2005年度予備テスト
第3回 2005年12月3日(土)

試験に関する注意事項

(1) 試験時間 (3時間) は黒板に記載する.
(2) 試験開始後, 1時間半経過するまでは中途退出してはいけない.
(3) 問題用紙は両面1枚, 答案用紙は4枚, 草稿用紙は4枚である. そのうち, 答案用紙のみを回収する. 他は持ち帰ること.
(4) 各問3点満点, 計12点満点とし, 9点以上を合格とする.
(5) リラックスして自分の現在の力を十分に発揮すること. また, 不正行為は決してしないこと.
(6) 携帯電話の電源は切っておくこと.

答案作成に関する注意事項

(1) 各答案用紙の左上に問題番号, 右上に学生番号, 氏名を記入すること.
(2) 答案は問題毎 (原則として1枚以内) に作成すること.
(3) 裏面を使用するときは, 表面の最後にその旨を明記すること.
(4) 数学的論証の表現力も採点対象とする. いきなり答案用紙に書くのではなく, 草稿用紙でよく練ってから解答を書くこと.
(5) あなたが正確に理解しているかを示してもらうことがこのテストの目的であるので, 論証においては「明らかに」という表現は避け, 論証の要点を的確に記すこと. また, 解の導出においては導出過程の要点を的確に記すこと.
(6) もし途中に解けない小問があっても, その結果を認めて後続の小問を解いて構わない.

試験後の注意事項

(1) 合否については, 12月8日 (木) の午後には多元数理科学研究科事務室にて確認することができる. 答案については後日返却する.
(2) 不合格となってしまった場合, 次回の予備テストを受験する必要がある. 次回は4月初めに行う予定である.

$\boxed{1}$　$f(x)$ は閉区間 $[0,1]$ 上で定義された C^2 級の関数とする. 任意の $x \in [0,1]$ に対して $f''(x) > 0$ が満たされ, $f(1) < 0 < f(0)$ と仮定する. このとき,

(1) $0 \leq a < x \leq 1$ に対して, 次の不等式を示せ:

$$f(x) > f(a) + (x-a)f'(a).$$

(注) これより, $f(a) > 0$ ならば, $x = 1$ として $f'(a) < 0$ となる.

方程式 $f(x) = 0$ の解を近似的に求めるために, 次の様に数列 $\{x_n\}$ を構成する. 以下の各問に答えよ.

(2) $x_0 = 0$ とおく. $n \geq 0$ に対して, $f(x_n) > 0$ となる $x_n \in [0,1)$ が定義されているとき,

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

とおく. このとき, $x_n < x_{n+1} < 1$ かつ $f(x_{n+1}) > 0$ を示せ.

(ヒント. $a = x_n$ として, (1) を用いよ.)

(3) 数列 $\{x_n\}_{n \geq 0}$ は, $f(c) = 0$ をみたすある実数 $c \in [0,1]$ に収束することを示せ.

$\boxed{2}$　$\mathbb{R}^2$ 内の有界閉集合 K に対して, K の面積を $|K|$ と書く : $|K| = \int_K dxdy$.

$|K| > 0$ のとき, $\mathbb{R}^2$ 内の点 $\mathbf{b}^K = (x^K, y^K)$ を

$$x^K = \frac{1}{|K|}\int_K xdxdy, \qquad y^K = \frac{1}{|K|}\int_K ydxdy$$

とおく (点 $\mathbf{b}^K$ は K の重心と呼ばれている). このとき, 以下の各問に答えよ.

(1) $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : x^2 + y^2 \leq 1\}$ に対して, $\mathbf{b}^K$ を求めよ.

(2) $a > 0$, $-a < b < a$, 及び $c > 0$ となる実数 a, b, c を取る. $K \subseteq \mathbb{R}^2$ を 3 点 $(a,0)$, $(-a,0)$, (b,c) で定まる三角形の周上及びその内部とする. このとき, $\mathbf{b}^K$ の x 座標 x^K を計算せよ.

(3) $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を 2 次正則行列とする. 線形変換 $\varphi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$\varphi(x,y) = (ax + by, cx + dy)$$

により定める. このとき,

$$\mathbf{b}^{\varphi(K)} = \varphi(\mathbf{b}^K) \quad \text{すなわち,} \quad \begin{cases} x^{\varphi(K)} &= ax^K + by^K \\ y^{\varphi(K)} &= cx^K + dy^K \end{cases}$$

となることを示せ.

$\boxed{3}$ V を実数係数の 1 変数多項式全体のなす実ベクトル空間とする. V の空でない部分集合 B が 1 次独立であるとは, B の任意有限個の相異なる元 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_s$ が（通常の意味で）1 次独立であること, すなわち,

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_s\boldsymbol{v}_s = 0 \ (c_i \in \mathbb{R}) \Longrightarrow c_1 = \cdots = c_s = 0$$

を満たすことと定める. このとき, 以下の各問に答えよ.

(1) $B = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が有限集合のとき, B が上の意味で 1 次独立であることと, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立であることとは同値であることを示せ.

以下, $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots\}$ を V の 1 次独立な部分集合のうち包含関係に関して極大なものとしよう.

(2) $\boldsymbol{v} \notin B$ に対して, $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}$, $B' = B \cup \{\boldsymbol{v}_0\}$ とおく. このとき, B' の有限個の相異なる元 $\boldsymbol{v}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_r}$ とすべてが 0 でない実数の組 $c_{i_1}, \ldots, c_{i_r}$ が存在して

$$c_{i_1}\boldsymbol{v}_{i_1} + \cdots + c_{i_r}\boldsymbol{v}_{i_r} = 0$$

が成り立つことを示せ.

(3) V の任意の元は, B に含まれる元の有限個の 1 次結合の形に書けることを示せ.

$\boxed{4}$ 「任意の実対称行列 A に対して, 適当な実直交行列 S を取れば, ${}^tSAS$ を対角行列にすることができる. 」

この事実を A が 3 次実対称行列の場合に確認してみよう. 以下では, A の固有値 λ に対して, その固有空間を $W(\lambda) = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^3 : (A - \lambda E_3)\boldsymbol{v} = 0\}$ とおく. また, $V = \mathbb{C}^3$ における内積を $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \sum_{i=1}^3 v_i\overline{w_i}$ ($\overline{z}$ は z の共役複素数) により定める.

(1) 任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ に対して,

$$(*) \qquad \langle A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, A\boldsymbol{w} \rangle$$

が成り立つことを示せ.

以下, A は固有値 λ, λ, μ (λ と μ は相異なる実数) を持つと仮定する. このとき, 直和分解 $V = W(\lambda) \oplus W(\mu)$ が存在することが知られている. 以下の問いに答えよ.

(2) $(*)$ を用いて, $W(\lambda)$ と $W(\mu)$ は互いの直交補空間であることを示せ.

(3) ${}^tSAS$ が対角行列になるような実直交行列 S の列ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ をどのように取れば良いかを説明せよ.