予備テスト　問題集

（2024年2月改訂）

$\boxed{1}$ 正の実数 x に対して定義された実数値関数 $g(x)$ と実定数 a に対して, $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ を以下のように定義する.

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} g(x) & (x > 0) \\ a & (x = 0) \\ g(-x) & (x < 0) \end{cases}.$$

(1) $x > 0$ に対して関数 $g(x)$ を

$$g(x) \coloneqq \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

で定める. このとき, $f(x)$ が $x = 0$ で連続になるように a の値を定めよ.

(2) (1) で定めた $f(x)$ について $f'(0)$ を求め, $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 全体で C^1 級となることを示せ.

(3) 以下の (i), (ii) を同時に満たす $g(x)$ の例を挙げ, そのことを説明せよ.

(i) $g(x)$ は $x > 0$ で <u>有界</u> かつ <u>連続</u> な関数.

(ii) a をどのような値に定めても, $f(x)$ は $x = 0$ で連続にならない.

$\boxed{2}$ 区間 I 上で定義された関数列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ が I 上で関数 f に一様収束するとは,

$$(*) \begin{cases} \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して，ある自然数 } N \text{ が存在して,} \\ n \geq N \text{ なる任意の自然数 } n \text{ と任意の } x \in I \text{ について,} \\ |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \text{ が成り立つ} \end{cases}$$

ことである. 以下の問いに答えよ.

(1) 区間 I 上で連続な実数値関数の列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ が, I 上の関数 f に一様収束しているならば, f もまた連続であることを示せ.

（ヒント：$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|$ を用いる.）

(2) $(0, 1)$ 上の関数列 $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ および関数 g を以下のように定義する.

$$g_n(x) \coloneqq (1 - x) \sum_{k=0}^{n} x^k, \quad g(x) \coloneqq 1.$$

（ア）$\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ は $(0, 1)$ 上で g に各点収束することを ϵ-N 論法を用いて示せ.

（イ）$\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ が区間 I 上で f に一様収束しないことの定義（つまり $(*)$ の否定）を ϵ-N 論法を用いて書き, それに基づいて $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ が $(0, 1)$ 上で g に一様収束しないことを示せ.

$\boxed{3}$ 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ が有界である (すなわち, ある正数 M が存在して, 任意の n に対して $|a_n| \leq M$ が成り立つ) とし, べき級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

を考える. 以下の問いに答えよ.

(1) $|x| < 1$ となる実数 x について級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束することを示せ.

(2) 開区間 $(-1,1)$ 上の関数 f_N $(N = 1, 2, \ldots)$ および f を

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n, \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in (-1,1)$$

によって定める. このとき $x \in (-1,1)$ に対し

$$|f_N(x) - f(x)| \leq \frac{M|x|^{N+1}}{1-|x|}$$

であることを示し, これを用いて任意の $R \in (0,1)$ に対して, 閉区間 $[-R, R]$ 上で f_N は f に一様収束することを示せ.

(3) 関数 f は開区間 $(-1,1)$ 上で連続であることを示せ.
(ヒント: ある区間上で連続関数の列がある関数に一様収束するとき, その区間で極限の関数も連続となることは証明せずに用いてよい. また, 多項式関数は連続であるということも証明せずに用いてよい.)

$\boxed{4}$ $\mathbb{R}^2$ 上で定義された関数

$$f(x,y) \coloneqq \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} \cos \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

について, 以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x,y)$ は原点において偏微分可能であることを示せ. また その偏微分係数 $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ も求めよ.

(2) 関数 $f(x,y)$ に対して,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - Ax - By}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

となる定数 A, B が存在することを示せ.

(3) $t \neq 0$ のときの $f_x(t,t)$ を求めよ. その結果を用いて, x に関する偏導関数 $f_x(x,y)$ が原点で連続でないことを示せ.

$\boxed{5}$ f を開区間 $(0,1)$ で定義された函数とする．f が一様連続であるとは，

任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して，$|x-y| < \delta$ となる任意の $x, y \in (0,1)$ に対して，$|f(x) - f(y)| < \epsilon$ が成り立つ

ことである．このとき，次の問に答えよ．

(1) $f(x) = \sin(1/x)$ とするとき，f は一様連続か？ 理由とともに答えよ．

(2) f が一様連続ならば有界であることを示せ．ここで，f が有界であるとは，

ある正実数 $M > 0$ が存在して，任意の $x \in (0,1)$ に対して，$|f(x)| < M$ が成り立つ

ことである．

(3) f が一様連続ならば，$x_n \in (0,1)$ かつ $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ となる任意の数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，$\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ がコーシー列になることを示せ．

$\boxed{6}$ $\mathbb{R}^n$ の部分集合 M で定義された実数値関数 f が点 $a \in M$ で連続であるとは，

$$(*)\begin{cases} \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して,} \\ x \in M,\ \ \|x-a\| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon \\ \text{となる } \delta = \delta(a, \varepsilon) > 0 \text{ が存在する} \end{cases}$$

ことである. ただし, $\|\cdot\|$ は $\mathbb{R}^n$ のユークリッドノルムを表す. 以下の問いに答えよ.

