2011 年度予備テスト

(2011 年 4 月 8 日 (金))

試験に関する注意事項

(1) 試験時間 (3 時間) は黒板に記載する.

(2) 試験開始後, 1 時間半経過するまでは中途退出してはいけない.

(3) 問題用紙は両面 1 枚, 答案用紙は 4 枚, 草稿用紙は 4 枚である. そのうち, 答案用紙のみを回収する. 他は持ち帰ること.

(4) 各問 3 点満点, 計 12 点満点とし, 9 点以上を合格とする.

(5) リラックスして自分の現在の力を十分に発揮すること. また, 不正行為は決してしないこと.

(6) 携帯電話の電源は切っておくこと.

答案作成に関する注意事項

(1) 各答案用紙の左上に問題番号, 右上に学生番号, 氏名を記入すること.

(2) 答案は問題毎 (原則として 1 枚以内) に作成すること.

(3) 裏面を使用するときは, 表面の最後にその旨を明記すること.

(4) 数学的論証の表現力も採点対象とする. いきなり答案用紙に書くのではなく, 草稿用紙でよく練ってから解答を書くこと.

(5) あなたが正確に理解しているかを示してもらうことがこのテストの目的であるので, 論証においては「明らかに」という表現は避け, 論証の要点を的確に記すこと. また, 解の導出においては導出過程の要点を的確に記すこと.

(6) もし途中に解けない小問があっても, その結果を認めて後続の小問を解いて構わない.

試験後の注意事項

(1) 合否については, 4 月 12 日 (火) より多元数理科学研究科教育研究支援室にて確認することができる. 答案の返却も 4 月 12 日 (火) より教育研究支援室にて行う.

(2) 不合格となってしまった場合, 基礎演習クラスを受講する必要がある. 基礎演習クラスは 4 月 20 日 (水) のガイダンスより開始するので, 不合格者は必ず出席すること.

$\boxed{1}$ $\mathbb{R}$ 上の定数でない C^1 級の関数 f が, 1 を周期とする周期関数である (つまり任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x+1) = f(x)$ を満たす) とき, 以下の問いに答えよ.

(1) f は $\mathbb{R}$ 上の有界関数であることを示せ. (ヒント: f の閉区間 $[0,1]$ への制限を考えよ.)

(2) ある定数 $C > 0$ が存在して, 任意の実数 $N > M > 0$ に対して,

$$\left| \int_M^N \frac{f'(x)}{x}\, dx \right| \leq \frac{C}{M}$$

が成り立つことを示し, 積分

$$I = \int_1^\infty \frac{f'(x)}{x}\, dx$$

が収束することを確かめよ. (ヒント: 前半は部分積分を利用せよ. 後半はコーシーの収束条件を利用せよ.)

(3) 導関数 f' も周期 1 の周期関数となる. これを用いて, 任意の自然数 n に対して

$$\int_n^{(n+1)} \frac{|f'(x)|}{x}\, dx \geq \frac{1}{(n+1)} \int_0^1 |f'(x)|\, dx$$

が成り立つことを示せ. また, 積分 I が絶対収束しないことを示せ.

$\boxed{2}$ 3次元実空間 $\mathbb{R}^3$ 内の領域 $\Omega = \{(x,y,z) | x > 0, y > 0, z > 0, x+y+z < 1\}$ において、以下で定義された $\mathbb{R}^3$ への写像 $F : (x,y,z) \to (p,q,r)$

$$p = \frac{x}{x+y}, \quad q = \frac{x+y}{x+y+z}, \quad r = x+y+z$$

に関して次の問いに答えよ.

(1) $F(\Omega) = \{(p,q,r) \bigm| 0 < p,q,r < 1\}$ となることを示せ. （ヒント：x,y,z を p,q,r で書き表せ.）

(2) F の「逆写像」のヤコビ行列の行列式を求めよ.

(3) a,b,c を実数としたとき、積分

$$\int_\Omega x^a (x+y)^b (x+y+z)^c dxdydz$$

が収束するための必要十分条件を求め、さらにその時に取る値を求めよ.

$\boxed{3}$　V, W を実ベクトル空間 $\mathbb{R}^N$ の部分空間とする. このとき, 和 $V+W$ および交わり $V \cap W$ も $\mathbb{R}^N$ の部分空間となり, 公式

$$(*) \quad \dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$$

が成立する. 以下, この公式を証明しよう. $\mathbb{R}^N$ の元 $u_1, \ldots, u_l$, $v_1, \ldots, v_r$, $w_1, \ldots, w_s$ を

- $u_1, \ldots, u_l$ は $V \cap W$ の基底
- $u_1, \ldots, u_l$, $v_1, \ldots, v_r$ は V の基底
- $u_1, \ldots, u_l$, $w_1, \ldots, w_s$ は W の基底

となるように選ぶとき, 次の二つの主張 (ア), (イ) が成り立つ:

(ア) $V+W$ の任意の元 x は, $u_1, \ldots, u_l$, $v_1, \ldots, v_r$, $w_1, \ldots, w_s$ の線形結合（一次結合）で表される.

(イ) $u_1, \ldots, u_l$, $v_1, \ldots, v_r$, $w_1, \ldots, w_s$ は 線形独立（一次独立）である.

この (ア), (イ) より, $u_1, \ldots, u_l$, $v_1, \ldots, v_r$, $w_1, \ldots, w_s$ は $V+W$ の基底をなすことが分かり, 公式 $(*)$ が得られる. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 上の主張 (ア), (イ) をそれぞれ証明せよ.

(2) $V \cup W$ は必ずしも $\mathbb{R}^N$ の部分空間とはならないことを $N=2$ の場合に例をあげて説明せよ.

$\boxed{4}$　変数 x の 2 次以下の実数係数の多項式の全体を V とおく. V は実ベクトル空間となる. 多項式 $p(x) \in V$ に対し、

$$F\left(p(x)\right) = \frac{1}{x-2} \int_2^x t p'(t) dt$$

とおく. 次の問いに答えよ.

(1) V に属する任意の多項式 $p(x)$, $q(x)$ と任意の実数 a,b に対し

$$F\left(a \cdot p(x) + b \cdot q(x)\right) = a \cdot F\left(p(x)\right) + b \cdot F\left(q(x)\right)$$

が成り立つことを示せ. また、多項式 $p(x) \in V$ に対し $F\left(p(x)\right) \in V$ であることを示せ. (従って F は線形写像 $F : V \to V$ となる.)

(2) $1, x, x^2$ は V の基底となる. この基底に関して F の表現行列を求めよ.

(3) 多項式 $a + bx + cx^2$ が F の像に含まれるとき、a, b, c はどのような関係式をみたすか答えよ.