予備テスト　問題集

（2019 年 2 月改訂）

この問題集について

2017 年 8 月改訂版の問 10 と問 18 が新しい問題に差し替わり、また全体的に問題の順番が入れ替わっているので注意してください．2019 年 4 月に実施される予備テストでは, 4 問中 2 問がこの問題集 (2019 年 2 月改訂版) から出題されます．必ず合格できるようしっかり準備してください．合格基準は下にもあるとおり 12 点満点で 9 点以上が合格です．

試験に関する注意事項

(1) 試験時間 (3 時間) は黒板に記載する．
(2) 試験開始後, 1 時間半経過するまでは中途退出してはいけない．
(3) 問題用紙は両面 1 枚, 答案用紙は 4 枚, 草稿用紙は 4 枚である．そのうち, 答案用紙のみを回収する．他は持ち帰ること．
(4) 各問 3 点満点, 計 12 点満点とし, 9 点以上を合格とする．
(5) リラックスして自分の現在の力を十分に発揮すること．また, 不正行為は決してしないこと．
(6) 携帯電話の電源は切っておくこと．

答案作成に関する注意事項

(1) 各答案用紙の左上に問題番号, 右上に学生番号, 氏名を記入すること．
(2) 答案は問題毎 (原則として 1 枚以内) に作成すること．
(3) 裏面を使用するときは, 表面の最後にその旨を明記すること．
(4) 数学的論証の表現力も採点対象とする．いきなり答案用紙に書くのではなく, 草稿用紙でよく練ってから解答を書くこと．
(5) あなたが正確に理解しているかを示してもらうことがこのテストの目的であるので, 論証においては「明らかに」という表現は避け, 論証の要点を的確に記すこと．また, 解の導出においては導出過程の要点を的確に記すこと．
(6) もし途中に解けない小問があっても, その結果を認めて後続の小問を解いて構わない．

$\boxed{1}$ 正の実数 x に対して定義された実数値関数 $g(x)$ と実定数 a に対して, $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ を以下のように定義する.

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x > 0 \\ a, & x = 0 \\ g(-x), & x < 0 \end{cases}$$

以下の問いに答えよ.

(1)
$$g(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}, \quad x > 0$$
とする. このとき, $f(x)$ が $x = 0$ で連続になるように a の値を定めよ.

(2) (1) で定めた $f(x)$ について $f'(0)$ を求め, $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 全体で C^1-級となることを示せ.

(3) 以下の (i), (ii) を同時に満たす $g(x)$ の例を挙げ, そのことを説明せよ.

(i) $g(x)$ は $x > 0$ で <u>有界</u> かつ<u>連続</u> な関数.

(ii) a をどのような値に定めても, $f(x)$ は $x = 0$ で連続にならない.

$\boxed{2}$ 区間 I 上で定義された関数列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ が I 上で関数 f に一様収束するとは,

$$(*) \begin{cases} \text{任意の } \epsilon > 0 \text{ に対して，ある自然数 } N \text{ が存在して,} \\ n \geq N \text{ なる任意の自然数 } n \text{ と任意の } x \in I \text{ について,} \\ |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \text{ が成り立つ} \end{cases}$$

ことである. 以下の問いに答えよ.

(1) 区間 I 上で連続な実数値関数の列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ が, I 上の関数 f に一様収束しているならば, f もまた連続であることを示せ.
（ヒント：$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|$ を用いる.）

(2) $(0, 1)$ 上の関数列 $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ および関数 g を以下のように定義する.

$$g_n(x) = (1 - x) \sum_{k=0}^{n} x^k, \qquad g(x) = 1.$$

このとき以下の問いに答えよ.

(ア) $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ は $(0, 1)$ 上で g に各点収束することを ϵ-N 論法を用いて示せ.

(イ) $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ が区間 I 上で f に一様収束しないことの定義（つまり $(*)$ の否定）を ϵ-N 論法を用いて書き, それに基づいて $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ が $(0, 1)$ 上で g に一様収束しないことを示せ.

$\boxed{3}$ 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ が有界である (すなわち, ある正数 M が存在して, 任意の n に対して $|a_n| \leq M$ が成り立つ) とし, べき級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \cdots$$

を考える. 以下の問いに答えよ.

