２００１年度講義内容要約

理学部数理学科
多元数理科学研究科

２００１年度講義内容要約目次

前期講義内容要約

１年

２年

３年

４年

４年／大学院共通

大学院

大学院（昼夜開講コース）

後期講義内容要約

１年

2年

3年

4年／大学院共通

大学院

大学院（昼夜開講コース）

集中講義内容要約

４年

４年／大学院共通

大学院

２００１年度 前期講義内容要約

２００１年度前期時間割表（数理学科）

		１年生	２年生	３年生	４年生
月	1	数学展望 I （行者）	解析学序論 （中西敏）	微分方程式 （三宅）	
	2	数学演習 I （金井・木村・吉田 ・佐藤猛・佐藤周）			確率論 I （長田）
	3			数学演習 VIII （梁淞）	幾何学 III （太田）
	4				
火	1			ルベーグ積分論 （青本）	近代解析 （大沢健）
	2				
	3			数学演習 IX （千代延）	代数学 III （金銅）
	4				
水	1		抽象ベクトル空間 （中西知）	代数学要論 （金銅）	数理解析 ・計算機数学 I （内藤）
	2				
	3				
	4				
木	1		集合と位相 （藤原）		体とガロア理論 （齊藤博）
	2			数学演習 VII （吉田）	
	3		数学演習 III （梅村・斎藤秀 ・笹原・佐野・鍜島）		数理物理学 III （服部）
	4		数学演習 IV （梅村・斎藤秀 ・笹原・佐野・鍜島）		
金	1			幾何学要論 （小林）	多様体のトポロジー （大和）
	2				
	3			数学演習 X （糸）	解析学 III （三宅）
	4				

２００１年度前期時間割表（大学院）

		４年生と共通	大学院のみ
月	1		位相変分学（松本）
	2	確率論概論 I（長田）	
	3	幾何学概論 III（太田）	
	4		
火	1		認知構造数理学（金井）
	2		
	3	代数学概論 III（金銅）	
	4		
水	1	数理解析・計算機数学概論 I（内藤）	
	2		
	3		
	4		
木	1		
	2		トポロジー特論 I（菅野）
	3	数理物理学概論 III（服部）	
	4		
金	1		
	2		複素幾何学特論 II（ウエン）
	3	解析学概論 III（三宅）	
	4		

２００１年度前期時間割表（大学院昼夜開講コース）

月	5	
	6	基礎数学 II 担当：林 孝宏
火	5	
	6	
水	5	
	6	基礎数学 I 担当：長田 博文
木	5	
	6	
金	5	
	6	

科目名　**数学基礎 I**　**担当教官**　**浪川 幸彦**

サブタイトル　１変数微分積分学

対象学年　**１年**　**1.5 単位**　**必修**

教科書　吹田・新保，理工系の微分積分学，学術図書出版社
参考書

予備知識

高校までの数学

講義内容

微分積分学の入門として，通年講義の前半にあたる．１変数の場合を扱う．
具体的な講義内容は以下の通り：

1. ガイダンス及び予備知識（１回）
    - 講義のガイダンス
    - 良く用いる記号の説明
    - 写像についての説明
2. 極限と連続性・初等関数（４回）
    - 実数の性質
    - 極限の基本性質
    - 連続関数の基本性質
    - ランダウの記号
    - 指数関数・対数関数
    - 三角関数・逆三角関数
3. 微分とその応用（３回）
    - 微分の概念
    - 平均値の定理
    - テイラーの定理
    - ロピタルの定理
    - 極値
    - 凸性
4. 不定積分（１回）

- 不定積分の概念
- 有理関数の積分

5. 定積分とその応用（２回）
    - Riemann 積分の概念
    - 微積分学の基本定理
    - 広義積分

講義の感想

微分積分学は高等学校でかなりの程度やっているはずなのに，それから先の学びが思うように進んでいない．明らかに勉強不足である．また少数ではあるが，高校の内容がきちんと理解されていないものも見受けられる．これは大きな問題である．

また，試験の解答の書き方が年々あらっぽく，あるいはいい加減になっている．解答は採点者へのメッセージだという意識が感じられない．

参考資料

中間試験　2001.06.14

問題 1.　次の関数の n 次導関数を求めよ（各１０点）

(1) $\dfrac{1}{(x+a)(x+b)}$　;　(2) x^2e^x

問題 2.　次の極限を求めよ（各１０点）

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^n-a^{-n}}{a^n+a^{-n}}$　$(a>0)$　;　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\{(1+a/n)^m-1\}$　$(m\in N)$　;

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$

問題 3.　A を正の定数として，$a_1=1,\ a_{n+1}=\sqrt{2a_n+A}\,(n\in N)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ は増加数列であることを示し，その極限値を求めよ（２０点）

問題 4.　(1) ロール（Rolle）の定理を正確に述べよ（１０点）;

(2) これを用いて次の定理（コーシーの平均値定理）を証明せよ（２０点）

$f(x), g(x)$ は $[a,b]$ で連続，(a,b) で微分可能とし，(a,b) で $g'(x)\neq 0$ とする．このとき次の条件を満たす $c\,(a<c<b)$ が存在する：

