2003年度予備テスト
第3回 2003.12.17

(1) 数学的論証の表現力も採点対象とする．いきなり答案用紙に書くのではなく，草稿用紙でよく練ってから答案を書くこと．
(2) あなたが正確に理解しているのを示してもらうのがこのテストの目的であるので，論証においては「明らかに」という表現は避け論証の要点を的確に記すこと．また，解の導出においては導出過程の要点を的確に記すこと．
(3) もし途中に解けない小問があっても後続の小問を解いて構わない．
(4) 各問3点満点，計12満点とし，合格点は9点である．

$\boxed{1}$ 体 K 上の有限次元線形空間 X の2つの部分空間 V, W を考える．このとき，和 $V+W$ および交わり $V\cap W$ も X の部分空間となり，

$$(*) \qquad \dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V\cap W)$$

が成立する．

$l = \dim(V\cap W)$, $m = \dim V$, $n = \dim W$ とおき，$u_1, \ldots, u_l$ を部分空間 $V\cap W$ の基底とする．このとき，ある $v_1, \ldots, v_{m-l} \in V$ が存在して，$u_1, \ldots, u_l, v_1, \ldots, v_{m-l}$ が部分空間 V の基底となる．同様に，ある $w_1, \ldots, w_{n-l} \in W$ が存在して，$u_1, \ldots, u_l, w_1, \ldots, w_{n-l}$ が部分空間 W の基底となる．

$(*)$ を示すためには，$u_1, \ldots, u_l, v_1, \ldots, v_{m-l}, w_1, \ldots, w_{n-l}$ が $V+W$ の基底であることを確かめればよい．これについて，以下の問に答えよ．

(1) $V+W$ の任意の元 z は

$$u_1, \ldots, u_l, v_1, \ldots, v_{m-l}, w_1, \ldots, w_{n-l}$$

の線形結合で表されることを示せ．

(2) ある $u \in V\cap W$, $v \in V$, $w \in W$ に対して $u+v+w=0$ が成立しているとする．このとき，$w \in V\cap W$ を示せ．

(3) ベクトル

$$u_1, \ldots, u_l, v_1, \ldots, v_{m-l}, w_1, \ldots, w_{n-l}$$

が線形独立であることを示せ．
ヒント： (2) を用いよ．

$\boxed{2}$ 丁度2つの固有値 λ_1, λ_2 $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ をもつ3次複素正方行列 A を考える．また，固有値 λ_1, λ_2 に対する固有空間をそれぞれ W_1, W_2 とする．以下の問に答えよ．

(1) 部分空間の和 $W_1 + W_2$ が直和 $W_1 \oplus W_2$ であることを示せ．

(2) $W_1 \oplus W_2 \neq \mathbb{C}^3$ となる行列 A の例を1つあげ，その A に対して W_1, W_2 の基底を1つ求めよ．また，A が対角化可能かどうか答えのみ述べよ．ただし，λ_1, λ_2 は各自適当に選んでよい．

(3) $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{C}^3$ の場合，行列 A は対角化可能である．その理由を簡潔に説明せよ．

$\boxed{3}$ 以下の問に答えよ．

(1) 次の定理を証明せよ．

「$\mathbb{R}$ の区間 I 上の実数値連続関数 $f_n\ (n=1,2,\dots)$ の列 $\{f_n\}$ が関数 f に I 上で一様収束するならば，f は各 $x_0 \in I$ において連続である．」

ヒント： 次の不等式を用いよ．

$$|f(x)-f(x_0)| \leq |f(x)-f_N(x)| + |f_N(x)-f_N(x_0)| + |f_N(x_0)-f(x_0)|$$

ここで，N は一様収束の $\varepsilon - N$ 式の定義（「任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある自然数 N が存在して，すべての自然数 $n \geq N$ と ...」の形で述べられるもの）における自然数とする．

(2) べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ は開区間 $(-1,1)$ において関数 $\dfrac{1}{1-x}$ に各点収束する．この収束は開区間 $(-1,1)$ において一様収束でないことを示せ．

$\boxed{4}$ 以下の問に答えよ．

(1) 2 変数 x, y の微分可能な関数 $f(x,y)$ に対して $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ とおく．ただし，$(x,y) \neq (0,0)$ とする．このとき，$\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ を計算して $\dfrac{\partial g}{\partial r}, \dfrac{\partial g}{\partial \theta}, r, \theta$ の式で表せ．さらに，

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^2$$

を示せ．

(2) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ とし，$D \setminus \{(0,0)\}$ 上の関数 $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$ を考える．広義積分

$$\iint_{D\setminus\{(0,0)\}} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \right) dxdy$$

の収束・発散を判定せよ．