(1) $|x| < 1$ となる実数 x について級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束することを示せ.

(2) 開区間 $(-1, 1)$ 上の関数 f_N $(N = 1, 2, \ldots)$ および f を

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n, \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in (-1, 1)$$

によって定める. このとき $x \in (-1, 1)$ に対し

$$|f_N(x) - f(x)| \leq \frac{M|x|^{N+1}}{1 - |x|}$$

であることを示し, これを用いて任意の $R \in (0, 1)$ に対して, 閉区間 $[-R, R]$ 上で f_N は f に一様収束することを示せ.

(3) 関数 f は開区間 $(-1, 1)$ 上で連続であることを示せ.
(ヒント: ある区間上で連続関数の列がある関数に一様収束するとき, その区間で極限の関数も連続となることは証明せずに用いてよい. また, 多項式関数は連続であるということも証明せずに用いてよい.)

$\boxed{4}$ $\mathbb{R}^2$ 上で定義された関数

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^2} \cos \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

について, 以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x, y)$ は原点において偏微分可能であることを示せ. また その偏微分係数 $f_x(0, 0)$, $f_y(0, 0)$ も求めよ.

(2) 関数 $f(x, y)$ に対して,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - Ax - By}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

となる定数 A, B が存在することを示せ.

(3) $t \neq 0$ のときの $f_x(t, t)$ を求めよ. その結果を用いて x に関する偏導関数 $f_x(x, y)$ が原点で連続でないことを示せ.

$\boxed{5}$ f を開区間 $(0,1)$ 上で定義された関数とする. f が一様連続であるとは,

$$(*)\begin{cases} \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して, ある } \delta > 0 \text{ が存在して,} \\ |x-y| < \delta \text{ となるすべての } x, y \in (0,1) \text{ に対して,} \\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon \text{ が成り立つ} \end{cases}$$

ことである. 以下の問いに答えよ.

(1) f が微分可能であり, ある正数 M が存在して $|f'(x)| \leq M$ が任意の $x \in (0,1)$ に対して成り立つならば, f は一様連続であることを示せ.

(2) 一様連続な関数について, 次の事実が知られている:

(**)　「関数 f が開区間 $(0,1)$ で一様連続ならば,
閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数に拡張できる.」

この事実を示すために以下の (a),(b) を示せ.

(a) 数列 $\{f(\frac{1}{n})\}_{n=2}^{\infty}$ は有限の極限値を持つ.

(b) $f(0) = \lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n})$ とするとき, $\lim_{x\to 0+0} f(x) = f(0)$ である.

(これにより f は $[0,1)$ 上の連続関数に拡張出来る事が示される. さらに $f(1)$ を $f(0)$ と同様の方法で定義し, 上記の (b) の議論を $x \to 1-0$ に用いることにより, f が $[0,1]$ 上の連続関数に拡張されることが示される.)

$\boxed{6}$ $\mathbb{R}^n$ において, 点 $a \in \mathbb{R}^n$ の近傍で定義された実数値関数 f が a で連続であるとは,

$$(*)\begin{cases} \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して,} \\ x \in \mathbb{R}^n, \ \ \|x-a\| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon \\ \text{となる } \delta = \delta(a, \varepsilon) > 0 \text{ が存在する} \end{cases}$$

ことである. ただし, $\|\cdot\|$ は $\mathbb{R}^n$ のユークリッドノルムを表す. 以下の問いに答えよ.

(1) ある $a \in \mathbb{R}^n$ に対し条件 $(*)$ が成り立つとき, $\|y-a\| < \delta/2$ をみたす任意の $y \in \mathbb{R}^n$ について

$$x \in \mathbb{R}^n, \ \ \|x-y\| < \frac{\delta}{2} \implies |f(x) - f(y)| < 2\varepsilon$$

が成立することを示せ.

(2) 有界閉集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ の近傍で定義された実数値関数 f がすべての $a \in K$ において連続であるとする. このとき, f は K 上で一様連続であること, すなわち任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$x, y \in K, \ \ \|x-y\| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

となる $\delta > 0$ が存在することを示せ.