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

問題 5.　（チャレンジ問題）(1) n を自然数とするとき

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)>\log\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{n+1}$$

が成り立つことを示せ;

(2) これを用いて

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$$

と置くとき，a_n は単調減少でしかも $\dfrac{1}{2}$ より大きいことを示せ
[出来具合によりボーナス点]

中間試験追試　2001.09.05

問題 1.　次の関数の n 次導関数を求めよ（各１０点）
(1) $\dfrac{1}{x^2+3x+2}$　;　(2) x^3e^x

問題 2.　次の極限を求めよ（各１０点）
(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \quad (a, b > 0)$　;　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\{(1+a/n)^m - 1\} \quad (m \in N)$　;

問題 3.　A を正の定数として，$a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{a_n + A}\,(n \in N)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ は増加数列であることを示し，その極限値を求めよ（２０点）

問題 4.　（チャレンジ問題）a_1, b_1 を正数とし，帰納的に

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

で定められる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は同じ値に収束することを示せ
[出来具合によりボーナス点]

期末試験　2001.09.13

問題 1.　次の関数の不定積分を求めよ（各１０点）

(1) $\dfrac{1}{(x+a)(x+b)}$　;　(2) x^3e^x　;　(3) $(\cos x)^3$　;

(4) $(\log x)^3$　;　(5) $\dfrac{1}{a(\cos x)^2 + b(\sin x)^2} \quad (ab \neq 0)$

問題 2.　次の定積分を求めよ（各１０点）

(1) $\displaystyle I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$　（n は自然数）　;

(2) $\displaystyle I_{m,n} = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\,\sin nx\,dx$　（m, n は自然数）

問題 3.　次の広義積分を求めよ（各１０点）

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{x^\alpha}\,dx \quad (0 \leq \alpha < 1)$　;

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx \quad (0 < a < b)$　;

問題 4.　次の広義積分が収束することを確かめよ（１０点）

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1-x}\,dx$$

問題 5.　（チャレンジ問題）

(1) $n = 0, 1, 2, \dots$ に対し，

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n \, dx = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

を示せ；

(2) ルジャンドル多項式　$P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!} \dfrac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$　に対して次を示せ

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) \, dx = \begin{cases} \dfrac{2}{2n+1} & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

[出来具合によりボーナス点]

科目名　**数学基礎 I**　**担当教官**　**松本 耕二**

サブタイトル

対象学年　**１年**　**1.5 単位**　**必修**

教科書　三宅正武，市原完治　「微分積分学」（学術図書）
参考書

予備知識

特に仮定しない

講義内容

1. 数列の極限,
2. 関数の極限 (イプシロン-デルタ論法を若干説明した),
3. 一変数の微分 (基礎概念，逆三角関数，高階導関数，平均値の定理，Taylor の定理, Taylor 展開，極値問題などへの応用),
4. 一変数の積分 (基礎概念，広義積分，種々の具体的な積分の計算，ガンマ関数，面積と曲線の長さ)

講義の感想

学生の理解度に大きい差がある．このことは最終的な成績において，優と不可がかなり多いことからはっきりと見て取れる．試験問題は殆んどが講義中に，ないしはレポート問題として取り上げ，解説もした問題そのままであり，まじめに勉強していれば誰でも優がとれるような問題である．そのため実際に優をとった学生も多かった．その一方では，高校でやってきたはずの極く簡単な微分計算すら手がつかない学生もかなりいた．全く勉強せずに試験に臨んだとしか考えられない．正直に言って，単位がとれていても，可で合格した学生は，自分は実際には理解できていないに近いと思って，後期は態度を改めてほしい．

参考資料

試験問題　2001.09.13

問題 1.　関数 $f(x) = \begin{cases} x^a \cos \frac{1}{x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$　について，

(i)　$f(x)$ が $x = 0$ で連続となるような実数 a の値の範囲を求めよ．

(ii) $f(x)$ が $x = 0$ で微分可能となるような実数 a の値の範囲を求めよ．

問題 2.　$\mathrm{Sin}^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) + \mathrm{Sin}^{-1}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$　の値を計算せよ．

問題 3.　次の関数を微分せよ.

(i) $\mathrm{Tan}^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\tan\dfrac{x}{2}\right) \quad (a>b>0)$

(ii) $(\sin x)^{\mathrm{Sin}^{-1}x}$　　(Hint: 対数をとれ．)

問題 4.　次の積分を計算せよ.

(i) $\displaystyle\int_1^e \frac{(\log x)^2}{x}dx$　　(ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x}$

問題 5.　曲線 $r=\max\{0,\, a\sin 3\theta\}$ $(0\le\theta\le 2\pi,\, a>0)$ の概形を描き，この曲線で囲まれた領域の面積を求めよ.

科目名　**数学基礎 Ｉ**　**担当教官**　**谷川 好男**

サブタイトル

対象学年　**１年**　**1.5 単位**　**必修**

教科書　岸 政倫著　微分積分学 （学術図書出版社）
参考書　杉浦 光夫　解析入門，東大出版

予備知識

特に仮定しない

講義内容

(佐藤さんに毎回報告したのをのせることにします.）

第１回：数列の極限について高校でやる例を復習したのち，数式化するために $\varepsilon - N$ (δ?) 法を説明しました．その応用として，a_n が a に収束するなら平均も a に収束することを示しました．あと極限値の一意性，挟み撃ちの原理などを説明しました．内容より議論の仕方を強調しました.

