2012 年度予備テスト

(2012 年 4 月 9 日 (月))

試験に関する注意事項

(1) 試験時間 (3 時間) は黒板に記載する.
(2) 試験開始後, 1 時間半経過するまでは中途退出してはいけない.
(3) 問題用紙は両面 1 枚, 答案用紙は 4 枚, 草稿用紙は 4 枚である. そのうち, 答案用紙のみを回収する. 他は持ち帰ること.
(4) 各問 3 点満点, 計 12 点満点とし, 9 点以上を合格とする.
(5) リラックスして自分の現在の力を十分に発揮すること. また, 不正行為は決してしないこと.
(6) 携帯電話の電源は切っておくこと.

答案作成に関する注意事項

(1) 各答案用紙の左上に問題番号, 右上に学生番号, 氏名を記入すること.
(2) 答案は問題毎 (原則として 1 枚以内) に作成すること.
(3) 裏面を使用するときは, 表面の最後にその旨を明記すること.
(4) 数学的論証の表現力も採点対象とする. いきなり答案用紙に書くのではなく, 草稿用紙でよく練ってから解答を書くこと.
(5) あなたが正確に理解しているかを示してもらうことがこのテストの目的であるので, 論証においては「明らかに」という表現は避け, 論証の要点を的確に記すこと. また, 解の導出においては導出過程の要点を的確に記すこと.
(6) もし途中に解けない小問があっても, その結果を認めて後続の小問を解いて構わない.

試験後の注意事項

(1) 合否については, 4 月 12 日 (木) より多元数理科学研究科教育研究支援室にて確認することができる. 答案の返却も 4 月 12 日 (木) より教育研究支援室にて行う.
(2) 不合格となってしまった場合, 基礎演習クラスを受講する必要がある. 基礎演習クラスは 4 月 18 日 (水) のガイダンスより開始するので, 不合格者は必ず出席すること.

$\boxed{1}$ 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対して, f のグラフ G_f とは, 次で定義される $\mathbb{R}^2$ の部分集合である:

$$G_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}.$$

これについて, 以下の問いに答えよ.

(1) G_f が $\mathbb{R}^2$ 内の閉集合であることは, 次と同値であることを示せ:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ かつ } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y \text{ ならば } f(x) = y.$$

(2) f が連続ならば G_f は $\mathbb{R}^2$ の閉集合であることを示せ.

(3) G_f が $\mathbb{R}^2$ の閉集合であっても f は連続とは限らないことを次の例で確かめよ:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & (x\neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

$\boxed{2}$ $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ は $a<b$, $c<d$ をみたすとする. また, $C([a,b]\times[c,d])$ は直積区間 $[a,b]\times[c,d]$ 上の実数値連続関数の全体のなす集合を表すものとする.

(1) $f(x,t)\in C([a,b]\times[c,d])$ に対し関数 $F(t)$ を

$$F(t) = \int_a^b f(x,t)\,dx, \quad t\in[c,d]$$

で定める. コンパクト集合上の連続関数は一様連続であるという事実を利用して, $F(t)$ は $[c,d]$ 上で連続であることを示せ.

(2) $f(x,t)\in C([a,b]\times[c,d])$ がさらに変数 t に関して微分可能で $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\in C([a,b]\times[c,d])$ をみたすとき, (1) で定めた $F(t)$ について

$$F'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx, \quad t\in[c,d]$$

が成り立つことを示せ. (ヒント: $G(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$ とおき, $s\in[c,d]$ に対し $\int_c^s G(t)\,dt$ を計算せよ. この際, 連続関数の累次積分の積分順序を変えられることは認めてよい.)

(3) $t\geq 0$ に対し

$$H(t) = \left(\int_0^t e^{-x^2}\,dx\right)^2, \qquad I(t) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+x^2)t^2}}{1+x^2}\,dx$$

とおく. このとき $H(t)+I(t)$ が t に依らない定数であることを示し, この定数を求めよ.

$\boxed{3}$　$V = \mathbb{R}^N$ とおき, $f\colon V \to V$ を V 上の恒等的には 0 でない線型変換で, $f \circ f = f$ を満たすものとする. また, V 上の線型変換 g を

$$g(v) = v - f(v) \quad (v \in V)$$

により定める. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Ker}\, f$ を示せ.

(2) $V = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f$ を示せ.

(3) 整数 r $(1 \leq r \leq N)$ と V の適当な基底 $v_1, \ldots, v_N$ を選べば,

$$\begin{cases} f(v_i) = v_i & (i = 1, \ldots, r) \\ f(v_i) = 0 & (i = r+1, \ldots, N) \end{cases}$$

を満たすようにできることを示せ.

$\boxed{4}$　n は 2 以上の自然数とする. 実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の標準的な内積を $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n)$ で表す. また $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$ は $\boldsymbol{v}_i \in \mathbb{R}^n$ を第 i 列ベクトルとする行列を表すものとする. 以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \rangle \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$$

をみたす $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ が一意に存在することを示せ.

(2) (1) の $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{b}$ に対し

$$\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_i \rangle = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

が成り立つことを示せ.

(3) (1) において $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ が 1 次従属であることと $\boldsymbol{b}$ が零ベクトルであることは同値であることを示せ.