, $v \in V$ の同値類を $[v]$ ($\in V/\sim$) と表す.

(2) V の元 v, v', w, w' が $v \sim v', w \sim w'$ を満たすとき, 任意の K の元 α, β に対して $\alpha v + \beta w \sim \alpha v' + \beta w'$ であることを示せ.

これより, $[v], [w] \in V/\sim$ と $\alpha, \beta \in K$ に対して $\alpha[v] + \beta[w] \in V/\sim$ を

$$\alpha[v] + \beta[w] = [\alpha v + \beta w]$$

により定めることができる. さらに, ここで定めた和とスカラー倍によって V/\sim は K 上のベクトル空間になる. これを V の W による商ベクトル空間と呼び V/W と表す.

(3) W の基底 $\langle e_1, e_2, \dots, e_r \rangle$ を含む V の基底 $\langle e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n \rangle$ をとる. このとき $\langle [e_{r+1}], \dots, [e_n] \rangle$ は V/W の基底であることを示せ.

(これより $\dim V = \dim W + \dim(V/W)$ であることがわかる.)

4] V を \mathbb{C} 上の有限次元ベクトル空間とし, $f: V \rightarrow V$ を V の線形変換で

$$\dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f) = \dim \operatorname{Im}(f \circ f - 3f) = 1$$

となるものとする.

(1) $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Im}(f \circ f - 3f)$ であることを示せ.

(2) $f \circ f \circ f = 3f \circ f$ であることを示せ.

(3) $\dim V = 4$ のとき f の Jordan 標準形となり得るものを全て求めよ. 但し Jordan 標準形を 1 つ書けば, それと共役なもの, つまり Jordan 細胞を入れ替えただけのものについては書かなくてよい.