第２回：先週の復習の後，極限値がさきに知られていない場合は収束をどう判定するかという問題を提起した後，実数の連続性に入りました．教科書に沿って，有界単調数列の収束性から入りました．その例として，p.21 の自然対数の底の存在を詳しくやり，有界集合の上限，下限を説明しました．来週はこの続きで，コーシーの定理及び演習をやる予定．上極限，下極限は現時点ではとばします.

第３回：予告通り，教科書の定理１をやった後，上限と下限の存在を証明しました．またそれを用いてコーシーの収束判定条件をやりました．授業時間中に演習をやる予定でしたが，時間が足りなかったので，演習問題はレポートとしました.

第４回：無限級数のところで，主に絶対収束と条件収束の話をしました．特に $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + ...$ の例で，和を入れ替えると値が変わることに注意を促しました.

第５回：連続関数の章に入りました．関数の極限値，連続性を $\varepsilon - \delta$ 論法で説明しました．いくつかの例をやりましたが，三角関数は既知とし，指数関数は少し説明しました．特にこの教科書では $\lim_{x\to 0} \sin x/x = 1$ をここで詳しくやっているので，それも説明しました．この教科書の証明はなかなか良いと思います．逆三角関数は微分のところでやることにします.

第６回：Bolzano-Weierstrass の定理を復習した後，連続関数に関して，中間値の定理，最大値 最小値の存在定理，一様連続性の定理を証明しました．一様連続については特に例を挙げながら，その意味を説明しました．２回目のレポート問題を出しました.

第７回：微分の章に入りました．定義を復習したのち演習をしました．逆三角関数の微分は高校でやっていないと思い説明しました.

第８回：高階微分をやったのち，平均値の定理とテイラーの定理，及びテイラー展開についてやりました．指数関数のテイラー展開をきちんと証明しました．三角関数や他のものについては来週の予定．授業の最後にレポート問題の簡単な説明をしました.

第９回： 三角関数のテイラー展開をやったのち，微分の応用のセクションに入りましたが，ここはよく知っているところでもあるので，簡単に済ませました．凸関数については定義等きちんとやり，相加相乗平均の不等式を証明しました．

第１０回： 定積分の定義をし，連続関数は積分可能であることを証明しました．この日の時間を全部，使ってしまった．分割等なれない概念がでてきて，学生も困惑気味でした．でも１度は通る道だと強引にやってしまいました．

第１１回： 積分の平均値定理，微積分の基本定理をやりました．置換積分部分積分は説明は簡単にとどめ，余った時間で教科書のいくつかの問題をその場で解いてもらいました．積分の計算自体は多くの人ができていました．

第１２回： 広義積分をやりました．いくつかの例で収束の判定をしました．例として，ガンマ関数のことを述べましたが，あまり先に進むことはせず最後にガンマ関数のお話をしました．

第１３回： ４月からやってきたことを総まとめしました．またレポートについて解説をしました．一学期はこれで終わりです．

講義の感想

講義では，極限の概念をできる限り平易に解説した．それに時間を使ったため計算練習がすこし足りなくなったのは残念であった．計算練習は各自もっとやっておいてほしかった．

参考資料

試験問題

1. 次の積分を計算せよ。ただし n は 0 以上の整数とする。

$$\text{(i)}\ \int \frac{1}{e^x(e^x+1)}dx \qquad \text{(ii)}\ \int_0^\infty x^n e^{-x}dx$$

2. 次の極限値を求めよ。

$$\text{(i)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1-\frac{x}{2}}{x^2} \qquad \text{(ii)}\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$$

3. (1) 区間 [0,1] で連続な関数 $f(x)$ に対して次を示せ。

$$\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$$

(2) この等式を使って次の積分値を求めよ。

$$\int_0^\pi \frac{x}{2+\sin x}dx$$

4. 正の整数 n 対して

$$f(x) = \frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\cdots+\frac{1}{x-n}$$

と置く。$f(x)=0$ は n 個の実数解を持つことを示せ。(ヒント: $y=f(x)$ のグラフを考える。)

5. 級数 $\sum_{n=1}^\infty a_n$ の絶対収束, 条件収束について, 定義, 性質を例を挙げて説明せよ。

科目名 **数学基礎 I** **担当教官 納谷 信**

サブタイトル

対象学年 **１年** **1.5 単位 必修**

教科書 州之内 治男／和田 淳蔵 「改訂 微分積分」(サイエンス社)
参考書 一松 信 「解析学序説（上・下)」 （裳華房）
岡本 和夫 「微分積分読本」 （朝倉書店）
Ｅ．ハイラー／Ｇ．ワナー 「解析教程（上・下)」(シュプリンガー・フェアラーク東京)
高木 貞治 「解析概論」 （岩波書店）

