

2009 年度予備テスト

(2009 年 4 月 8 日(水))

試験に関する注意事項

- (1) 試験時間(3時間)は黒板に記載する.
- (2) 試験開始後, 1 時間半経過するまでは中途退出してはいけない.
- (3) 問題用紙は両面 1 枚, 答案用紙は 4 枚, 草稿用紙は 4 枚である. そのうち, 答案用紙のみを回収する. 他は持ち帰ること.
- (4) 各問 3 点満点, 計 12 点満点とし, 9 点以上を合格とする.
- (5) リラックスして自分の現在の力を十分に発揮すること. また, 不正行為は決してしないこと.
- (6) 携帯電話の電源は切っておくこと.

答案作成に関する注意事項

- (1) 各答案用紙の左上に問題番号, 右上に学生番号, 氏名を記入すること.
- (2) 答案は問題毎(原則として 1 枚以内)に作成すること.
- (3) 裏面を使用するときは, 表面の最後にその旨を明記すること.
- (4) 数学的論証の表現力も採点対象とする. いきなり答案用紙に書くのではなく, 草稿用紙でよく練ってから解答を書くこと.
- (5) あなたが正確に理解しているかを示してもらうことがこのテストの目的であるので, 論証においては「明らかに」という表現は避け, 論証の要点を的確に記すこと. また, 解の導出においては導出過程の要点を的確に記すこと.
- (6) もし途中で解けない小問があっても, その結果を認めて後続の小問を解いて構わない.

試験後の注意事項

- (1) 合否については, 4 月 10 日(金)より多元数理科学研究科教育研究支援室にて確認することができる. 答案の返却は 4 月 13 日(月)より教育研究支援室にて行う.
- (2) 不合格となってしまった場合, 基礎演習クラスを受講する必要がある. 基礎演習クラスは 4 月 15 日(水)のガイダンスより開始するので, 不合格者は必ず出席すること.

- 1 実定数 a に対して, 开区間 $(-1, 1)$ 上の関数 f を次のように定義する.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & -1 < x < 0 \text{ または } 0 < x < 1 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) $f(x)$ が $x = 0$ で連続となるように定数 a の値を定めよ.

以下では, a を (1) で求めた値とする.

- (2) $f(x)$ は $(-1, 1)$ 上微分可能であることを示せ.
 (3) $f(x)$ は $(-1, 1)$ 上一様連続であることを示せ.
 (ヒント: 平均値の定理を用いよ.)

- 2 以下の問いに答えよ.

- (1) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 上の微分可能な関数 $f(x, y)$ に対して

$$g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

とおく. このとき, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ を計算して $\frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial g}{\partial \theta}, r, \theta$ の式で表せ.

- (2) 問い (1) の記号を用いる. このとき

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^2$$

を示せ.

- (3) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ とし, $D \setminus \{(0, 0)\}$ 上の関数

$$f(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in D \setminus \{(0, 0)\}$$

を考える. また, $\alpha > 0$ とする. このとき, 広義積分

$$\iint_{D \setminus \{(0, 0)\}} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \right)^\alpha dx dy$$

の収束・発散を判定せよ.

3 ちょうど 2 つの固有値 λ_1, λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) をもつ 3 次複素正方行列 A を考える. また, 固有値 λ_1, λ_2 に対する固有空間を, それぞれ W_1, W_2 とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 部分空間の和 $W_1 + W_2$ が直和 $W_1 \oplus W_2$ であることを示せ.
- (2) $W_1 \oplus W_2 \neq \mathbb{C}^3$ となる行列 A の例を 1 つあげ, その行列 A に対して W_1, W_2 の基底を 1 つ求めよ. また, A が対角化可能かどうか, 答えのみ述べよ. ただし, λ_1, λ_2 は各自適当に選んでよい.
- (3) $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{C}^3$ の場合, A は対角化可能である. その理由を簡潔に説明せよ.

4 V を n 次元実計量ベクトル空間 (内積空間) とし, V の零ベクトルを 0 で表す. V 上の内積を $\langle x, y \rangle$ ($x, y \in V$) で表す. ベクトル $x, y \in V$ が

$$\langle x, y \rangle = 0$$

をみたしているとき, x と y は直交するという. k を自然数とし, V の 0 でないベクトル x_1, \dots, x_k が直交系をなす (互いに直交している) とき, 次の各問いに答えよ.

- (1) x_1, \dots, x_k は一次独立であることを示せ.
- (2) $k < n$ とし, x_1, \dots, x_k が張る部分空間を W_k とする. W_k に含まれないベクトル $v \in V$ を 1 つとり, ベクトル $x_{k+1} \in V$ を

$$x_{k+1} := v - \sum_{i=1}^k \frac{\langle v, x_i \rangle}{\langle x_i, x_i \rangle} x_i$$

と定める. このとき, $x_{k+1} \neq 0$ であることを確かめ, さらに x_1, \dots, x_k, x_{k+1} が直交系をなすことを示せ.

- (3) V が直交基底 (互いに直交するベクトルたちからなる基底) をもつことを示せ.