2012 年度修了テスト

(2012 年 8 月 1 日 (水))

試験に関する注意事項

(1) 試験時間 (3 時間) は黒板に記載する.

(2) 試験開始後, 1 時間半経過するまでは中途退出してはいけない.

(3) 問題用紙は両面 1 枚, 答案用紙は 4 枚, 草稿用紙は 4 枚である. そのうち, 答案用紙のみを回収する. 他は持ち帰ること.

(4) 各問 30 点満点, 計 120 点満点とし, 90 点以上を合格とする.

(5) リラックスして自分の現在の力を十分に発揮すること. また, 不正行為は決してしないこと.

(6) 携帯電話の電源は切っておくこと.

答案作成に関する注意事項

(1) 各答案用紙の左上に問題番号, 右上に学生番号, 氏名を記入すること.

(2) 答案は問題毎 (原則として 1 枚以内) に作成すること.

(3) 裏面を使用するときは, 表面の最後にその旨を明記すること.

(4) 数学的論証の表現力も採点対象とする. いきなり答案用紙に書くのではなく, 草稿用紙でよく練ってから解答を書くこと.

(5) あなたが正確に理解しているかを示してもらうことがこのテストの目的であるので, 論証においては「明らかに」という表現は避け, 論証の要点を的確に記すこと. また, 解の導出においては導出過程の要点を的確に記すこと.

(6) もし途中に解けない小問があっても, その結果を認めて後続の小問を解いて構わない.

試験後の注意事項

(1) 修了テスト終了後は速やかに退出すること. 会場はただちに後期課程入学試験受験生控室となる.

(2) 合否の通知と答案の返却は 8 月 3 日 (金) 13:00 以降に教育研究支援室にて行う.

$\boxed{1}$ 以下の問いに答えよ.

(1) 次の広義積分が収束するための実数 p の必要十分条件を求めよ.

$$\int_0^1 (1-x)^p dx$$

(2) 次の広義積分が収束することを示せ.

$$\int_0^1 \frac{1}{\{x(1-x)\}^{1/3}} dx$$

(3) 次の広義積分が収束しないことを示せ.

$$\int_1^\infty \frac{2+\sin e^x}{x} dx$$

$\boxed{2}$ $\mathbb{R}^2$ 上で定義された関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

について, 以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x,y)$ は原点において偏微分可能であることを示せ. また その偏微分係数 $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ も求めよ.

(2) 関数 $f(x,y)$ に対して,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-Ax-By}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

となる定数 A, B が存在することを示せ.

(3) $t \neq 0$ のときの $f_x(t,t)$ を求めよ. その結果を用いて x に関する偏導関数 $f_x(x,y)$ が原点で連続でないことを示せ.

$\boxed{3}$ ちょうど 2 つの固有値 λ_1, λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) をもつ 3 次複素正方行列 A を考える．また, 固有値 λ_1, λ_2 に対する固有空間を, それぞれ W_1, W_2 とする．このとき, 以下の問いに答えよ．

(1) 部分空間の和 $W_1 + W_2$ が直和 $W_1 \oplus W_2$ であることを示せ．

(2) $W_1 \oplus W_2 \neq \mathbb{C}^3$ となる行列 A の例を 1 つあげ, その行列 A に対して W_1, W_2 の基底を 1 つ求めよ．また, A が対角化可能かどうか, 答えのみ述べよ．ただし, λ_1, λ_2 は各自適当に選んでよい．

(3) $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{C}^3$ の場合, A は対角化可能である．その理由を簡潔に説明せよ．

$\boxed{4}$ U, V を有限次元の実ベクトル空間, f を U から V への線形写像とする．$\mathrm{Ker}\, f$ は f の核, $\mathrm{Im}\, f$ は f の像をそれぞれ表すものとする．このとき

$$\dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f = \dim U$$

となることを示したい．$p = \dim \mathrm{Ker}\, f$, $r = \dim \mathrm{Im}\, f$ とおく．$\mathrm{Ker}\, f$ の基底 $u_1, \cdots, u_p$ と $\mathrm{Im}\, f$ の基底 $v_1, \cdots, v_r$ をとる．像の定義により

$$f(u_{p+j}) = v_j, \quad j = 1, \cdots, r$$

をみたす $u_{p+1}, \cdots, u_{p+r} \in U$ がとれる．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $u_1, \cdots, u_p, u_{p+1}, \cdots, u_{p+r}$ は 1 次独立であることを示せ．

(2) 任意の $u \in U$ をとる．$f(u) \in \mathrm{Im}\, f$ であるから

$$f(u) = \sum_{j=1}^{r} b_j v_j$$

をみたす $b_1, \cdots, b_r \in \mathbb{R}$ がとれる．このとき

$$u - \sum_{j=1}^{r} b_j u_{p+j} \in \mathrm{Ker}\, f$$

となることを示せ．

(3) 任意の $u \in U$ は $u_1, \cdots, u_p, u_{p+1}, \cdots, u_{p+r}$ の 1 次結合で表せることを示せ．