2004年度予備テスト
第3回 2004.12.4

試験に関する注意事項

(1) 試験時間 (3 時間) は黒板に記載する.
(2) 試験開始後, 1 時間半経過するまでは中途退出してはいけない.
(3) 問題用紙は両面 1 枚, 答案用紙は 4 枚, 草稿用紙は 4 枚である. そのうち, 答案用紙のみを回収する. 他は持ち帰ること.
(4) 各問 3 点満点, 計 12 点満点とし, 9 点以上を合格とする.
(5) リラックスして自分の現在の力を十分に発揮すること. また, 不正行為は決してしないこと.
(6) 携帯電話の電源は切っておくこと.

答案作成に関する注意事項

(1) 各答案用紙の左上に問題番号, 右上に学生番号, 氏名を記入すること.
(2) 答案は問題毎 (原則として 1 枚以内) に作成すること.
(3) 裏面を使用するときは, 表面の最後にそれを明記すること.
(4) 数学的論証の表現力も採点対象とする. いきなり答案用紙に書くのではなく, 草稿用紙でよく練ってから解答を書くこと.
(5) あなたが正確に理解しているかを示してもらうことがこのテストの目的であるので, 論証においては「明らかに」という表現は避け, 論証の要点を的確に記すこと. また, 解の導出においては導出過程の要点を的確に記すこと.
(6) もし途中に解けない小問があっても, その結果を認めて後続の小問を解いて構わない.

試験後の注意事項

(1) 合否については, 12 月 8 日 (水) の午後には数理学科事務室にて確認することができる. 答案については, 後日（入学予定者については郵送にて）返却する.
(2) 不合格となってしまった場合, 次回の予備テストを受験する必要がある. 次回は 4 月初めに行う予定である.

$\boxed{1}$ 以下, I を開区間 $(-1,1)$ とし, 関数はすべて I 上で定義されているものとする. 次の各問に答えよ.

(1) 連続関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が I 上で f に一様収束すれば, f は連続関数である. このとき, 積分値も収束すること, すなわち, $0 < a < 1$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-a}^{a} f_n(x)\,dx = \int_{-a}^{a} f(x)\,dx$$

が成り立つことを ε-N 論法により示せ.

(2) C^1 級の関数列が一様収束しても収束先の関数は必ずしも C^1 級になるとは限らない. 次の関数 f と f_n $(n=1,2,\ldots)$ を考えることにより, この事実を確認しよう:

$$f(x) = |x|, \qquad f_n(x) = |x|^{1+\frac{1}{n}} \ \ (n=1,2,\ldots).$$

このとき, まず, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ $(x \in I)$ であり, f は C^1 級ではない. 次の (ア),(イ) を示せ.

(ア) f_n は I 上で C^1 級である.

(イ) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は I 上で f に一様収束する.

(ヒント. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $|x| < \varepsilon$ と $\varepsilon \le |x| < 1$ の場合に分けて, $|f(x) - f_n(x)|$ を評価せよ.)

$\boxed{2}$ f を以下で定義される $\mathbb{R}^2$ 上の関数とする:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y) \ne (0,0) \text{ のとき}), \\ 1 & ((x,y) = (0,0) \text{ のとき}). \end{cases}$$

(1) f が原点で連続であるか否かについて理由を付して答えよ.

(2) f が原点で偏微分可能であるか否かについて理由を付して答えよ.

(3) D を単位円板 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$ として, 重積分

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

の値を求めよ.

$\boxed{3}$　V を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の n 次元ベクトル空間とし, $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n$ をその基底とする.

V^* を V から $\mathbb{C}$ への線型写像全体のなす集合とする. $\varphi, \varphi' \in V^*$, $a \in \mathbb{C}$ に対して, 和 $\varphi + \varphi'$ 及び, スカラー倍 $a\varphi$ を

$$(\varphi + \varphi')(\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{v}) + \varphi'(\mathbf{v}), \quad (a\varphi)(\mathbf{v}) = a \cdot \varphi(\mathbf{v}) \quad (\mathbf{v} \in V)$$

と定めることにより, V^* は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間になる.

$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ を $\varphi_i(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$ (δ_{ij} はクロネッカーのデルタ) により定まる V^* の元とし, $F\colon V \to V^*$ を

$$F(\mathbf{e}_j) = \varphi_j \quad (j = 1, \ldots, n)$$

をみたすような線型写像とする. このとき, 次の各問に答えよ.

(1) $\varphi, \psi \in V^*$ に対して, $\varphi(\mathbf{e}_j) = \psi(\mathbf{e}_j)$ $(j = 1, \ldots, n)$ が成り立つならば, $\varphi = \psi$, すなわち, $\varphi(\mathbf{v}) = \psi(\mathbf{v})$ $(\forall \mathbf{v} \in V)$ であることを示せ.

(2) F は全射, すなわち, 任意の $\varphi \in V^*$ に対して, $F(\mathbf{v}) = \varphi$ となる $\mathbf{v} \in V$ が存在することを示せ. (ヒント. まず, $\varphi = \varphi(\mathbf{e}_1)\varphi_1 + \cdots + \varphi(\mathbf{e}_n)\varphi_n$ を示せ.)

(3) F は単射, すなわち, $F(\mathbf{v})$ が V^* の零元ならば, $\mathbf{v}$ は V の零元に等しいことを示せ.

$\boxed{4}$　A を２つの相異なる固有値 λ_1, λ_2 を持つ３次複素正方行列とし, 固有値 λ_i に対する固有空間を W_i とする:

$$W_i = \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3 \,:\, A\mathbf{v} = \lambda_i \mathbf{v}\} \quad (i = 1, 2).$$

このとき, 次の各問に答えよ.

(1) 和 $W_1 + W_2$ は直和 $W_1 \oplus W_2$ であることを示せ.

(2) $\dim W_1 = 2$, $\dim W_2 = 1$ のとき, $\mathbb{C}^3$ の基底 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ が存在して, その基底に関する線型写像 $F_A\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ $(\mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v})$ の表現行列が対角行列になることを示せ.

(3) $\dim W_1 = \dim W_2 = 1$ をみたす A の例を１つあげて, さらに, この A は対角化可能でないことを説明せよ.