2010 年度予備テスト

(2010 年 4 月 8 日 (木))

試験に関する注意事項

(1) 試験時間 (3 時間) は黒板に記載する.

(2) 試験開始後, 1 時間半経過するまでは中途退出してはいけない.

(3) 問題用紙は両面 1 枚, 答案用紙は 4 枚, 草稿用紙は 4 枚である. そのうち, 答案用紙のみを回収する. 他は持ち帰ること.

(4) 各問 3 点満点, 計 12 点満点とし, 9 点以上を合格とする.

(5) リラックスして自分の現在の力を十分に発揮すること. また, 不正行為は決してしないこと.

(6) 携帯電話の電源は切っておくこと.

答案作成に関する注意事項

(1) 各答案用紙の左上に問題番号, 右上に学生番号, 氏名を記入すること.

(2) 答案は問題毎 (原則として 1 枚以内) に作成すること.

(3) 裏面を使用するときは, 表面の最後にその旨を明記すること.

(4) 数学的論証の表現力も採点対象とする. いきなり答案用紙に書くのではなく, 草稿用紙でよく練ってから解答を書くこと.

(5) あなたが正確に理解しているかを示してもらうことがこのテストの目的であるので, 論証においては「明らかに」という表現は避け, 論証の要点を的確に記すこと. また, 解の導出においては導出過程の要点を的確に記すこと.

(6) もし途中に解けない小問があっても, その結果を認めて後続の小問を解いて構わない.

試験後の注意事項

(1) 合否については, 4 月 12 日 (月) より多元数理科学研究科教育研究支援室にて確認することができる. 答案の返却も 4 月 12 日 (月) より教育研究支援室にて行う.

(2) 不合格となってしまった場合, 基礎演習クラスを受講する必要がある. 基礎演習クラスは 4 月 21 日 (水) のガイダンスより開始するので, 不合格者は必ず出席すること.

$\boxed{1}$　正の実数 x に対して定義された実数値関数 $g(x)$ と実定数 a に対して, $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ を以下のように定義する.

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x > 0 \\ a, & x = 0 \\ g(-x), & x < 0 \end{cases}$$

以下の問いに答えよ.

(1)
$$g(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}, \quad x > 0$$
とする. このとき, $f(x)$ が $x = 0$ で連続になるように a の値を定めよ.

(2) (1) で定めた $f(x)$ について $f'(0)$ を求め, $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 全体で C^1-級となることを示せ.

(3) 以下の (i), (ii) を同時に満たす $g(x)$ の例を挙げ, そのことを説明せよ.

(i) $g(x)$ は $x > 0$ で <u>有界</u> かつ <u>連続</u> な関数.

(ii) a をどのような値に定めても, $f(x)$ は $x = 0$ で連続にならない.

$\boxed{2}$　正実数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ は全ての $m,\ n \geq 0$ に対して

$$a_{m+n} \leq a_m + a_n$$

を満たしているとする. 以下の問いに答えよ.

(1) 数列 $\{\frac{a_n}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界であることを示せ.

(2) $m \geq n \geq 1$ とせよ. m を n で割って $m = qn + r$ (q は整数, $0 \leq r < n$) とかけたとするとき,
$$\frac{a_m}{m} \leq \frac{a_n}{n} + \frac{a_r}{m}$$
が成り立っていることを示せ.

(3) 数列 $\{\frac{a_n}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ が収束することを次の方針で示すために下線部を証明せよ（下線部以外の事実は証明なしで用いてよい）:
数列 $\{\frac{a_n}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ の有界性より下極限 $\liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ は必ず存在するので, これを α とおく. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $n > N \Rightarrow \frac{a_n}{n} > \alpha - \varepsilon$ が成り立つような N をとることができ, 一方 $\frac{a_n}{n} < \alpha + \varepsilon$ を満たす n は無限個存在する. 一般に収束する数列の極限は下極限に等しいから, 我々は $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \alpha$ を示せばよい. すなわち <u>任意の $\varepsilon_0 > 0$ について, $n > N_0 \Rightarrow$「$\frac{a_n}{n} < \alpha + \varepsilon_0$ かつ $\frac{a_n}{n} > \alpha - \varepsilon_0$」となる自然数 N_0 が必ずとれる</u> ことを確かめればよい.

$\boxed{3}$　A を 3 次実正方行列であって, 関係式 $A^3 = E$ を満たすようなものであるとする. ただし, E は単位行列を表すものとする. A が定める $\mathbb{C}^3$ 上の線形変換を考える.

(1) A の固有値は $1, \omega, \bar{\omega}$ のいずれかであることを示せ. ただし, $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ (i は虚数単位) とし, $\bar{z}$ は複素数 z の複素共役を表すものとする.

(2) $\omega, \bar{\omega}$ のうちの一方が A の固有値ならば, 他の一方も A の固有値であることを示せ.

(3) A の固有値は 1 のみであったとする. A のジョルダン標準形を考察することで, $A = E$ を示せ.

なお, (1), (2), (3) より容易に, A のジョルダン標準形は E, または $1, \omega, \bar{\omega}$ を対角成分にもつ対角行列であることが分かる.

$\boxed{4}$　V を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の n 次元ベクトル空間とし, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ をその基底とする. V^* を V から $\mathbb{C}$ への線型写像全体のなす集合とする. φ, $\varphi' \in V^*$, $a \in \mathbb{C}$ に対して

$$(\varphi + \varphi')(\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{v}) + \varphi'(\mathbf{v}), \quad (a\varphi)(\mathbf{v}) = a \cdot \varphi(\mathbf{v}) \quad (\mathbf{v} \in V)$$

と定めることにより, V^* は $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間になる. $f_1, \ldots, f_n$ を $f_i(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$ （δ_{ij} はクロネッカーのデルタ）により定まる V^* の元とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 任意の $\varphi \in V^*$ について $\varphi = \varphi(\mathbf{e}_1) f_1 + \cdots + \varphi(\mathbf{e}_n) f_n$ が成り立つことを示せ.

(2) $f_1, \ldots, f_n$ は一次独立であることを示せ.

(3) $f_1, \ldots, f_n$ は V^* の基底であることを示せ.