

2007 年度予備テスト 第 1 回 2007 年 4 月 7 日(土)

試験に関する注意事項

- (1) 試験時間(3 時間)は黒板に記載する。
- (2) 試験開始後, 1 時間半経過するまでは中途退出してはいけない。
- (3) 問題用紙は両面 1 枚, 答案用紙は 4 枚, 草稿用紙は 4 枚である。そのうち, 答案用紙のみを回収する。他は持ち帰ること。
- (4) 各問 3 点満点, 計 12 点満点とし, 9 点以上を合格とする。
- (5) リラックスして自分の現在の力を十分に発揮すること。また, 不正行為は決してしないこと。
- (6) 携帯電話の電源は切っておくこと。

答案作成に関する注意事項

- (1) 各答案用紙の左上に問題番号, 右上に学生番号, 氏名を記入すること。
- (2) 答案は問題毎(原則として 1 枚以内)に作成すること。
- (3) 裏面を使用するときは, 表面の最後にその旨を明記すること。
- (4) 数学的論証の表現力も採点対象とする。いきなり答案用紙に書くのではなく, 草稿用紙でよく練ってから解答を書くこと。
- (5) あなたが正確に理解しているかを示してもらうことがこのテストの目的であるので, 論証においては「明らかに」という表現は避け, 論証の要点を的確に記すこと。また, 解の導出においては導出過程の要点を的確に記すこと。
- (6) もし途中で解けない小問があっても, その結果を認めて後続の小問を解いて構わない。

試験後の注意事項

- (1) 合否については, 4 月 10 日(火)には多元数理科学研究科事務室にて確認することができる。答案の返却は 4 月 13 日(金)以降に事務室にて行う。
- (2) 不合格となってしまった場合, 次回の予備テストを受験する必要がある。次回は 7 月末(あるいは 8 月初)に行う予定である。各予備テストの問題は, 少なくとも半数が予備テスト問題集の類題である。問題集は, 多元数理のホームページより入手可能であるが, 各試験の一か月前までに改訂される可能性があるので注意すること。

□1 f を开区間 $(0, 1)$ 上で定義された実数値関数とする. f が $(0, 1)$ 上で一様連続であるとは,

「任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, $|x - y| < \delta$ となるすべての $x, y \in (0, 1)$ に対して, $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ が成り立つ」

ことである. 以下の問いに答えよ.

(1) f が开区間 $(0, 1)$ 上で一様連続でないことの定義 (つまり上記の命題の否定) を $\epsilon - \delta$ 論法を用いて書け.

(2) (1) に基づいて $f(x) = \frac{1}{x}$ が $(0, 1)$ 上で一様連続でないことを示せ.

(3) 次の命題を証明せよ.

「开区間 $(0, 1)$ 上で一様連続な実数値関数の列 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ が, $(0, 1)$ 上の関数 g に一様収束しているならば, g もまた一様連続である。」

□2 指数関数 e^x に対する Taylor の公式を用いることにより, e の近似値の誤差評価ができる. これについて, 以下の問いに答えよ.

(1) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$(*) \quad e^x = \sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!} + \frac{1}{n!} \int_0^x e^t (x-t)^n dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

が成り立つことを, 自然数 n に関する数学的帰納法によって証明せよ.

(2) $x \geq 0$ に対して

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \int_0^x e^t (x-t)^n dt \leq e^x \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

が成立することを示せ.

(3) 次の条件をみたす自然数 N を, 理由を付して一つ求めよ.

「 N 以上のすべての自然数 n に対して,

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \right| < 10^{-2}$$

が成立する。」

ただし, $e < 3$ であることは用いてよい.

□3 A を 3 次実正方行列であって, 関係式 $A^3 = E$ を満たすようなものであるとする. ただし, E は単位行列を表すものとする.

(1) A の固有値は $1, \omega, \bar{\omega}$ のいずれかであることを示せ. ただし, $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ (i は虚数単位) とし, \bar{z} は複素数 z の複素共役を表すものとする.

(2) $\omega, \bar{\omega}$ のうちの一方が A の固有値ならば, 他の一方も A の固有値であることを示せ.

(3) A の固有値は 1 のみであったとする. A のジョルダン標準形を考察することで, $A = E$ を示せ.

なお, (1),(2),(3) より容易に, A のジョルダン標準形は E , または $1, \omega, \bar{\omega}$ を対角成分にもつ対角行列であることが分かる.

□4 V, W を実ベクトル空間 \mathbb{R}^N の部分空間とする. このとき, 和 $V + W$ および交わり $V \cap W$ も \mathbb{R}^N の部分空間となり, 公式

$$(*) \quad \dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$$

が成立する. 以下, この公式を証明しよう. \mathbb{R}^N の元 $u_1, \dots, u_l, v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s$ を

- u_1, \dots, u_l は $V \cap W$ の基底
- $u_1, \dots, u_l, v_1, \dots, v_r$ は V の基底
- $u_1, \dots, u_l, w_1, \dots, w_s$ は W の基底

となるように選ぶとき, 次の二つの主張 (ア), (イ) が成り立つ:

(ア) $V + W$ の任意の元 x は, $u_1, \dots, u_l, v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s$ の線形結合で表される.

(イ) $u_1, \dots, u_l, v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s$ は 1 次独立である.

この (ア), (イ) より, $u_1, \dots, u_l, v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s$ は $V + W$ の基底をなすことが分かり, 公式 (*) が得られる.

このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 上の主張 (ア), (イ) をそれぞれ証明せよ.
- (2) $V \cup W$ は必ずしも \mathbb{R}^N の部分空間とはならないことを $N = 2$ の場合に例をあげて説明せよ.