予備知識

特に仮定しない

講義内容

(1) 1 変数関数の微分法 (6 回)
連続性・微分可能性の定義，高階導関数，テーラーの定理，不定形の極限
テイラー展開，指数関数・三角関数のテイラー展開，近似計算
(2) 1 変数関数の積分法 (6 回)
逆三角関数，有理関数・三角関数・無理関数の不定積分，積分可能性の定義
連続関数の積分可能性，広義積分 (収束判定法，ベータ関数，ガンマ関数)

講義の感想

できるだけ分かり易く丁寧に講義することを心がけたが，学生の反応，試験の結果をみる限りでは，学生によって理解のレベルに相当差があったようである．

参考資料

演習問題 $\boxed{1}$

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

とおく．

(1) ２項定理を用いて a_n, a_{n+1} を展開し, 第 k 項を比較することにより $a_n < a_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を示せ.

(2) $n! > 2^{n-1}$ を用いて $a_n < 3$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を示せ.

(数列 $\{a_n\}$ は単調に増加し, しかも無限大に発散しないので, 有限な値に収束することになる.)

演習問題 $\boxed{2}$ $x = \sin 10^\circ$ の近似値を計算したい．３倍角の公式により $\sin 30^\circ = 3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ$ で

あるから, $3x-4x^3=1/2$ となり, 問題は関数

$$f(x)=4x^3-3x+\frac{1}{2}$$

の零点の近似値を計算することに帰着される.

(1) $y=f(x)$ の増減, 凹凸を調べ, グラフの概形をかけ.

(2) $(a,f(a))$ における $y=f(x)$ の接線と x 軸との交点を求めよ.

(3) $x_0=0$ から始めて $x_1,x_2,\dots$ を帰納的に

$(x_n,f(x_n))$ における $y=f(x)$ の接線と x 軸との交点を $(x_{n+1},0)$ とする

$(n=0,1,2,\dots)$ ことによって定める. x_1, x_2 を計算せよ.

（電卓によれば $\sin 10^\circ=0.173648177\cdots$ である. 電卓で x_3 を計算し比較してみよ. このようにして関数の零点の近似値を計算する方法を**ニュートン法**という.）

演習問題 $\boxed{3}$　関数

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

は $\mathbf{R}$ 全体で微分可能であることを示し, $f'(x)$ を求めよ.

演習問題 $\boxed{4}$　（不定形の極限値）

(1) $\cos x$ を

$$\cos x=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\delta(x),\quad \lim_{x\to 0}\frac{\delta(x)}{x^2}=0$$

と表すとき, α_0, α_1, α_2 を求めよ.

(2) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

(3) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^x-x}{x^2}$$

（ヒント　e^{2x}, e^x を (1) のように表せ.）

演習問題 $\boxed{5}$　(1) $f(x)=\sin x$ について $f^{(n)}(x)$, $f^{(n)}(0)$ を計算し, $\sin x$ の 0 を中心とするテイラーの公式を導け.

(2) $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$ を確かめることにより, $\sin x$ の 0 を中心とするテイラー展開を求めよ.

(3) 上と同様にして, $\cos x$ の 0 を中心とするテイラー展開を求めよ.

演習問題 $\boxed{6}$　テイラーの定理の証明に必要な次の事実（平均値の定理の一般化）を証明してみよう.

$f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で連続, 開区間 (a,b) で微分可能とし, m を自然数とする. このとき

$$(\star) \qquad \frac{f(b)-f(a)}{(x-a)^m} = \frac{f'(c)}{m(c-a)^{m-1}}$$

をみたす実数 c が a と b の間に存在する.

(1) 定数 A を適当に定めて

$$F(x) = f(x) - f(a) - A(x-a)^m$$

が $F(b) = 0$ をみたすようにせよ.

(2) 平均値の定理（あるいは, その特別な場合であるロルの定理）を $F(x)$ に適用し, 得られる式を書き換えて $(\star)$ を導け.

演習問題 $\boxed{7}$

(1) $\sin^{-1} x$ の導関数を求めよ.

(2) $\cos^{-1} x$ の導関数を求めよ.

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $(a>0)$ の不定積分を求めよ.
（ヒント　$x = au$ と変数変換し, 上の結果を用いよ.）

(4)* $\dfrac{1}{x^3+1}$ の不定積分を求めよ.
（ヒント　まず, $\dfrac{1}{x^3+1} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$ とおいて, a, b, c を定めよ.）

演習問題 $\boxed{8}$

(1) 有理関数

$$\frac{x^5+1}{x^3+1}$$

を

$$(\text{多項式}) + \frac{(\,2\,\text{次以下の多項式})}{x^3+1}$$

の形に表し, 第２項を部分分数展開せよ.