(1) ある $a \in M$ に対し条件 $(*)$ が成り立つとき, $\|y-a\| < \delta/2$ をみたす任意の $y \in M$ について

$$x \in M,\ \|x-y\| < \delta/2 \implies |f(x) - f(y)| < 2\varepsilon$$

が成立することを示せ.

(2) 有界閉集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ で定義された実数値関数 f がすべての $a \in K$ において連続であるとする. このとき, f は K 上で一様連続であること, すなわち任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$x, y \in K,\ \|x-y\| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

となる $\delta > 0$ が存在することを示せ.

$\boxed{7}$ $\|\cdot\|$ を $\mathbb{R}^k$ のユークリッドノルムとする．$P \in \mathbb{R}^k$ と実数 $\delta > 0$ に対して $B(P, \delta) := \{Q \in \mathbb{R}^k \mid \|Q - P\| < \delta\}$ とおく．$U \subset \mathbb{R}^k$ が開集合であるとは, 任意の点 $P \in U$ に対しある $\delta > 0$ が存在して $B(P, \delta) \subset U$ が成り立つときをいい，開集合の補集合を閉集合という．関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ のグラフを $G_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$ で定義する．

(1) 「$x, y \in \mathbb{R}$, 実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ かつ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$ ならば $f(x) = y$」が常に成り立つことは, $G_f \subset \mathbb{R}^2$ が閉集合であることと同値であることを示せ.

(2) f が連続ならば G_f は $\mathbb{R}^2$ の閉集合であることを示せ.

(3) G_f が $\mathbb{R}^2$ の閉集合であっても f は連続とは限らないことを次の例で確かめよ:

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}.$$

(注意: $G_f^+ := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1/x,\ x > 0\}$ について, $1/x$ は $x > 0$ で連続だから (2) より G_f^+ は閉集合という論証は誤り．(2) の仮定は $f \in C(\mathbb{R})$ であり, 例えば, $G_1^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1,\ x > 0\}$ がその反例となる.)

$\boxed{8}$ $\mathbb{R}$ 上の定数でない C^1 級の関数 f が, 1 を周期とする周期関数である (つまり任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x + 1) = f(x)$ を満たす) とき, 以下の問いに答えよ.

(1) f は $\mathbb{R}$ 上の有界関数であることを示せ. (ヒント: f の閉区間 $[0, 1]$ への制限を考えよ.)

(2) ある定数 $C > 0$ が存在して, 任意の実数 $N > M > 0$ に対して,

$$\left| \int_M^N \frac{f'(x)}{x}\, dx \right| \leq \frac{C}{M}$$

が成り立つことを示し, 積分

$$I = \int_1^{\infty} \frac{f'(x)}{x}\, dx$$

が収束することを確かめよ. (ヒント: 前半は部分積分を利用せよ．後半はコーシーの収束条件を利用せよ.)

(3) 導関数 f' も周期 1 の周期関数となる．これを用いて, 任意の自然数 n に対して

$$\int_n^{(n+1)} \frac{|f'(x)|}{x}\, dx \geq \frac{1}{(n+1)} \int_0^1 |f'(x)|\, dx$$

が成り立つことを示せ．また, 積分 I が絶対収束しないことを示せ.

$\boxed{9}$ 以下の問いに答えよ.

(1) 実定数 a, b は $a > b > 0$ をみたすとする. このとき, $\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$f(x, y) = (ax^2 + by^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

の極大点・極小点を全て求めよ.

(2) P を 2 次正則行列とし, $\mathbb{R}^2$ 上のなめらかな関数 $F(\boldsymbol{x}) = F(x_1, x_2)$ に対して, $\mathbb{R}^2$ 上の関数 G を $G(\boldsymbol{y}) \coloneqq F(\boldsymbol{x})$ (ただし $\boldsymbol{y} \coloneqq \boldsymbol{x}P$) と定義する. このとき, $G(\boldsymbol{y}) = F(\boldsymbol{x})$ の両辺を微分して連鎖律 (chain rule) を使うことによって

$$(a) \qquad \nabla F = P\nabla G,$$

$$(b) \qquad H_F = PH_GP^T$$

が成り立つことを示せ. ただし, P^T は P の転置行列であり, F の勾配ベクトル ∇F とヘッセ行列 H_F は

$$\nabla F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \quad H_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$$

で定義される.

