2013 年度修了テスト

(2013 年 7 月 27 日 (土))

試験に関する注意事項

(1) 試験時間 (3 時間) は黒板に記載する.

(2) 試験開始後, 1 時間半経過するまでは中途退出してはいけない.

(3) 問題用紙は両面 1 枚, 答案用紙は 4 枚, 草稿用紙は 4 枚である. そのうち, 答案用紙のみを回収する. 他は持ち帰ること.

(4) 各問 30 点満点, 計 120 点満点とし, 90 点以上を合格とする.

(5) リラックスして自分の現在の力を十分に発揮すること. また, 不正行為は決してしないこと.

(6) 携帯電話の電源は切っておくこと.

答案作成に関する注意事項

(1) 各答案用紙の左上に問題番号, 右上に学生番号, 氏名を記入すること.

(2) 答案は問題毎 (原則として 1 枚以内) に作成すること.

(3) 裏面を使用するときは, 表面の最後にその旨を明記すること.

(4) 数学的論証の表現力も採点対象とする. いきなり答案用紙に書くのではなく, 草稿用紙でよく練ってから解答を書くこと.

(5) あなたが正確に理解しているかを示してもらうことがこのテストの目的であるので, 論証においては「明らかに」という表現は避け, 論証の要点を的確に記すこと. また, 解の導出においては導出過程の要点を的確に記すこと.

(6) もし途中に解けない小問があっても, その結果を認めて後続の小問を解いて構わない.

試験後の注意事項

(1) 合否の通知と答案の返却は 7 月 30 日 (火) 以降に教育研究支援室にて行う.

$\boxed{1}$ 区間 I 上で定義された関数 f と任意の正数 δ に対し,

$$\omega(\delta, I; f) = \sup\big\{|f(x) - f(y)| \,\big|\, x, y \in I,\ |x - y| < \delta\big\}$$

と定める. 以下の問いに答えよ.

(1) 関数 f が I 上で一様連続であることと,

$$\lim_{\delta \to +0} \omega(\delta, I; f) = 0$$

は同値であることを示せ.

(2) 開区間 I 上で f が微分可能であり, ある正数 M が存在して $|f'(x)| \leq M$ が任意の $x \in I$ に対して成り立つならば, f は I 上で一様連続であることを示せ.

(3) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ について, $I = (1, \infty)$ 及び $J = (0, 1)$ 上でそれぞれ一様連続かどうか調べよ.

$\boxed{2}$ $a > b > 0$ を満たす定数 a, b に対し, $\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$f(x, y) = (ax^2 + by^2)e^{-x^2 - y^2}$$

を定義する. 以下の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 0$ となる点をすべて求めよ.

(2) $f(x, y)$ の極大値, 極小値およびそれらを与える点をすべて求めよ.

(3) (2) で求めた $f(x, y)$ の極大値は実は最大値になっている. これを証明せよ. ただし, 「有界閉集合上の連続関数は必ず最大値を持つ」という命題は証明無しに用いてもよい.

$\boxed{3}$ 次で与えられる $\mathbb{R}^3$ の線形変換

$$f:\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -y-z \\ 2x+3y+z \\ -2x-y+z \end{pmatrix}$$

について, 以下の問いに答えよ.

(1) $\mathbb{R}^3$ の基底

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

に関する f の表現行列を求めよ.

(2) $\operatorname{Im} f$ と $\operatorname{Ker} f$ の次元をそれぞれ求めよ.

(3) f のすべての固有空間について, それぞれ基底を一組求めよ.

$\boxed{4}$ U を有限次元実計量ベクトル空間 (内積空間) とする. U の元 u, v に対し, それらの内積を $\langle u, v\rangle$ で表す. また, U の部分空間 V に対し,

$$V^{\perp} = \{u \in U \mid \langle u, v\rangle = 0 \text{ が任意の } v \in V \text{ に対して成り立つ}\}$$

とおく. 以下の問いに答えよ.

(1) $V^{\perp}$ は U の部分空間であることを示せ.

(2) W も U の部分空間であったとする. $(V+W)^{\perp} \subset V^{\perp} \cap W^{\perp}$ を示せ.

(3) さらに $(V+W)^{\perp} = V^{\perp} \cap W^{\perp}$ を示せ.