$\boxed{7}$ $\|\cdot\|$ を $\mathbb{R}^k$ のユークリッドノルムとする．$P \in \mathbb{R}^k$ と実数 $\delta > 0$ に対し，$B(P,\delta) := \{Q \in \mathbb{R}^k \,|\, \|Q-P\| < \delta\}$ とおく．$U \subset \mathbb{R}^k$ が開集合であるとは, 任意の点 $P \in U$ に対しある $\delta > 0$ が存在して $B(P,\delta) \subset U$ が成り立つときをいい，開集合の補集合を閉集合という．関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ のグラフを $G_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = f(x)\}$ で定義する．

(1) 「$x, y \in \mathbb{R}$, 実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ かつ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$ ならば $f(x) = y$」が常に成り立つことは, $G_f \subset \mathbb{R}^2$ が閉集合であることと同値であることを示せ.

(2) f が連続ならば G_f は $\mathbb{R}^2$ の閉集合であることを示せ.

(3) G_f が $\mathbb{R}^2$ の閉集合であっても f は連続とは限らないことを次の例で確かめよ:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

(注意: $G_f^+ := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = 1/x,\ x > 0\}$ について, $1/x$ は $x > 0$ で連続だから (2) より G_f^+ は閉集合という論証は誤り. (2) の仮定は $f \in C(\mathbb{R})$ であり, 例えば, $G_1^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = 1,\ x > 0\}$ がその反例となる.)

$\boxed{8}$ $\mathbb{R}$ 上の定数でない C^1 級の関数 f が, 1 を周期とする周期関数である (つまり任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x+1) = f(x)$ を満たす) とき, 以下の問いに答えよ.

(1) f は $\mathbb{R}$ 上の有界関数であることを示せ. (ヒント: f の閉区間 $[0,1]$ への制限を考えよ.)

(2) ある定数 $C > 0$ が存在して, 任意の実数 $N > M > 0$ に対して,

$$\left| \int_M^N \frac{f'(x)}{x}\,dx \right| \leq \frac{C}{M}$$

が成り立つことを示し, 積分

$$I = \int_1^{\infty} \frac{f'(x)}{x}\,dx$$

が収束することを確かめよ. (ヒント: 前半は部分積分を利用せよ. 後半はコーシーの収束条件を利用せよ.)

(3) 導関数 f' も周期 1 の周期関数となる. これを用いて, 任意の自然数 n に対して

$$\int_n^{(n+1)} \frac{|f'(x)|}{x}\,dx \geq \frac{1}{(n+1)} \int_0^1 |f'(x)|\,dx$$

が成り立つことを示せ. また, 積分 I が絶対収束しないことを示せ.

$\boxed{9}$ $a > b > 0$ を満たす定数 a, b に対し, $\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$f(x,y) = (ax^2 + by^2)e^{-x^2-y^2}$$

を定義する. 以下の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{\partial}{\partial x}f(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}f(x,y) = 0$ となる点を全て求めよ.

(2) $f(x,y)$ の極大値, 極小値およびそれらを与える点を全て求めよ.

(3) (2) で求めた $f(x,y)$ の極大値は実は最大値になっている. これを証明せよ. ただし, 「有界閉集合上の連続関数は必ず最大値を持つ」という命題は証明無しに用いてもよい.

$\boxed{10}$ 以下の問いに答えよ.

(1) 次の広義積分が収束するための実数 p の必要十分条件を求めよ.

$$\int_0^1 (1-x)^p \, dx$$

(2) 次の広義積分が収束することを示せ.

$$\int_0^1 \frac{1}{\{x(1-x)\}^{1/3}} \, dx$$

(3) 次の広義積分が収束しないことを示せ.

$$\int_1^\infty \frac{2 + \sin e^x}{x} \, dx$$

$\boxed{11}$ $\mathbb{C}$ ベクトル空間の線形写像 $f : V \to W$ に対し，

$$\mathrm{rank}\, f = \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Im}\, f)$$

