

2008 年度予備テスト

第 3 回 2008 年 12 月 6 日(土)

試験に関する注意事項

- (1) 試験時間(3 時間)は黒板に記載する。
- (2) 試験開始後, 1 時間半経過するまでは中途退出してはいけない。
- (3) 問題用紙は両面 1 枚, 答案用紙は 4 枚, 草稿用紙は 4 枚である。そのうち, 答案用紙のみを回収する。他は持ち帰ること。
- (4) 各問 3 点満点, 計 12 点満点とし, 9 点以上を合格とする。
- (5) リラックスして自分の現在の力を十分に発揮すること。また, 不正行為は決してしないこと。
- (6) 携帯電話の電源は切っておくこと。

答案作成に関する注意事項

- (1) 各答案用紙の左上に問題番号, 右上に学生番号, 氏名を記入すること。
- (2) 答案は問題毎(原則として 1 枚以内)に作成すること。
- (3) 裏面を使用するときは, 表面の最後にその旨を明記すること。
- (4) 数学的論証の表現力も採点対象とする。いきなり答案用紙に書くのではなく, 草稿用紙でよく練ってから解答を書くこと。
- (5) あなたが正確に理解しているかを示してもらうことがこのテストの目的であるので, 論証においては「明らかに」という表現は避け, 論証の要点を的確に記すこと。また, 解の導出においては導出過程の要点を的確に記すこと。
- (6) もし途中で解けない小問があっても, その結果を認めて後続の小問を解いて構わない。

試験後の注意事項

- (1) 合否については, 12 月 10 日(水)には多元数理科学研究科教育研究支援室にて確認することができる。答案の返却は 12 月 17 日(水)以降に教育研究支援室にて行う。
- (2) 不合格となってしまった場合, 次回の予備テストを受験する必要がある。次回は 4 月初めに行う予定である。次回予備テストの問題は, 少なくとも半数が予備テスト問題集(2008 年 10 月改訂版)の類題である。過去問および予備テスト問題集は, 多元数理のホームページより入手可能である。

1 区間 I 上で定義された関数列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ が I 上で関数 f に一様収束するとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、次の条件をみたす番号 N が存在するときに言う：

「 $n \geq N$ なる任意の自然数 n と任意の $x \in I$ について、 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ 」.

これについて以下の問いに答えよ.

(1) 开区間 $(0, 1)$ 上の連続関数列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ が $(0, 1)$ 上で関数 f に一様収束しているとき、 f もまた $(0, 1)$ 上の連続関数となることを示せ.

(2) $(0, 1)$ 上の関数 f および関数列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ を以下のように定義する.

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad f_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k.$$

このとき以下の (ア), (イ) を示せ.

(ア) $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ は $(0, 1)$ 上で $f(x)$ に各点収束する.

(イ) $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ は $(0, 1)$ 上で $f(x)$ に一様収束しない.

2 (1) 次の広義積分が収束するための実数 p の必要十分条件を求めよ .

$$\int_0^1 (1-x)^p dx.$$

(2) 次の広義積分が収束することを示せ .

$$\int_0^1 \frac{1}{\{x(1-x)\}^{1/3}} dx.$$

(3) 次の広義積分が収束しないことを示せ .

$$\int_1^{\infty} \frac{2 + \sin e^x}{x} dx.$$

3 A を 3 次実正方行列であって, 関係式 $A^3 = E$ を満たすようなものであるとする. ただし, E は単位行列を表すものとする. A が定める \mathbb{C}^3 上の線形変換を考える.

- (1) A の固有値は $1, \omega, \bar{\omega}$ のいずれかであることを示せ. ただし, $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ (i は虚数単位) とし, \bar{z} は複素数 z の複素共役を表すものとする.
- (2) $\omega, \bar{\omega}$ のうち的一方が A の固有値ならば, 他的一方も A の固有値であることを示せ.
- (3) A の固有値は 1 のみであったとする. A のジョルダン標準形を考察することで, $A = E$ を示せ.

なお, (1),(2),(3) より容易に, A のジョルダン標準形は E , または $1, \omega, \bar{\omega}$ を対角成分にもつ対角行列であることが分かる.

4 V を実線型空間とする. u_1, \dots, u_m を V のベクトルとし, u_1, \dots, u_m が生成する V の線形部分空間を W で表す. このとき次の各問いに答えよ.

- (1) $n \geq m + 1$ とする. $m \times n$ 行列 A に対して, 連立 1 次方程式

$$Ax = 0 \quad x = {}^t(x_1, \dots, x_n)$$

が自明でない解 x を持つことを用いて, W に属する n 個のベクトル v_1, \dots, v_n は必ず 1 次従属であることを示せ.

- (2) u_1, \dots, u_m の中から r 個の 1 次独立なベクトル u_{i_1}, \dots, u_{i_r} を任意に取る. このとき

$$r \leq \dim W$$

を示せ. ただし W の次元 $\dim W$ とは, W の基底をなすベクトルの個数のことをいう. また, 基底をなすベクトルの個数が基底の取り方によらないことは認めてよい.

- (3) u_1, \dots, u_m の中に存在しうる 1 次独立なベクトルの個数の最大値は $\dim W$ に等しいことを示せ.