2003 年度予備テスト
第 2 回 2003.8.2

(1) 数学的論証の表現力も採点対象とする．いきなり答案用紙に書くのではなく, 草稿用紙でよく練ってから答案を書くこと．
(2) あなたが正確に理解しているのを示してもらうのがこのテストの目的であるので, 論証においては「明らかに」という表現は避け論証の要点を的確に記すこと．また, 解の導出においては導出過程の要点を的確に記すこと．
(3) もし途中に解けない小問があっても後続の小問を解いて構わない．
(4) 各問 3 点満点, 計 12 満点とし, 合格点は 9 点である．

$\boxed{1}$ V を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とし, 部分空間 W_1, W_2 の直和として $V = W_1 \oplus W_2$ と表されているとする．また, $g : V \to V$ を線形写像とし,

$$g(W_1) \subset W_1, \quad g(W_2) \subset W_2$$

をみたしているとする．$e_1, \ldots, e_r$ を W_1 の基底, $f_1, \ldots, f_s$ を W_2 の基底とする．このとき,

$$(*) \qquad e_1, \ldots, e_r, f_1, \ldots, f_s$$

は V を生成する (このことは以下証明せずに用いてよい)．以下の問に答えよ．

(1) $(*)$ は 1 次独立であることを示せ．

(2) (1) より $(*)$ は V の基底となる．この基底 $(*)$ に関する g の表現行列は

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$$

の形になることを示せ．ここで, A, B はそれぞれ r 次, s 次の正方行列である．

(3) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ が定める線形写像 $g_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を考える．A の固有値 2 に対する固有空間 W_1 は $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{R} \right\}$ で与えられ, $g_A(W_1) \subset W_1$ をみたす．このとき, $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2$ となる $\mathbb{R}^2$ の任意の部分空間 W_2 は $g_A(W_2) \subset W_2$ をみたさないことを証明せよ．

$\boxed{2}$ V を体 K 上の有限次元ベクトル空間とし, V から K への線形写像全体の集合を V^* で表す．$\varphi, \psi \in V^*$, $a \in K$ に対して, 和 $\varphi + \psi \in V^*$, スカラー倍 $a\varphi \in V^*$ を

$$(\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v), \quad (a\varphi)(v) = a(\varphi(v)) \quad (v \in V)$$

と定めることにより, V^* は線形空間となる．

以下, U, V を体 K 上の有限次元ベクトル空間, $f : U \to V$ を線形写像とし, 写像 $f^* : V^* \to U^*$ を

$$(f^*(\varphi))(u) = \varphi(f(u)) \quad (\varphi \in V^*, u \in U)$$

によって定義する．以下の問に答えよ．

(1) $f^*(\varphi)$ が実際に U^* の元であること, すなわち $f^*(\varphi) : U \to K$ が線形写像であることを示せ．

(2) f^* は線形写像であることを示せ．

(3) f が全射ならば, f^* は単射になることを証明せよ．

$\boxed{3}$ 指数関数 e^x に対する Taylor の公式を用いることにより, e の近似値の誤差評価ができる. これについて, 以下の問に答えよ.

(1) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$(*) \qquad e^x = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} + \frac{1}{n!}\int_0^x e^t (x-t)^n dt \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

が成立する. このことは 自然数 n に関する数学的帰納法によって証明できる. 証明の一つのステップである次の主張を示せ. (ヒント：部分積分)

「$(*)$ が $n = k$ に対して成立するならば, $n = k + 1$ に対しても成立する.」

(2) $x \geq 0$ に対して

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \int_0^x e^t (x-t)^n dt \leq e^x \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

が成立することを示せ.

(3) 次の条件をみたす自然数 N を一つ求め, その理由を述べよ.

「N 以上のすべての自然数 n に対して,

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) \right| < 10^{-2}$$

が成立する.」

ただし, $e < 3$ であることは用いてよい.

$\boxed{4}$ (1) 平面 $\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

の原点 $(0,0)$ における連続性, 偏微分可能性を調べることにより, 次の命題が偽であることを示せ.

「$\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) において偏微分可能, すなわち $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ が存在するならば, $f(x,y)$ は点 (a,b) で連続である.」

以下, A を上に有界かつ空でない $\mathbb{R}$ の部分集合とする.

(2) A の上限 $\sup A$ の定義を述べよ.

(3) A の元からなる数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $\sup A$ に収束するものが存在することを, (2) で与えた $\sup A$ の定義に基づいて示せ.