で f の階数を定義する．$\mathbb{C}$ 上の $m \times n$ 行列 A に対し，線形写像 $f_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ を $f_A(x) = Ax$ で定義し，

$$\mathrm{rank}\, A = \mathrm{rank}(f_A)$$

で A の階数を定義する．この定義のもとに次の問いに答えよ．

(1) $\mathbb{C}$ 上の $m \times n$ 行列 A，m 次正則行列 P，n 次正則行列 Q に対し，$\mathrm{rank}(PAQ) = \mathrm{rank}\, A$ が成り立つことを示せ．

(2) $\mathbb{C}$ 上の $m \times n$ 行列 A が行と列の基本変形により

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

になったとする（ただし E_r は r 次単位行列，O は零行列）．このとき，$\mathrm{rank}\, A = r$ であることを示せ．

(3) $\mathbb{C}$ 上の $m \times n$ 行列 A に対し，$\mathrm{rank}({}^t\!A) = \mathrm{rank}\, A$ となることを示せ．

$\boxed{12}$ 実数を成分に持つ $m \times n$ 行列 A で定義される線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(v \mapsto Av)$ に対して, 等式

$$(*) \quad n = \mathrm{rank}\, A + \dim \mathrm{Ker}\, f$$

が成り立つことが知られている. 以下ではこの事実を確認しよう.

$e_1, \ldots, e_n$ を $\mathbb{R}^n$ の基本ベクトルとし, $v_1, \ldots, v_p$ を $\mathrm{Ker}\, f$ の基底とする. 行列 A の列ベクトルを $a_1, \ldots, a_n$ とし, $r = \mathrm{rank}\, A$ とおく. $\mathrm{rank}\, A$ は A の列ベクトルのうち 1 次独立なものの最大個数であるから, $a_1, \ldots, a_n$ の中から r 個の 1 次独立なベクトル

$$a_{i_1}, \ldots, a_{i_r} \quad (1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n)$$

を選ぶことができ, $\mathrm{rank}\, A = \dim \mathrm{Im} f$ である. 以下を証明せよ (これにより, $(*)$ は証明される).

(1) $e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}, v_1, \ldots, v_p \in \mathbb{R}^n$ は 1 次独立である.

(2) $i_1, \ldots, i_r$ のどれとも異なる i に対して, a_i は $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$ の 1 次結合で表すことができる.

(3) 任意の $v \in \mathbb{R}^n$ は $e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}, v_1, \ldots, v_p$ の 1 次結合で表される.

$\boxed{13}$ V, W を実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の部分空間とする. このとき, 和 $V+W$ および交わり $V\cap W$ も $\mathbb{R}^n$ の部分空間となり, 公式

$$(*)\quad \dim(V+W)=\dim V+\dim W-\dim(V\cap W)$$

が成立する. 以下, この公式を証明しよう. $\mathbb{R}^n$ の元 $u_1,\dots,u_l,\ v_1,\dots,v_r,\ w_1,\dots,w_s$ を

- $u_1,\dots,u_l$ は $V\cap W$ の基底
- $u_1,\dots,u_l,\ v_1,\dots,v_r$ は V の基底
- $u_1,\dots,u_l,\ w_1,\dots,w_s$ は W の基底

となるように選ぶとき, 次の二つの主張 (ア), (イ) が成り立つ:

(ア) $V+W$ の任意の元 x は, $u_1,\dots,u_l,\ v_1,\dots,v_r,\ w_1,\dots,w_s$ の線形結合で表される.

(イ) $u_1,\dots,u_l,\ v_1,\dots,v_r,\ w_1,\dots,w_s$ は 1 次独立である.

この (ア), (イ) より, $u_1,\dots,u_l,\ v_1,\dots,v_r,\ w_1,\dots,w_s$ は $V+W$ の基底をなすことが分かり, 公式 $(*)$ が得られる. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 上の主張 (ア), (イ) をそれぞれ証明せよ.

(2) $V\cup W$ は必ずしも $\mathbb{R}^n$ の部分空間とはならないことを $n=2$ の場合に例をあげて説明せよ.

