2008 年度予備テスト
第 2 回 2008 年 7 月 26 日(土)

試験に関する注意事項

(1) 試験時間 (3 時間) は黒板に記載する.

(2) 試験開始後, 1 時間半経過するまでは中途退出してはいけない.

(3) 問題用紙は両面 1 枚, 答案用紙は 4 枚, 草稿用紙は 4 枚である. そのうち, 答案用紙のみを回収する. 他は持ち帰ること.

(4) 各問 3 点満点, 計 12 点満点とし, 9 点以上を合格とする.

(5) リラックスして自分の現在の力を十分に発揮すること. また, 不正行為は決してしないこと.

(6) 携帯電話の電源は切っておくこと.

答案作成に関する注意事項

(1) 各答案用紙の左上に問題番号, 右上に学生番号, 氏名を記入すること.

(2) 答案は問題毎 (原則として 1 枚以内) に作成すること.

(3) 裏面を使用するときは, 表面の最後にその旨を明記すること.

(4) 数学的論証の表現力も採点対象とする. いきなり答案用紙に書くのではなく, 草稿用紙でよく練ってから解答を書くこと.

(5) あなたが正確に理解しているかを示してもらうことがこのテストの目的であるので, 論証においては「明らかに」という表現は避け, 論証の要点を的確に記すこと. また, 解の導出においては導出過程の要点を的確に記すこと.

(6) もし途中に解けない小問があっても, その結果を認めて後続の小問を解いて構わない.

試験後の注意事項

(1) 合否については, 7 月 30 日 (水) には多元数理科学研究科教育研究支援室にて確認することができる. 答案の返却は 8 月 6 日 (水) 以降に教育研究支援室にて行う.

(2) 不合格となってしまった場合, 次回の予備テストを受験する必要がある.

$\boxed{1}$ $\mathbb{R}^2$ 上で定義された関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2(x^3+y)}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

について, 以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x,y)$ は原点において任意の方向に方向微分可能である, つまり, $(0,0)$ でない任意のベクトル $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ に対して, 関数

$$g(t)=f(at,bt)$$

が $t=0$ で微分可能であることを示せ. また $g'(0)$ を a, b を用いて表せ.

(2) 関数 $f(x,y)$ に対して,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-Ax-By}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

となる定数 A, B は存在しないことを示せ.

(3) 関数 $f(x,y)$ は原点 $(0,0)$ で連続かどうか, 理由を添えて答えよ.

$\boxed{2}$ $\mathbb{R}$ 上の定数でない C^1 級の関数 f が, 1 を周期とする周期関数である (つまり任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して $f(x+1)=f(x)$ を満たす) とき, 以下の問いに答えよ.

(1) f は $\mathbb{R}$ 上の有界関数であることを示せ. (ヒント. f の閉区間 $[0,1]$ への制限を考えよ.)

(2) ある定数 $C>0$ が存在して, 任意の実数 $N>M>0$ に対して,

$$\left|\int_M^N \frac{f'(x)}{x}\,dx\right|\leq\frac{C}{M}$$

が成り立つことを示し, 積分

$$I=\int_1^\infty\frac{f'(x)}{x}\,dx$$

が収束することを確かめよ. (ヒント. 前半は部分積分を利用せよ. 後半はコーシーの収束条件を利用せよ.)

(3) 導関数 f' も周期 1 の周期関数となる. これを用いて, 任意の自然数 n に対して

$$\int_n^{(n+1)}\frac{|f'(x)|}{x}\,dx\geq\frac{1}{(n+1)}\int_0^1|f'(x)|\,dx$$

が成り立つことを示せ. また, 積分 I が絶対収束しないことを示せ.

$\boxed{3}$　$V=\mathbb{R}^N$ とおき, $f\colon V\to V$ を V 上の恒等的には 0 でない線型変換で, $f\circ f=f$ を満たすものとする. また, V 上の線型変換 g を

$$g(v)=v-f(v)\quad(v\in V)$$

により定める. このとき, 次の各問に答えよ.

(1) $\operatorname{Im} g\subset \operatorname{Ker} f$ を示せ.

(2) $V=\operatorname{Im} f\oplus\operatorname{Ker} f$ を示せ.

(3) 整数 r $(1\le r\le N)$ と V の適当な基底 $v_1,\dots,v_N$ を選べば,

$$\begin{cases} f(v_i)=v_i & (i=1,\dots,r)\\ f(v_i)=0 & (i=r+1,\dots,N)\end{cases}$$

を満たすようにできることを示せ.

$\boxed{4}$　次の各問いに答えよ.

(1) $\mathbb{R}^3$ の基底 $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$ からシュミットの直交化法によって正規直交基底をつくれ.

(2) 行列 $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&2\\0&1&3\end{pmatrix}$ を直交行列 U と上三角行列 T の積 UT として表せ.

(3) 一般に実数を成分とする正則行列 A は直交行列 U と上三角行列 T の積として $A=UT$ と表されることを示せ.