2011 年度修了テスト

(2011 年 7 月 27 日(水))

試験に関する注意事項

(1) 試験時間 (3 時間) は黒板に記載する.
(2) 試験開始後, 1 時間半経過するまでは中途退出してはいけない.
(3) 問題用紙は両面 1 枚, 答案用紙は 4 枚, 草稿用紙は 4 枚である. そのうち, 答案用紙のみを回収する. 他は持ち帰ること.
(4) 各問 30 点満点, 計 120 点満点とし, 90 点以上を合格とする.
(5) リラックスして自分の現在の力を十分に発揮すること. また, 不正行為は決してしないこと.
(6) 携帯電話の電源は切っておくこと.

答案作成に関する注意事項

(1) 各答案用紙の左上に問題番号, 右上に学生番号, 氏名を記入すること.
(2) 答案は問題毎 (原則として 1 枚以内) に作成すること.
(3) 裏面を使用するときは, 表面の最後にその旨を明記すること.
(4) 数学的論証の表現力も採点対象とする. いきなり答案用紙に書くのではなく, 草稿用紙でよく練ってから解答を書くこと.
(5) あなたが正確に理解しているかを示してもらうことがこのテストの目的であるので, 論証においては「明らかに」という表現は避け, 論証の要点を的確に記すこと. また, 解の導出においては導出過程の要点を的確に記すこと.
(6) もし途中に解けない小問があっても, その結果を認めて後続の小問を解いて構わない.

試験後の注意事項

合否の通知と答案の返却は 7 月 29 日 (金) 13:00 より教育研究支援室にて行う.

$\boxed{1}$　f を開区間 $(0,1)$ 上で定義された関数とする. f が一様連続であるとは,

$$(*)\begin{cases}\text{任意の } \varepsilon>0 \text{ に対して, ある } \delta>0 \text{ が存在して,}\\ |x-y|<\delta \text{ となるすべての } x,y\in(0,1) \text{ に対して,}\\ |f(x)-f(y)|<\varepsilon \text{ が成り立つ}\end{cases}$$

ことである. 以下の問いに答えよ.

(1) f が微分可能であり, ある正数 M が存在して $|f'(x)|\leq M$ が任意の $x\in(0,1)$ に対して成り立つならば, f は一様連続であることを示せ.

(2) 一様連続な関数について, 次の事実が知られている:

(∗∗)　「関数 f が開区間 $(0,1)$ で一様連続ならば,
閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数に拡張できる.」

この事実を示すために以下の (a),(b) を示せ.

(a) 数列 $\{f(\frac{1}{n})\}_{n=2}^{\infty}$ は有限の極限値を持つ.

(b) $f(0)=\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n})$ とするとき, $\lim\limits_{x\to0+0} f(x)=f(0)$ である.

(これにより f は $[0,1)$ 上の連続関数に拡張出来る事が示される. さらに $f(1)$ を $f(0)$ と同様の方法で定義し, 上記の (b) の議論を $x\to1-0$ に用いることにより, f が $[0,1]$ 上の連続関数に拡張されることが示される.)

$\boxed{2}$　実数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対し, 級数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束するものとする. このとき以下の問いに答えよ.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ であることを示せ.

(2) 巾級数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^n x^n$ がすべての実数 x に対して収束することを示せ.

(3) 巾級数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ はすべての実数 x に対して収束するわけではないことを例を挙げて説明せよ.

$\boxed{3}$ V を n 次元実計量ベクトル空間 (内積空間) とする. V の零ベクトルを $\mathbf{0}$ で表す. V 上の内積を $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ ($\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$) で表す. ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ が

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$$

をみたしているとき, $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は直交するという. k を自然数とし, V の $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ が直交系をなす (互いに直交している) とき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ は 1 次独立であることを示せ.

(2) $k < n$ とし, $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ が張る部分空間を W_k とする. W_k に含まれないベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ を 1 つとり, ベクトル $\boldsymbol{x}_{k+1} \in V$ を

$$\boldsymbol{x}_{k+1} := \boldsymbol{v} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}_i \rangle}{\langle \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i \rangle} \boldsymbol{x}_i$$

と定める. このとき, $\boldsymbol{x}_{k+1} \neq \mathbf{0}$ であることを確かめ, さらに $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_{k+1}$ が直交系をなすことを示せ.

(3) V が直交基底 (互いに直交するベクトルたちからなる基底) をもつことを示せ.

$\boxed{4}$ 各 2 次複素正則行列 P に対して, 写像 $\Phi_P : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$ を

$$\Phi_P(X) = PXP^{-1}$$

で定める. このとき以下の問いに答えよ.

(1) $\Phi_P : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$ は複素線形写像であることを示せ.

(2) 2 次複素正則行列 P, Q に対して

$$\Phi_P \circ \Phi_Q = \Phi_{PQ}$$

が成り立つことを示せ.

(3) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で基底を取ったときの Φ_P の表現行列を A_P と記すことにする. このとき $P_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$ ($\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$) に対する $|\det A_{P_\lambda}|$ を求めよ.
(ヒント：$(P_\lambda)^2$ を考えてみよ.)