2022年度予備テスト

(2022年4月4日実施)

試験について

1. 試験終了時刻は黒板に記載する.
2. 座席表に従って着席すること.
3. 途中退室は試験開始後90分経過してから許可する.
4. 問題用紙1枚，答案用紙 (罫線あり)4枚，草稿用紙 (罫線なし)4枚.
5. 答案用紙の追加は認めない.
6. 答案用紙のみを回収する.
7. 各問3点満点の計12点満点であり，9点以上を合格とする.
8. 不正行為は決してしないこと.
9. 携帯電話の電源は切っておくこと.
10. 水分補給時を除きマスクを着用し，感染症対策に留意すること.
11. 体調が悪くなった場合は，速やかに申し出ること.

答案作成についての注意事項

1. 全ての答案用紙の左上に問題番号を，右上に学生番号と氏名を記入すること.
2. 答案は各問題について一枚を使用すること.
3. 答案用紙の裏面を使用してもよい．表面の最下行にその旨を明記すること.
4. 数学的論証の表現力も採点対象である．いきなり答案用紙に書くのではなく，草稿用紙でよく練ってから解答を書くこと.
5. 解答者の理解の正確さを示すことがこのテストの目的である．論証においては「明らかに」という表現は避け，要点を的確に記すこと.
6. もしも途中に解けない小問があっても，その結果を認めて後続の小問を解いてよい.

試験後の注意事項

1. 合否は，4月8日（金）までにNUCTを用いて連絡する予定.
2. 不合格のときは基礎演習クラスを受講せねばならない．基礎演習クラスは4月13日に開講する予定である.

$\boxed{1}$ $\mathbb{R}^2$ 上で定義された関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

について, 以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x,y)$ は原点において偏微分可能であることを示せ. また その偏微分係数 $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ も求めよ.

(2) 関数 $f(x,y)$ に対して,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-Ax-By}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

となる定数 A, B が存在することを示せ.

(3) $t \neq 0$ のときの $f_x(t,t)$ を求めよ. その結果を用いて x に関する偏導関数 $f_x(x,y)$ が原点で連続でないことを示せ.

$\boxed{2}$ 項別積分可能性及び項別微分可能性に関する, 以下の問いに答えよ.

(1) 一次元有界閉区間 $I = [a,b]$ 上のリーマン可積分関数族 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が, $n \to \infty$ の時, I 上のリーマン可積分関数 f に一様収束すれば, 項別積分できることを示せ. すなわち,

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\,dx = \int_I f(x)\,dx$$

が成り立つことを示せ. (ヒント: リーマン積分に関する三角不等式を用いる.)

(2) 一次元有界閉区間 $I = [a,b]$ 上の可積分関数族 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が, $n \to \infty$ の時, I 上の可積分関数 f に各点収束しているというだけでは, 必ずしも項別積分はできないこと, すなわち,

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\,dx = \int_I f(x)\,dx$$

は, 必ずしも成り立たないことを例をあげることにより示せ.

(3) $x \in (0,\infty)$ で定義された関数 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ は, $(0,\infty)$ で項別微分可能であること, すなわち,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-nx}$$

が $x \in (0,\infty)$ に対して成り立つことを示せ. (ヒント: 項別微分可能定理を用いよ. ここで, 項別微分可能定理とは以下のような定理である. 「一次元有界閉区間 $I = [a,b]$ 上定義された連続微分可能な関数族 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられているとする. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は, $n \to \infty$ のとき, $[a,b]$ 上の関数 f に $[a,b]$ 上各点収束しているとする. また, $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は, $n \to \infty$ の時, $[a,b]$ 上の関数 g に $[a,b]$ 上一様収束しているとする. この時, $f' = g$ が成り立つ.」)

$\boxed{3}$ P, Q を $PQ = QP$ を満たす n 次複素正方行列とし, P の固有値 λ に対する固有空間を W_λ とする. すなわち

$$W_\lambda = \{\, v \in \mathbb{C}^n \mid Pv = \lambda v \,\}$$

とする. このとき以下の問いに答えよ.

(1) W_λ は $\mathbb{C}^n$ の複素線形部分空間であることを示せ.

(2) $v \in \mathbb{C}^n$ に対し $f(v) = Qv$ とするとき, $f(W_\lambda) \subseteq W_\lambda$ であることを示せ.

(3) P の固有多項式が n 個の相異なる解をもつとき, P と Q を同時に対角化する基底が存在することを示せ. (ヒント: (2) より, $\dim W_\lambda = 1$ のとき $v \in W_\lambda$, $v \neq 0$ となる v は Q の固有ベクトルとなることに注意せよ.)

$\boxed{4}$ V を 3 次元実計量ベクトル空間であるとし, $u, v \in V$ の内積を $\langle u, v \rangle$ とする. また, v_1, v_2, v_3 を, V の長さ 1 のベクトルであって, 次の 2 つの条件を満たすようなものとする.

(i) v_1 と v_2 は 1 次独立.

(ii) $\langle v_1, v_3 \rangle = \langle v_2, v_3 \rangle = 0$.

このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) v_1, v_2, v_3 は一次独立であり, したがってまた V の基底であることを示せ.

以下

$$f(v) = v - 2\langle v, v_1 \rangle v_1 - 2\langle v, v_2 \rangle v_2$$

により定義される線形写像 $f : V \to V$ について考える.

(2) f の基底 v_1, v_2, v_3 に関する表現行列を求めよ.

(3) 関係式 $\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ が任意の $v, w \in V$ に対し成り立つことは, $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ であることと同値であることを示せ.