(3) 実定数 a, b, c は $ab - c^2 > 0$, $a > 0$, $a \neq b$ をみたすとする. このとき, $\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$g(x, y) = (ax^2 + by^2 + 2cxy)e^{-(x^2+y^2)}$$

の極大点・極小点がそれぞれいくつあるかを理由をつけて答えよ.

$\boxed{10}$ 以下の問いに答えよ.

(1) 次の広義積分が収束するための実数 p の必要十分条件を求めよ.

$$\int_0^1 (1 - x)^p \, dx.$$

(2) 次の広義積分が収束することを示せ.

$$\int_0^1 \frac{1}{\{x(1 - x)\}^{1/3}} \, dx.$$

(3) 次の広義積分が収束しないことを示せ.

$$\int_1^\infty \frac{2 + \sin(x^2 + 1)}{x} \, dx.$$

$\boxed{11}$ $\mathbb{C}$ ベクトル空間の線形写像 $f\colon V \to W$ に対し，

$$\operatorname{rank} f \coloneqq \dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{Im} f)$$

で f の階数を定義する．また $\mathbb{C}$ 上の $m \times n$ 行列 A に対し，線形写像 $f_A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ を $f_A(x) \coloneqq Ax$ で定義し，非負整数 $\underline{\operatorname{rank}}(A)$ を次のように定める．

$$\underline{\operatorname{rank}}(A) \coloneqq \operatorname{rank} f_A.$$

(1) $\mathbb{C}$ 上の $m \times n$ 行列 A，m 次正則行列 P，および n 次正則行列 Q に対して $\underline{\operatorname{rank}}(PAQ) = \underline{\operatorname{rank}}(A)$ が成り立つことを示せ．

(2) $\mathbb{C}$ 上の $m \times n$ 行列 A が行と列の基本変形により

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \quad (E_r \text{ は } r \text{ 次単位行列，} O \text{ は零行列})$$

になったとする．このとき，$\underline{\operatorname{rank}}(A) = r$ であることを示せ．
(このことから $\underline{\operatorname{rank}}(A)$ は行列 A の階数に等しいことが従う.)

(3) $\mathbb{C}$ 上の $m \times n$ 行列 A に対し，$\underline{\operatorname{rank}}({}^t\!A) = \underline{\operatorname{rank}}(A)$ となることを示せ．

$\boxed{12}$ 実数を成分に持つ $m \times n$ 行列 A で定義される線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(v) \coloneqq Av$ に対して, 等式

$$(*) \quad n = \operatorname{rank} A + \dim \ker f$$

が成り立つことが知られている. 以下ではこの事実を確認しよう.

$e_1, \ldots, e_n$ を $\mathbb{R}^n$ の基本ベクトルとし, $v_1, \ldots, v_p$ を $\ker f$ の基底とする. 行列 A の列ベクトルを $a_1, \ldots, a_n$ とし, $r \coloneqq \operatorname{rank} A$ とおく. $\operatorname{rank} A$ は A の列ベクトルのうち一次独立なものの最大個数であるから, $a_1, \ldots, a_n$ の中から r 個の一次独立なベクトル

$$a_{i_1}, \ldots, a_{i_r} \quad (1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n)$$

を選ぶことができ, $\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Im} f$ である. 以下を証明せよ. (これから $(*)$ が従う.)

(1) $e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}, v_1, \ldots, v_p \in \mathbb{R}^n$ は一次独立である.

(2) $i_1, \ldots, i_r$ のどれとも異なる i に対して, a_i は $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$ の一次結合で表すことができる.

(3) 任意の $v \in \mathbb{R}^n$ は $e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}, v_1, \ldots, v_p$ の一次結合で表される.

$\boxed{13}$ V, W を実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の部分空間とする. このとき, 和 $V+W$ および交わり $V \cap W$ も $\mathbb{R}^n$ の部分空間となり, 公式

$$(*) \quad \dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$$

が成立する. 以下, この公式を証明しよう.

$\mathbb{R}^n$ の元 $u_1, \ldots, u_l,\ v_1, \ldots, v_r,\ w_1, \ldots, w_s$ を

- $u_1, \ldots, u_l$ は $V \cap W$ の基底
- $u_1, \ldots, u_l,\ v_1, \ldots, v_r$ は V の基底
- $u_1, \ldots, u_l,\ w_1, \ldots, w_s$ は W の基底

となるように選ぶとき, 次の二つの主張 (ア), (イ) が成り立つ:

(ア) $V+W$ の任意の元 x は, $u_1, \ldots, u_l,\ v_1, \ldots, v_r,\ w_1, \ldots, w_s$ の一次結合で表される.