(2) (1) の結果を用いて, 次の不定積分を求めよ.

$$\int \frac{x^5+1}{x^3+1}\,dx$$

(3)* 次の不定積分を求めよ.

$$\int \frac{x^6}{x^4+x^2+1}\,dx$$

演習問題 $\boxed{9}$　以下の定積分を区分求積法

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a_{k-1}) \qquad \left(a_k = a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

を用いて計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 e^x\,dx$

演習問題 $\boxed{10}$ 次の定積分を計算せよ．ただし $0<\varepsilon<1$, $R>1$ である．さらに, $\varepsilon\to 0$ あるいは $R\to\infty$ としたときの極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^s} \quad (s>0)$

(2) $\displaystyle\int_1^R \frac{dx}{x^s} \quad (s>0)$

(3) $\displaystyle\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(4) $\displaystyle\int_0^R \frac{dx}{x^2+1}$

演習問題 $\boxed{11}$

(1) $p<1$ のとき $\displaystyle\int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ は左端 0 で広義積分である．$p>0$ のとき, この広義積分が収束することを示せ．

(2) $s<1$ のとき $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}\,dx$ は左端 0 で広義積分である．$s>0$ のとき, この広義積分が収束することを示せ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$ は s の値に依らずに収束することを示せ．

以下の演習問題は, 7 月 19 日にまとめて配布した．

演習問題 $\boxed{12}$ $f(x)=\dfrac{1}{x}$ を有界閉区間 $[a,1]$ $(0<a<1)$ 上の連続関数と考え,

$$a\le c_n<d_n\le 1 \quad (n=1,2,\ldots), \qquad d_n-c_n\to 0 \quad (n\to\infty)$$

とする．このとき c_n, d_n の取り方に依らずに

$$\max_{c_n\le x\le d_n} f(x)-\min_{c_n\le x\le d_n} f(x)\to 0 \quad (n\to\infty)$$

が成り立つことを示せ．

演習問題 $\boxed{13}$

(1) 部分積分法を用いて $\Gamma(s)=(s-1)\Gamma(s-1)$ $(s>1)$ を示せ．また, これを用いて, 自然数 n に対して $\Gamma(n)=(n-1)!$ を示せ．

(2) 部分積分法を用いて $B(p,q)=\dfrac{q-1}{p}B(p+1,q-1)$ $(p>0,q>1)$ を示せ．また, これを用いて, 自然数 p,q に対して $B(p,q)=\dfrac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$ を示せ．

実は, すべて $p, q > 0$ に対して, 等式

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

が成立する．上の結果はこの等式を p, q が自然数のときに確かめたことになっている．一般の場合は, 後期の授業において「２変数関数の積分に対する変数変換の公式」の応用として示される．

演習問題 $\boxed{14}$　次の広義積分の収束・発散を判定せよ．収束する場合には積分の値も求めよ．ただし s は実数とする．

(1) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{dx}{x(\log x)^s}$

(2) $\displaystyle\int_0^{1/e} \frac{dx}{x(-\log x)^s}$

(ヒント　$u = \log x$ と変数変換せよ.)

演習問題 $\boxed{15}$　広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ (n は自然数) が収束することを確かめ, 積分の値を求めよ．

(ヒント　例えば, レポート問題 $\boxed{8}$ (2) の漸化式を用いよ.)

演習問題 $\boxed{16}$　次の積分計算の誤りを正せ．

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right] = -2$$

演習問題 $\boxed{17}$　次の関数の微分可能性を調べよ．

(1) $f(x) = \dfrac{1}{|x|+1}$

(2) $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{1/x}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$

演習問題 $\boxed{18}$　$x^3 - 6x + 11 = 0$ は実数解をただ一つもち, それが 3 と 3.1 の間に存在することを示せ．また, この実数解の近似値を小数第４位まで正しく計算せよ．

演習問題 $\boxed{19}$　次の関数の 0 を中心とするテイラー展開を求めよ．

(1) $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$

(2) $g(x) = \sin^2 x$

(ヒント　より簡単な関数のテイラー展開に帰着させよ.)

演習問題 $\boxed{20}$　次の等式を証明せよ．

(1) $\sin^{-1}\dfrac{3}{5} + \sin^{-1}\dfrac{4}{5} = \dfrac{\pi}{2}$

(2) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$

(3) $\tan^{-1}\dfrac{1}{2} + \tan^{-1}\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$

(4) $\tan^{-1} x + \tan^{-1} \dfrac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & (x > 0) \\ -\frac{\pi}{2} & (x < 0) \end{cases}$

レポート問題 $\boxed{1}$（５月１０日提出）

(1) 級数

$$(1+x)^{2/3} = 1 + ax + bx^2 + cx^3 + \cdots$$

の両辺を 3 乗し, x, x^2, x^3 の係数を比較することにより a, b, c を求めよ.

(2) 実数 α （アルファ）に対して

$${}_{\alpha}C_k = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

と定義する. ${}_{2/3}C_1$, ${}_{2/3}C_2$, ${}_{2/3}C_3$ を計算し, それぞれ (1) の a, b, c と一致することを確かめよ.

レポート問題 $\boxed{2}$（５月１０日提出）

ニュートン法を関数 $f(x) = x^2 - 2$ に適用することにより, $\sqrt{2}$ の近似値を計算してみよう. $x_0 = 2$ から始めて x_1 から x_5 までを, 電卓を用いて計算せよ.

