

2010 年度修了テスト

(2010 年 7 月 28 日(水))

試験に関する注意事項

- (1) 試験時間(3 時間)は黒板に記載する.
- (2) 試験開始後, 1 時間半経過するまでは中途退出してはいけない.
- (3) 問題用紙は両面 1 枚, 答案用紙は 4 枚, 草稿用紙は 4 枚である. そのうち, 答案用紙のみを回収する. 他は持ち帰ること.
- (4) 各問 30 点満点, 計 120 点満点とし, 90 点以上を合格とする.
- (5) リラックスして自分の現在の力を十分に発揮すること. また, 不正行為は決してしないこと.
- (6) 携帯電話の電源は切っておくこと.

答案作成に関する注意事項

- (1) 各答案用紙の左上に問題番号, 右上に学生番号, 氏名を記入すること.
- (2) 答案は問題毎(原則として 1 枚以内)に作成すること.
- (3) 裏面を使用するときは, 表面の最後にその旨を明記すること.
- (4) 数学的論証の表現力も採点対象とする. いきなり答案用紙に書くのではなく, 草稿用紙でよく練ってから解答を書くこと.
- (5) あなたが正確に理解しているかを示してもらうことがこのテストの目的であるので, 論証においては「明らかに」という表現は避け, 論証の要点を的確に記すこと. また, 解の導出においては導出過程の要点を的確に記すこと.
- (6) もし途中で解けない小問があっても, その結果を認めて後続の小問を解いて構わない.

試験後の注意事項

合否の通知と答案の返却は 7 月 30 日(金) 13:00 より教育研究支援室にて行う.

1 以下の問いに答えよ.

(1) 次の広義積分が収束するための実数 p の必要十分条件を求めよ.

$$\int_0^1 (1-x)^p dx$$

(2) 次の広義積分が収束することを示せ.

$$\int_0^1 \frac{1}{\{x(1-x)\}^{1/3}} dx$$

(3) 次の広義積分が収束しないことを示せ.

$$\int_1^{\infty} \frac{2 + \sin e^x}{x} dx$$

2 f を开区間 I 上で定義された関数とする. f が一様連続であるとは,

(*) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ s.t. $\forall x, y \in I \ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

が成り立つことをいう. 以下の問いに答えよ.

(1) f が I 上一様連続でないこと, すなわち (*) の否定を $\varepsilon - \delta$ 式に述べよ. ただし, 「(*) が成り立たない」というような解答は認めない.

(2) 以下では $I = (0, 1)$, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ($x \in I$) とする.

(a) f は I 上一様連続かどうか, 理由とともに答えよ.

(b) $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$ は存在しないことを証明せよ.

3 V を \mathbb{C} 上の $\{0\}$ でない有限次元ベクトル空間とし, 線形変換 $f: V \rightarrow V$ が条件

$$\text{Ker } f = \text{Im } f$$

を満たしているとする. このとき以下の問いに答えよ.

- (1) $\text{Ker } f \neq \{0\}$ かつ $\text{Im } f \neq V$ を示せ.
- (2) $\{v_1, \dots, v_n\}$ を $\text{Im } f$ の基底とする. $f(w_i) = v_i$ ($i = 1, \dots, n$) を満たす V のベクトル w_1, \dots, w_n をとると, $\{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n\}$ は 1 次独立であることを示せ.
- (3) (2) における $\{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n\}$ は V の基底であることを示し, この基底に関する f の表現行列を求めよ.

4 P, Q を $PQ = QP$ を満たす n 次複素正方行列とし, P の固有値 λ に対する固有空間を W_λ とする. すなわち

$$W_\lambda = \{v \in \mathbb{C}^n \mid Pv = \lambda v\}$$

とする. このとき以下の問いに答えよ.

- (1) W_λ は \mathbb{C}^n の複素線形部分空間であることを示せ.
- (2) 任意の $v \in W_\lambda$ について $Qv \in W_\lambda$ であることを示せ.
- (3) (2) を用いて, P の固有多項式が n 個の相異なる解をもつ時に Q は対角化可能であることを示せ.
(ヒント: (2) より, $\dim W_\lambda = 1$ のとき $v \in W_\lambda, v \neq 0$ となる v は Q の固有ベクトルとなることに注意せよ.)