2002年度予備テスト
第2回 2003.2.20

1. 数学的論証の表現力も採点対象とする．いきなり答案用紙に書くのではなく，草稿用紙でよく練ってから答案を書くこと．
2. あなたが正確に理解していることを示してもらうのがこのテストの目的であるので，論証においては「明らかに」という表現は避け論証の要点を的確に記すこと．また，解の導出においては導出過程の要点を的確に記すこと．
3. もし途中に解けない小問があっても後続の小問を解いて構わない．
4. 各問3点満点，計12点満点とし，合格点は9点である．

$\boxed{1}$

(1) 以下の定理を証明せよ．

「$\mathbb{R}$ の部分集合 X 上の有界な実数値関数 f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ の列 $\{f_n\}$ が関数 f に X 上で一様収束するならば，f は有界である．」

ここで，X 上の関数 f に対して，f が**有界**であるとは，以下の性質をみたす数 M が存在することである．

$$\text{任意の } x \in X \text{ に対して，} |f(x)| \leq M.$$

(2) 「一様収束」という概念が解析学においてなぜ重要であるかを示すような一様収束に関する定理を一つ挙げよ．（定理の主張は条件等を含め，知っている範囲でできるだけ正確に記すこと）

$\boxed{2}$

(1) $\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - \alpha xy, \qquad \alpha \text{ は実数}$$

が極値をとる点を求めよ．

(2) 実数のベキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が収束する x の範囲のパターンは以下の3通りに分類できる．

(i) 任意の実数 x に対して収束する．

(ii) $x = 0$ に対してのみ収束する．

(iii) (i), (ii) 以外．

(iii) の場合に収束範囲はどのようになるか説明せよ．（証明や公式は不要）

$\boxed{3}$ V を体 K 上の n 次元線型空間とし, V^* で V の双対空間を表す. すなわち, V^* は V から K への線型写像全体のなす線型空間である. $e_1, \ldots, e_n$ を V の基底とし, $f_1, \ldots, f_n$ を $f_i(e_j) = \delta_{ij}$ によって定まる V^* の元とする. 以下の問に答えることにより, $f_1, \ldots, f_n$ が V^* の基底であることを示せ.

(1) $f_1, \ldots, f_n$ が一次独立であることを示せ.

(2) $f_1, \ldots, f_n$ が V^* を生成することを示せ.

$\boxed{4}$ 線型写像 $f: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ が $f \neq 0$ および $f^2 = 0$ をみたすとする. このとき, f の Jordan 標準形を, 以下の手順により求めることができる.

はじめに

(*) $$\mathrm{im} f \subset \ker f$$

が成り立つことに注意する. いま,

$$\ker f \oplus W = \mathbb{C}^3$$

をみたす $\mathbb{C}^3$ の部分空間 W を任意にとる. このとき,

(**) f を W に制限して得られる写像 $f|_W : W \to \mathbb{C}^3$ は単射である.

一方, (*) より $f(W) \subset \ker f$ となるので, $f|_W$ は W から $\ker f$ への写像とみなせる. 以上より,

主張 1. $f|_W : W \to \ker f$ は単射である.

さらに,

主張 2. $\dim(\ker f) = 2$, $\dim W = 1$ が成り立つ.

何故なら, W の与え方より $\dim(\ker f) + \dim W = 3$ であり, また, 主張 1 より $\dim W \leq \dim(\ker f)$ であるので, 次のいずれかが成り立つ：

$$\begin{cases} \dim(\ker f) = 3 \\ \dim W = 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} \dim(\ker f) = 2 \\ \dim W = 1 \end{cases}$$

仮定より $f \neq 0$ であるので, 前者は起こり得ない.

主張 3. 主張 1, 2 より, $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{C}^3$ を, e_2 を W の基底, $e_1 = f(e_2)$, $\langle e_1, e_3 \rangle = \ker f$ と選べば, 基底 e_1, e_2, e_3 に関する f の表現行列は Jordan 標準形となる.

以下の問に答えよ.

(1) (*) を示せ.

(2) (**) を示せ.

(3) 主張 3 の Jordan 標準形を求めよ.