$\boxed{14}$ $V=\mathbb{R}^n$ とおき, $f\colon V\to V$ を V 上の恒等的には 0 でない線型変換で, $f\circ f=f$ を満たすものとする. また, V 上の線型変換 g を

$$g(v)=v-f(v)\quad (v\in V)$$

により定める. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\operatorname{Im} g\subset \operatorname{Ker} f$ を示せ.

(2) $V=\operatorname{Im} f\oplus \operatorname{Ker} f$ を示せ.

(3) 整数 r $(1\le r\le n)$ と V の適当な基底 $v_1,\dots,v_n$ を選べば,

$$\begin{cases} f(v_i)=v_i & (i=1,\dots,r) \\ f(v_i)=0 & (i=r+1,\dots,n) \end{cases}$$

を満たすようにできることを示せ.

$\boxed{15}$ V を 有限次元実計量ベクトル空間 (内積空間) とし, $\langle u, v\rangle$ で 2 つのベクトル $u, v \in V$ の内積をあらわす. W を V の部分空間とする. また, W のすべてのベクトルと直交するような V のベクトル全体を $W^{\perp}$ とおく:

$$W^{\perp} = \{v \in V : \text{任意の } w \in W \text{ に対して } \langle v, w\rangle = 0\}.$$

このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $W^{\perp}$ は V の部分空間であることを示せ.

(2) $w_1, \ldots, w_r$ を W の正規直交基底とする. このとき, $x \in V$ に対して

$$x - (c_1 w_1 + \cdots + c_r w_r) \in W^{\perp}$$

となるような実数 c_j $(j = 1, \ldots, r)$ を, 内積を用いて表せ.

(3) $v_1, \ldots, v_s$ を $W^{\perp}$ の任意の基底とするとき, $w_1, \ldots, w_r, v_1, \ldots, v_s$ は V の基底となることを示せ. また, これより $\dim V = \dim W + \dim W^{\perp}$ が成り立つことを結論せよ.

$\boxed{16}$ P, Q を $PQ = QP$ を満たす n 次複素正方行列とし, P の固有値 λ に対する固有空間を W_λ とする. すなわち

$$W_\lambda = \{\, v \in \mathbb{C}^n \mid Pv = \lambda v \,\}$$

とする. このとき以下の問いに答えよ.

(1) W_λ は $\mathbb{C}^n$ の複素線形部分空間であることを示せ.

(2) $v \in \mathbb{C}^n$ に対し $f(v) = Qv$ とするとき，$f(W_\lambda) \subseteq W_\lambda$ であることを示せ.

(3) P の固有多項式が n 個の相異なる解をもつとき，P と Q を同時に対角化する基底が存在することを示せ.
（ヒント： (2) より, $\dim W_\lambda = 1$ のとき $v \in W_\lambda$, $v \neq 0$ となる v は Q の固有ベクトルとなることに注意せよ.)

$\boxed{17}$ ちょうど 2 つの固有値 λ_1, λ_2 $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ をもつ 3 次複素正方行列 A を考える. また, 固有値 λ_1, λ_2 に対する固有空間を, それぞれ W_1, W_2 とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 部分空間の和 $W_1 + W_2$ が直和 $W_1 \oplus W_2$ であることを示せ.

(2) $W_1 \oplus W_2 \neq \mathbb{C}^3$ となる行列 A の例を 1 つあげ, その行列 A に対して W_1, W_2 の基底を 1 つ求めよ. また, A が対角化可能かどうか, 答えのみ述べよ. ただし, λ_1, λ_2 は各自適当に選んでよい.

(3) $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{C}^3$ の場合, A は対角化可能である. その理由を説明せよ.

$\boxed{18}$ n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ に, 内積

$$\langle v, w\rangle = v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n, \quad v = {}^t(v_1, \ldots, v_n),\ w = {}^t(w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$$

が定まっているとし, $|v| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ $(v \in \mathbb{R}^n)$ とおく. n 次実正方行列 A が,

$$\text{任意の } v, w \in \mathbb{R}^n \text{ に対して } \langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle$$

を満たしているとする. また, $S = \{v \in \mathbb{R}^n \,;\, |v| = 1\}$ とおき, 関数 $f : S \to \mathbb{R}$ を

$$f(v) = \langle Av,\, v\rangle, \quad v \in S$$

によって定める. 以下の問いに答えよ.