レポート問題 $\boxed{3}$（５月１０日提出）　$\alpha > 0$ とする. 関数

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha} & (x \geq 0) \\ -(-x)^{\alpha} & (x < 0) \end{cases}$$

が $\mathbf{R}$ 全体で微分可能であるのは, α がどのような場合か？　また, その場合に $f'(x)$ を求めよ.

レポート問題 $\boxed{4}$（５月３１日提出）

(1) $\sin x$, $\cos x$ を演習問題 $\boxed{4}$ (1) のように表し, それを用いて次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x(1 - \cos x)}$$

(2) $\log(1+x)$ を演習問題 $\boxed{4}$ (1) のように表し, それを用いて次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \log(1+x)}{x^2}$$

レポート問題 $\boxed{5}$（５月３１日提出）

$f(x) = \log(1+x)$ の 0 を中心とするテイラーの公式

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \cdots + \frac{(-1)^{n-2}}{n-1}x^{n-1} + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n(1+\theta x)^n} x^n \quad (0 < \theta < 1)$$

を $n = 6$ として用いて $\log 2$ の近似値を計算しよう.

(1) $x = 1$ とし $R_6(x)$ を無視することにより, $\log 2$ の近似値を求めよ. また, $R_6(x)$ を評価することにより, 誤差を見積もれ.

(2) $x = 1/3$ とし $R_6(x)$ を無視することにより, $\log\frac{4}{3}$ の近似値を求めよ．また, $R_6(x)$ を評価することにより, 誤差を見積もれ.

(3) $x = -1/3$ とし $R_6(x)$ を無視することにより, $\log\frac{2}{3}$ の近似値を求めよ．また, $R_6(x)$ を評価することにより, 誤差を見積もれ.

(4) (2), (3) より $\log 2$ の近似値を求めよ.
また誤差を見積もれ.

(5) $f(x) = \log(1+x)$ の 0 を中心とするテイラーの公式を導け.

次の例題は, 先週のレポート問題 $\boxed{5}$ に解答する際の参考にして欲しい.

例題　$\sin x$ の 0 を中心とするテイラーの公式

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + R_5(x), \qquad R_5(x) = \frac{\cos(\theta x)}{5!}x^5 \quad (0 < \theta < 1)$$

を用いて $\sin 10^\circ$ の近似値を求め, 誤差を見積もれ. ただし, π の値は電卓によるものを真の値とみなして用いることとする.

解答（$+\alpha$）　$x = 10^\circ = \pi/18$ とし $R_5(x) = R_5(\pi/18)$ を無視して, $\sin 10^\circ$ の近似値

$$\frac{\pi}{18} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 = 0.173646829$$

を得る．一方, $0 < \theta \times \pi/18 < \pi/6$ であるから $\sqrt{3}/2 < \cos(\theta \times \pi/18) < 1$, よって

$$\frac{1}{5!} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(\frac{\pi}{18}\right)^5 < R_5(\pi/18) < \frac{1}{5!} \times \left(\frac{\pi}{18}\right)^5$$

となり, $\sqrt{3} > 1.7$ を用いて誤差 $R_5(\pi/18)$ (= 真の値 − 近似値) の評価

$$1.14716 \times 10^{-6} < R_5(\pi/18) < 1.34960 \times 10^{-6}$$

を得る．したがって $\sin 10^\circ$ の真の値は 0.173647976 と 0.173648178 の間に存在することになる．とくに上の近似値は少なくとも小数点以下５桁目までは正しいことが分かる．電卓によれば $\sin 10^\circ = 0.173648177\cdots$ であり, 上の近似値は実際には小数点以下８桁目まで正しい. 上で $0 < \cos(\theta \times \pi/18) < 1$ とすれば, 誤差の評価は

$$0 < R_5(\pi/18) < 1.34960 \times 10^{-6}$$

と少し粗くなる.

レポート問題 $\boxed{6}$（５月３１日提出）

$$(\log(1+x))' = \frac{1}{1+x}$$

に着目して, $f(x) = \log(1+x)$ の 0 を中心とするテイラー展開

$$(\star) \qquad \log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \quad (-1 < x \leq 1)$$

を導出しよう.

(1) $x \neq -1$ に対して

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \frac{(-1)^n x^n}{1+x}$$

を示せ.

(2) $-1 < x \leq 1$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt = 0$$

を示せ.
（ヒント　$0 \leq x \leq 1$ と $-1 < x < 0$ に分けると考えやすい. 例えば $0 \leq x \leq 1$ の場合, $0 \leq t \leq x$ において $1/(1+t) \leq 1$ である. これを最初に使う.）

(3) (1) の式を積分し (2) を用いることにより, $(\star)$ を導け.

レポート問題 $\boxed{7}$（７月５日提出）
(1) $t = \tan\dfrac{x}{2}$ とおくと

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2},\quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

となることを示せ.

