

2005年度予備テスト 第1回 2005年4月4日(月)

試験に関する注意事項

- (1) 試験時間(3時間)は黒板に記載する。
- (2) 試験開始後、1時間半経過するまでは中途退出してはいけない。
- (3) 問題用紙は両面1枚、答案用紙は4枚、草稿用紙は4枚である。そのうち、答案用紙のみを回収する。他は持ち帰ること。
- (4) 各問3点満点、計12点満点とし、9点以上を合格とする。
- (5) リラックスして自分の現在の力を十分に発揮すること。また、不正行為は決してしないこと。
- (6) 携帯電話の電源は切っておくこと。

答案作成に関する注意事項

- (1) 各答案用紙の左上に問題番号、右上に学生番号、氏名を記入すること。
- (2) 答案は問題毎(原則として1枚以内)に作成すること。
- (3) 裏面を使用するときは、表面の最後にその旨を明記すること。
- (4) 数学的論証の表現力も採点対象とする。いきなり答案用紙に書くのではなく、草稿用紙でよく練ってから解答を書くこと。
- (5) あなたが正確に理解しているかを示してもらうことがこのテストの目的であるので、論証においては「明らかに」という表現は避け、論証の要点を的確に記すこと。また、解の導出においては導出過程の要点を的確に記すこと。
- (6) もし途中で解けない小問があっても、その結果を認めて後続の小問を解いて構わない。

試験後の注意事項

- (1) 合否については、4月5日(火)の午後には多元数理科学研究科事務室にて確認することができる。答案については講評をつけて後日返却する。
- (2) 不合格となってしまった場合、次回の予備テストを受験する必要がある。次回は8月初めに行う予定である。

1 閉区間 $[0, 1]$ 上で定義された関数列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ が関数 u に $[0, 1]$ 上で一様収束するとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、次の条件をみたす番号 N が存在するときに言う：

「 $n \geq N$ なる任意の自然数 n と任意の $x \in [0, 1]$ について、 $|u_n(x) - u(x)| < \varepsilon$ 」.

これについて次の各問に答えよ.

(1) u_n ($n = 1, 2, \dots$) と u をいずれも閉区間 $[0, 1]$ 上で定義された関数とする. 関数列 $\{u_n\}$ が関数 u に $[0, 1]$ 上で一様収束するためには,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, 1]} |u_n(t) - u(t)| = 0$$

が成り立つことが必要十分であることを示せ.

(2) $[0, 1]$ 上の連続関数 v と $x \in [0, 1]$ について次が成り立つことを示せ：

$$\left| \int_0^x v(t) dt \right| \leq \sup_{t \in [0, 1]} |v(t)|.$$

(3) f_n ($n = 1, 2, \dots$) と f をいずれも $[0, 1]$ を含むある开区間上の C^1 -級関数とし,

(a) $\{f'_n\}$ は f' に $[0, 1]$ 上で一様収束する (ただし v' は v の導関数を表す),

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = f(0)$,

と仮定する. このとき, $\{f_n\}$ は f に $[0, 1]$ 上で一様収束することを示せ.

(ヒント. 問題 (2) の不等式を $v = f'_n - f'$ として利用せよ.)

2 f を以下で定義される \mathbb{R}^2 上の関数とする：

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \text{ のとき,} \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \text{ のとき.} \end{cases}$$

このとき, 次の各問に答えよ.

(1) f は原点で連続であることを示せ.

(2) f の偏微分係数 $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ が存在することを示し, f の偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ が原点で連続であるかどうか理由を付けて答えよ.

(3) 次の \mathbb{R}^3 内の有界閉集合 D の体積を求めよ:

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

3] $V = \mathbb{R}^n$ を n 次元実数ベクトル空間とし, V 上の内積を,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \mathbf{x} = {}^t(x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = {}^t(y_1, \dots, y_n) \in V$$

により定める. 0 でないベクトル \mathbf{x}, \mathbf{y} が $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ をみたすとき, \mathbf{x} と \mathbf{y} は直交していると言う. このとき, 正の整数 k に対して次の各問に答えよ.

- (1) V の 0 でないベクトル $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ が直交系をなす (互いに直交している) とき, $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ は線形独立であることを示せ.
- (2) $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ を (必ずしも直交系をなすとは限らない) 線形独立なベクトルとし, それらが張る部分空間を W_k とする. $k < n$ のとき, W_k に含まれないベクトル \mathbf{v} を取れば, $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{v}$ は線形独立であることを示せ.
- (3) $k < n$ とする. 問題 (2) において $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ が直交系をなすと仮定し, W_k に含まれないベクトル \mathbf{v} を取る. このとき 0 でないベクトル \mathbf{x}_{k+1} を, $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{v}$ が張る部分空間から選び, $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}$ が直交系をなすようにできることを示せ.
(ベクトル \mathbf{x}_{k+1} が 0 でないことを確認すること.)

4] $V = \mathbb{C}^n$ を n 次元複素数ベクトル空間とし, $f: V \rightarrow V$ を V 上の線形変換で, $f^2 = 0, f \neq 0$ をみたすものとする. $K = \text{Ker } f$ とおき, W を

$$V = K \oplus W$$

をみたす部分空間とする. $r = \dim_{\mathbb{C}} W$ とおくとき, 次の各問に答えよ.

- (1) f の W への制限 $f|_W: W \rightarrow V$ は単射であることを示せ.
- (2) $f(W) \subset K$ を示し, $2r \leq n$ を導け.
- (3) $f(W) = K$ のとき, $2r = n$ である. このとき V の基底 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ で, これに関する f の表現行列が

$$\begin{bmatrix} \mathbb{O}_r & \mathbb{O}_r \\ E_r & \mathbb{O}_r \end{bmatrix}$$

となるものが存在することを示せ. ただし, \mathbb{O}_r は r 次の零行列, E_r は r 次の単位行列を表す.

($\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ をどのように取れば良いかが分かるように解答すること.)