(イ) $u_1, \ldots, u_l,\ v_1, \ldots, v_r,\ w_1, \ldots, w_s$ は一次独立である.

この (ア), (イ) より, $u_1, \ldots, u_l,\ v_1, \ldots, v_r,\ w_1, \ldots, w_s$ は $V+W$ の基底をなすことが分かり, 公式 $(*)$ が得られる. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 上の主張 (ア), (イ) をそれぞれ証明せよ.

(2) $V \cup W$ は必ずしも $\mathbb{R}^n$ の部分空間とはならないことを $n=2$ の場合に例をあげて説明せよ.

$\boxed{14}$ $V := \mathbb{R}^n$ とおき, $f\colon V \to V$ を V 上の恒等的には 0 でない線形変換で, $f \circ f = f$ を満たすものとする. また V 上の線形変換 g を次で定める.

$$g(v) := v - f(v) \quad (v \in V).$$

(1) $\operatorname{Im} g \subset \ker f$ を示せ.

(2) $V = \operatorname{Im} f \oplus \ker f$ を示せ.

(3) 整数 r $(1 \leq r \leq n)$ と V の適当な基底 $v_1, \ldots, v_n$ を選べば,

$$f(v_i) = \begin{cases} v_i & (i = 1, \ldots, r) \\ 0 & (i = r+1, \ldots, n) \end{cases}$$

を満たすようにできることを示せ.

$\boxed{15}$ V を 有限次元実計量ベクトル空間 (内積空間) とし, $\langle u, v\rangle$ で 2 つのベクトル $u, v \in V$ の内積をあらわす. W を V の部分空間とし, W の全てのベクトルと直交するような V のベクトル全体を $W^{\perp}$ とおく:

$$W^{\perp} := \{v \in V \mid \text{任意の } w \in W \text{ に対して } \langle v, w\rangle = 0\}.$$

(1) $W^{\perp}$ は V の部分空間であることを示せ.

(2) $w_1, \ldots, w_r$ を W の正規直交基底とする. このとき, $x \in V$ に対して

$$x - (c_1 w_1 + \cdots + c_r w_r) \in W^{\perp}$$

となるような実数 c_j $(j = 1, \ldots, r)$ を, 内積を用いて表せ.

(3) $v_1, \ldots, v_s$ を $W^{\perp}$ の任意の基底とするとき, $w_1, \ldots, w_r, v_1, \ldots, v_s$ は V の基底となることを示せ. また, これより $\dim V = \dim W + \dim W^{\perp}$ が成り立つことを結論せよ.

$\boxed{16}$ P, Q を $PQ = QP$ を満たす n 次複素正方行列とし, P の固有値 λ に対する固有空間を W_λ とする. すなわち

$$W_\lambda := \{\, v \in \mathbb{C}^n \mid Pv = \lambda v \,\}$$

とする. このとき以下の問いに答えよ.

(1) W_λ は $\mathbb{C}^n$ の複素線形部分空間であることを示せ.

(2) $v \in \mathbb{C}^n$ に対し $f(v) = Qv$ とするとき，$f(W_\lambda) \subseteq W_\lambda$ であることを示せ.

(3) P の固有多項式が n 個の相異なる解をもつとき，P と Q を同時に対角化する基底が存在することを示せ.
（ヒント： (2) より, $\dim W_\lambda = 1$ のとき $v \in W_\lambda$, $v \neq 0$ となる v は Q の固有ベクトルとなることに注意せよ.）

$\boxed{17}$ A は $\mathbb{C}$ 上の 3 次正方行列で, 単位行列を E として $A^3 = E$ をみたすものとする.

(1) A の固有値は $1, \omega, \bar{\omega}$ のいずれかであることを示せ. ただし i を虚数単位として $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ であり, また複素数 z と共役な複素数を $\bar{z}$ とする.

(2) A のジョルダン標準形として可能なものをすべて考えるとき, ジョルダン細胞の次数 n のうち最大のものを求めよ.

(3) A の成分がすべて実数であるとき, $\omega, \bar{\omega}$ のうちの一方が A の固有値ならば, 他の一方も A の固有値であることを示せ.