三角関数の不定積分はこの変数変換により, 有理関数の不定積分に帰着される. 例えば（教科書 p.34 問 (v)）,

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{\sin x} &= \int\frac{1+t^2}{2t}\frac{2}{1+t^2}\,dt\\ &= \int\frac{dt}{t} = \log|t|\\ &= \log\left|\tan\frac{x}{2}\right|.\end{aligned}$$

(2) $\dfrac{1}{\sin x\cos x}$ の不定積分を求めよ.（教科書 p.34 問 (iv)）

(3) $\cot x \left(= \dfrac{1}{\tan x}\right)$ の不定積分を求めよ.（教科書 p.34 問 (vi)）

(4) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$ の不定積分を求めよ.（教科書 p.34 問 (vii)）

次に, 無理関数 $\dfrac{1}{x\sqrt{1-x}}$ の不定積分を求めてみよう. $t = \sqrt{1-x}$ とおくと
$x = 1 - t^2$, $dx = -2t\,dt$ であり,

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x}} = \int\frac{-2t}{(1-t^2)t}\,dt$$

となってやはり有理関数の不定積分に帰着される.

(5) この計算の続きを完成せよ.（教科書 p.37 問 (i)）

(6) $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ の不定積分を求めよ.（教科書 p.37 問 (iv)）

$\dfrac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}$ の不定積分を求めてみよう．$t = \sqrt{x^2+x+1} + x$ とおくと
$\sqrt{x^2+x+1} = t - x$ であり,

$$x = \frac{t^2-1}{2t+1}, \quad dx = \frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}\,dt$$

となる．これから上の不定積分はやはり有理関数の積分に帰着される．

(7) この計算の続きを完成せよ．（教科書 p.37 問 (ii)）

(8) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-x+2}}$ の不定積分を求めよ．（教科書 p.37 問 (v)）

(9) $\dfrac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}$ の不定積分を求めよ．（教科書 p.37 問 (vii)）
（ヒント　根号内の x^2 の係数が負であり, (7), (8) とはタイプが異なる．

$$\frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x)(3+x)}} = \frac{1}{(1-x)}\sqrt{\frac{1-x}{3+x}}$$

と式変形すれば (5), (6) と同じタイプになる．あるいは, 演習問題 $\boxed{7}$ (3) に帰着させてもよい.）

レポート問題 $\boxed{8}$（７月５日提出）

(1) 部分積分によって

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} + \int \frac{2x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$$

を確かめ, これを用いて不定積分

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

を求めよ．

(2)

$$I_n(x) = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$$

とおく．(1) と同様の計算を行って, $I_{n+1}(x)$ と $I_n(x)$ の間の関係式（漸化式）

$$2nI_{n+1}(x) = (2n-1)I_n(x) + \frac{x}{(x^2+1)^n}$$

を導け．

(3) 上の漸化式を用いて $I_3(x)$, $I_4(x)$ を求めよ．

レポート問題 $\boxed{9}$（７月５日提出）

定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ の近似値として

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_{k-1}) \quad \left(a_k = a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

を考えたときの誤差を評価しよう．ただし, 被積分関数 $f(x)$ は微分可能で, 導関数 $f'(x)$ は連続であるとし, $|f'(x)|$ の区間 $[a,b]$ における最大値を M で表す．

(1) $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とするとき, テイラーの定理を用いて

$$F(a_k) - F(a_{k-1}) = f(a_{k-1})(a_k - a_{k-1}) + \frac{1}{2}f'(c_k)(a_k - a_{k-1})^2 \quad (a_{k-1} < c_k < a_k)$$

となることを確かめよ．また, これを用いて

$$(\star) \qquad \left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a_{k-1}) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} M$$

を示せ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ の近似値を $n = 10$ として計算せよ．（電卓を用いよ.）また, $(\star)$ を用いて誤差（の絶対値）を評価せよ．

チャレンジ問題 $\boxed{1}$　光の速さがそれぞれ v_1, v_2 である２つの媒質の境界での光の屈折の法則（スネルの法則）は

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2}$$

と述べられる．ここで α_1, α_2 はそれぞれ入射角, 屈折角である（下図参照）．この法則を理論的に説明してみよう．それぞれの媒質中から点 A, B をとる．それに合わせて下図のように座標軸を定め, A, B の座標をそれぞれ $(0, a)$, $(l, -b)$ $(a, b, l > 0)$ とおく．A から B まで光が進むとき, 境界面における光の入射点の x 座標を x $(0 < x < l)$ とする．

(1) $\sin\alpha_1$, $\sin\alpha_2$ を a, b, x, l で表せ．

(2) 光が A から出て B に到達するまでにかかる時間 $T(x)$ を求めよ．

(3) $T'(x)$ を計算し, $T'(x) = 0$ という条件が光の屈折の法則と同等であることを確かめよ．

(4) $T'(x) = 0$ を与える x において $T(x)$ が最小値をとることを確かめよ．このようにして, 光の屈折の法則は, **光が A から B まで最短時間で進む**ことを要請することによって導かれることが分かった．

チャレンジ問題 $\boxed{2}$　指数関数 e^x の 0 を中心とするテイラーの公式

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

を用いて, オイラーの数（あるいはネイピアの数）e が無理数であることを証明してみよう．

(1) 上の公式を用いて, $2 < e < 3$ を示せ．
（ヒント　$e < 3$ は $e^{-1} > 1/3$ と同じこと.）

(2) 再び上の公式を用いて e が無理数であることを示せ．
（ヒント　$e = m/n$ $(m, n$ は自然数$)$ と表せると仮定して矛盾を導く．$x = 1$ とし, 公式の両辺に $n!$ を掛けてみよ.）

チャレンジ問題 $\boxed{3}$　複素数 z に対して, 無限級数

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

を考える．この無限級数はすべての複素数 z に対して収束することが分かっており, その極限値（複素数）をもって e^z の定義とする．すなわち

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

である．このような「複素関数」は数学基礎 V（２年前期）において学習する．ひとまず, 項が複素数である無限級数が収束するとはどういうことか, とか, 上の無限級数が収束することはどのようにして確かめられるのか, といったことにはあまり拘らずに進むことにしよう.

