2023年度予備テスト

(2023年4月4日実施)

試験について

1. 試験終了時刻は黒板に記載する.
2. 座席表に従って着席すること.
3. 途中退室は試験開始後 90 分経過してから許可する.
4. 問題用紙 1 枚 (本表紙を除く), 答案用紙 (罫線あり) 4 枚, 草稿用紙 (罫線なし) 4 枚.
5. 答案用紙の追加は認めない.
6. 答案用紙のみを回収する.
7. 各問 3 点満点の計 12 点満点であり, 9 点以上を合格とする.
8. 不正行為は決してしないこと.
9. 携帯電話の電源は切っておくこと.
10. 体調が悪くなった場合は, 速やかに申し出ること.

答案作成についての注意事項

1. 全ての答案用紙の左上に問題番号を, 右上に学生番号と氏名を記入すること.
2. 答案は各問題について一枚を使用すること.
3. 答案用紙の裏面を使用してもよい. 表面の最下行にその旨を明記すること.
4. 数学的論証の表現力も採点対象である. **いきなり答案用紙に書くのではなく, 草稿用紙でよく練ってから解答を書くこと**.
5. 解答者の理解の正確さを示すことがこのテストの目的である. 論証においては「明らかに」という表現は避け, 要点を的確に記すこと.
6. もしも途中に解けない小問があっても, その結果を認めて後続の小問を解いてよい.

試験後の注意事項

1. 合否は, 4月7日（金）までに TACT を用いて連絡する予定.
2. 不合格のときは基礎演習クラスを受講せねばならない. 基礎演習クラスは 4月12日 (水) に開講する予定である.

$\boxed{1}$ f を開区間 $(0,1)$ 上で定義された実数値関数とする. f が $(0,1)$ 上で一様連続であるとは,
「任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, $|x-y| < \delta$ となるすべての $x, y \in (0,1)$ に対して, $|f(x)-f(y)| < \epsilon$ が成り立つ」
ことである. 以下の問いに答えよ.

(1) f が開区間 $(0,1)$ で一様連続でないことの定義（つまり上記命題の否定) を $\epsilon - \delta$ 論法を用いて書け.

(2) (1) に基づいて $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ が開区間 $(0,1)$ 上で一様連続でないことを示せ.

(3) 開区間 $(0,1)$ 上の一様連続関数 g は, 半開区間 $[0,1)$ 上のある連続関数 h に拡張できることを示せ.

$\boxed{2}$ 以下の問いに答えよ.

(1) 次の広義積分が収束するための実数 p の必要十分条件を求めよ.

$$\int_0^1 (1-x)^p \, dx.$$

(2) 次の広義積分が収束することを示せ.

$$\int_0^1 \frac{1}{\{x(1-x)\}^{1/3}} \, dx.$$

(3) 次の広義積分が収束しないことを示せ.

$$\int_1^\infty \frac{2+\sin e^x}{x} \, dx.$$

$\boxed{3}$ 実ベクトル空間 V に対し, V から $\mathbb{R}$ への線形写像全体の集合を V^* で表す. 以下, U, U' を V の部分空間とし, 線形写像 $p\colon V \to U$ および $p'\colon V \to U'$ が以下の条件を満たすとする. 特に, $v \in V$ に対して, $p(v) \in U$ かつ $p'(v) \in U'$ である.

(i) 任意の $v \in V$ に対して, V において $p(v) + p'(v) = v$.
(ii) 任意の $u \in U$ に対して, U において $p(u) = u$.
(iii) 任意の $u' \in U'$ に対して, U' において $p'(u') = u'$.

また, $\varphi \in V^*$ に対して, φ を U, U' に制限して得られる線形写像をそれぞれ $\varphi|_U \in U^*$, $\varphi|_{U'} \in U'^*$ で表す. これを用いて, V^* から直積集合 $U^* \times U'^*$ への写像 $F\colon V^* \to U^* \times U'^*$ を

$$F(\varphi) \coloneqq (\varphi|_U, \varphi|_{U'}) \quad (\varphi \in V^*)$$

で定める. 以下の問いに答えよ.

(1) $U \subset \operatorname{Ker} p'$ を示せ.
(2) $V = U \oplus U'$ を示せ. また, F が単射であることを示せ.
(3) F が全射であることを示せ. (ヒント: 任意の $(\psi, \psi') \in U^* \times U'^*$ に対し, $F(\varphi) = (\psi, \psi')$ を満たす $\varphi \in V^*$ を与え, 確かに φ が V^* の元であること, および, 等式 $F(\varphi) = (\psi, \psi')$ の成立を示すこと.)

$\boxed{4}$ V を 有限次元実計量ベクトル空間 (内積空間) とし, $\langle u, v\rangle$ で 2 つのベクトル $u, v \in V$ の内積をあらわす. W を V の部分空間とし, W の全てのベクトルと直交するような V のベクトル全体を $W^\perp$ とおく:

$$W^\perp \coloneqq \{v \in V \mid \text{任意の } w \in W \text{ に対して } \langle v, w\rangle = 0\}.$$

(1) $W^\perp$ は V の部分空間であることを示せ.
(2) $w_1, \ldots, w_r$ を W の正規直交基底とする. このとき, $x \in V$ に対して

$$x - (c_1 w_1 + \cdots + c_r w_r) \in W^\perp$$

となるような実数 c_j $(j = 1, \ldots, r)$ を, 内積を用いて表せ.
(3) $v_1, \ldots, v_s$ を $W^\perp$ の任意の基底とするとき, $w_1, \ldots, w_r, v_1, \ldots, v_s$ は V の基底となることを示せ. また, これより $\dim V = \dim W + \dim W^\perp$ が成り立つことを結論せよ.