(1) f は S 上で最大値をとる. このことが成り立つ理由を簡潔に述べよ.

問い (1) で得られた, f の S 上での最大値を λ とし, $f(e) = \lambda$ となるベクトル $e \in S$ をとる. また $V = \{v \in \mathbb{R}^n \,;\, \langle v, e\rangle = 0\}$ とおく. このとき, 任意の $v \in V$ と任意の実数 t に対して $e + tv \neq 0$ であるので,

$$u(t) = \frac{1}{|e + tv|}(e + tv) \in S$$

というベクトルを考えることができる.

(2) t の関数

$$\rho(t) = f(u(t)) = \langle Au(t), u(t)\rangle$$

の $t = 0$ における微分係数 $\rho'(0)$ を計算することによって, $\langle Ae, v\rangle = 0$ を示せ.

(3) 任意の $v \in V$ に対して $\langle Ae, v\rangle = 0$ となることから, $Ae = \lambda e$, つまり λ, e がそれぞれ A の固有値, 固有ベクトルであることを導け.

$\boxed{19}$ V を体 K 上のベクトル空間, W を V の部分空間とする. $v, v' \in V$ に対し

$$v \sim v' \iff v - v' \in W$$

で 2 項関係 $\sim$ を定義する. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\sim$ は同値関係であることを示せ.
(即ち, (i) 反射律 $v \sim v$, (ii) 対称律 $v \sim v' \Longrightarrow v' \sim v$, (iii) 推移律 $v \sim v'$, $v' \sim v'' \Longrightarrow v \sim v''$ の 3 つが成り立つことを示せ. ただし, W に関するどのような条件をどう使ったかわかるように書くこと.)

以下では, V の元の同値関係 $\sim$ による同値類の集合 $V/\sim$ を考える. また, $v \in V$ の同値類を $[v]$ $(\in V/\sim)$ と表す.

(2) V の元 v, v', w, w' が $v \sim v'$, $w \sim w'$ を満たすとき, 任意の K の元 α, β に対して $\alpha v + \beta w \sim \alpha v' + \beta w'$ であることを示せ.

これより, $[v]$, $[w] \in V/\sim$ と $\alpha, \beta \in K$ に対して $\alpha[v] + \beta[w] \in V/\sim$ を

$$\alpha[v] + \beta[w] = [\alpha v + \beta w]$$

により定めることができる. さらに, ここで定めた和とスカラー倍によって $V/\sim$ は K 上のベクトル空間になる. これを V の W による商ベクトル空間と呼び V/W と表す.

(3) V を有限次元とする. W の基底 $\langle e_1, e_2, \cdots, e_r \rangle$ を含む V の基底 $\langle e_1, \cdots, e_r, e_{r+1}, \cdots e_n \rangle$ をとる. このとき $\langle [e_{r+1}], \cdots, [e_n] \rangle$ は V/W の基底であることを示せ. (これより $\dim V = \dim W + \dim(V/W)$ であることがわかる.)

$\boxed{20}$ V を体 K 上の有限次元ベクトル空間とし, V から K への線形写像全体の集合を V^* で表す. $\varphi, \psi \in V^*$, $a \in K$ に対して, 和 $\varphi + \psi \in V^*$, スカラー倍 $a\varphi \in V^*$ を

$$(\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v), \quad (a\varphi)(v) = a(\varphi(v)) \quad (v \in V)$$

と定めることにより, V^* はベクトル空間となる.

以下, U, V を体 K 上の有限次元ベクトル空間, $f : U \to V$ を線形写像とし, 写像 $f^* : V^* \to U^*$ を

$$(f^*(\varphi))(u) = \varphi(f(u)) \quad (\varphi \in V^*, u \in U)$$

によって定義する. 以下の問いに答えよ.

(1) $f^*(\varphi) \in U^*$ であること, すなわち $f^*(\varphi) : U \to K$ が線形写像であることを示せ.
(2) f^* は線形写像であることを示せ.
(3) f が全射ならば, f^* は単射になることを証明せよ.