$\boxed{18}$ n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ に, 内積

$$\langle v, w\rangle = v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n, \quad v = {}^t(v_1, \ldots, v_n),\ w = {}^t(w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$$

が定まっているとし, $|v| \coloneqq \sqrt{\langle v, v\rangle}$ $(v \in \mathbb{R}^n)$ とおく. n 次実正方行列 A が,

$$\text{任意の } v, w \in \mathbb{R}^n \text{ に対して } \langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle$$

を満たしているとする. また, $S = \{v \in \mathbb{R}^n\,;\, |v| = 1\}$ とおき, 関数 $f\colon S \to \mathbb{R}$ を

$$f(v) \coloneqq \langle Av, v\rangle \quad (v \in S)$$

によって定める.

(1) f は S 上で最大値をとる. このことが成り立つ理由を簡潔に述べよ.

問 (1) で得られた f の S 上での最大値を λ とし, $f(e) = \lambda$ となるベクトル $e \in S$ をとる. また $V = \{v \in \mathbb{R}^n\,;\, \langle v, e\rangle = 0\}$ とおく. このとき, 任意の $v \in V$ と任意の実数 t に対して $e + tv \neq 0$ であるので,

$$u(t) = \frac{1}{|e+tv|}(e+tv) \in S$$

というベクトルを考えることができる.

(2) t の関数

$$\rho(t) \coloneqq f(u(t)) = \langle Au(t), u(t)\rangle$$

の $t = 0$ における微分係数 $\rho'(0)$ を計算することによって, $\langle Ae, v\rangle = 0$ を示せ.

(3) 任意の $v \in V$ に対して $\langle Ae, v\rangle = 0$ となることから, $Ae = \lambda e$, つまり λ, e がそれぞれ A の固有値, 固有ベクトルであることを導け.

$\boxed{19}$ V を体 K 上のベクトル空間, W を V の部分空間とする. $v, v' \in V$ に対し

$$v \sim v' \ :\Longleftrightarrow\ v - v' \in W$$

で二項関係 $\sim$ を定義する.

(1) $\sim$ は同値関係であることを示せ.
(即ち, (i) 反射律 $v \sim v$, (ii) 対称律 $v \sim v' \Longrightarrow v' \sim v$, (iii) 推移律 $v \sim v'$, $v' \sim v'' \Longrightarrow v \sim v''$ の三つが成り立つことを示せ. ただし, W に関するどのような条件をどう使ったかわかるように書くこと.)

以下では, V の元の同値関係 $\sim$ による同値類の集合 $V/\sim$ を考える. また, $v \in V$ の同値類を $[v]$ $(\in V/\sim)$ と表す.

(2) V の元 v, v', w, w' が $v \sim v'$, $w \sim w'$ を満たすとき, 任意の K の元 α, β に対して $\alpha v + \beta w \sim \alpha v' + \beta w'$ であることを示せ.

これより, $[v]$, $[w] \in V/\sim$ と α, $\beta \in K$ に対して $\alpha[v] + \beta[w] \in V/\sim$ を

$$\alpha[v] + \beta[w] \coloneqq [\alpha v + \beta w]$$

により定めることができる. さらに, ここで定めた和とスカラー倍によって $V/\sim$ は K 上のベクトル空間になる. これを V の W による商ベクトル空間と呼び V/W と表す.

(3) V を有限次元とする. W の基底 $\langle e_1, e_2, \ldots, e_r \rangle$ を含む V の基底 $\langle e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n \rangle$ をとる. このとき $\langle [e_{r+1}], \ldots, [e_n] \rangle$ は V/W の基底であることを示せ. (これより $\dim V = \dim W + \dim(V/W)$ であることがわかる.)

$\boxed{20}$ V を体 K 上の有限次元ベクトル空間とし, V から K への線形写像全体の集合を V^* で表す. $\varphi, \psi \in V^*$, $a \in K$ に対して, 和 $\varphi + \psi \in V^*$, スカラー倍 $a\varphi \in V^*$ を

$$(\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v), \quad (a\varphi)(v) = a(\varphi(v)) \quad (v \in V)$$

と定めることにより, V^* はベクトル空間となる.

以下, U, V を体 K 上の有限次元ベクトル空間, $f \colon U \to V$ を線形写像とし, 写像 $f^* \colon V^* \to U^*$ を

$$(f^*(\varphi))(u) \coloneqq \varphi(f(u)) \quad (\varphi \in V^*, u \in U)$$

によって定義する. 以下の問いに答えよ.

(1) $f^*(\varphi) \in U^*$ であること, すなわち $f^*(\varphi) \colon U \to K$ が線形写像であることを示せ.

(2) f^* は線形写像であることを示せ.

(3) f が全射ならば, f^* は単射になることを証明せよ.