(1) 実数 x に対し

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad (\text{オイラー，１７４３年})$$

を示せ．ここで i は虚数単位である.

(2) 三角関数の加法定理を用いて, 実数 x, y に対し

$$e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$$

を示せ.

オイラーの公式において $x = \pi$ とすると

$$e^{i\pi} = -1$$

という, 数学の有名な定数 π, e, i を関係づける非常に単純な式が得られる.

チャレンジ問題 $\boxed{4}$ $f(x)$ は n 回微分可能で, 第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ は連続であるとする．このとき, テイラーの公式

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n(x)$$

の剰余項は

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{(n-1)}\,dt$$

と表せることを示せ.

ヒント 次のような部分積分を繰り返す：

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt \\ &= f(a) - \int_a^x f'(t)(x-t)'\,dt \\ &= f(a) - \Big[f'(t)(x-t)\Big]_a^x + \int_a^x f''(t)(x-t)\,dt \\ &= \cdots \end{aligned}$$

チャレンジ問題 $\boxed{5}$ 定積分 $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ を計算しよう.

(1) $\sin^n x = \sin^{n-1} x \cdot \sin x$ と考えて部分積分することにより, 漸化式 $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ を導け.

(2) まず I_0, I_1 を計算し, 次に (1) の漸化式を用いることにより I_n を計算せよ.
(n が偶数の場合と奇数の場合に分けよ.)

この計算結果は色々な応用をもつ. 一例として

(3) 次の公式を示せ.

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4^2}{3\cdot 5}\cdot\frac{6^2}{5\cdot 7}\cdot\frac{8^2}{7\cdot 9}\cdot\frac{10^2}{9\cdot 11}\cdots\frac{(2n)^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)}\right)$$

(ウォリス, １６５５年)

実は次の公式も成り立つ.

$$\sqrt{2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{6^2}{5\cdot 7}\cdot\frac{10^2}{9\cdot 11}\cdots\frac{(4n-2)^2}{(4n-3)\cdot(4n-1)}\right)$$

(オイラー, １７４８年)

期末試験問題　2001.09.13

$\boxed{1}$ (３０点)　以下の問に答えよ。

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n\cdot n}}\right)$ を求めよ。

(2) n を 2 以上の自然数とするとき、不等式

$$\log(n+1) < 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} < 1+\log n$$

を証明せよ。

$\boxed{2}$ (２５点)

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x^s}$ を求めよ。ただし s は実数とする。

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[10]{x^{11}+x^9}}$ の収束・発散を判定せよ。

$\boxed{3}$ (２０点)　広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n}$ の値を求めよ。（広義積分の収束性について議論する必要はない。）

$\boxed{4}$ (２５点)

(1) 関数

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ \dfrac{x}{1+e^{1/x}} & (x < 0) \end{cases}$$

が $x=0$ で微分可能であることを示し、導関数 $f'(x)$ を求めよ。（$x \neq 0$ での微分可能性について議論する必要はない。）

(2) 導関数 $f'(x)$ が $x=0$ で連続か否かを調べよ。ただし、$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t}=0$ という事実は証明せずに用いてよい。

科目名　数学基礎 II　　**担当教官**　梅村 浩

サブタイトル　線形代数

対象学年　**１年**　　**1.5 単位**　**必修**

教科書　江尻 典夫著　—理系の基礎数学—線形代数学，学術出版社
参考書　佐武 一郎著　線形代数学，裳華房

予備知識

特に仮定しない

講義内容

2 次正方行列，(m, n) 行列，行列の演算，連立 1 次方程式と行列，基本変形，行列の階数，逆行列の計算，行列式，クラメールの公式.

講義の感想

講義を通じて，できる限り平易に解説を心がけた.

科目名　**数学基礎 II**　**担当教官**　**木村 芳文**

サブタイトル

対象学年　**１年**　**1.5 単位**　**必修**

教科書
参考書　理系の基礎数学，線形代数学，江尻典雄著　（学術図書出版社）

予備知識

特に仮定しない

講義内容

線形代数の基礎を連立方程式の解法，理論に則して解説した．

具体的な講義内容は以下の通りである．：

1. ２元連立方程式の解法
    - 逆行列を使う方法
    - 困った場合（不定，不能な場合）
2. 線形写像としての行列
    - 正則行列と特異行列の像
    - 不定，不能の意味
    - 3×3 行列で表わされる連立方程式
    - 平面の方程式
    - ベクトル積
3. 行基本変形による連立方程式の解法
    - 行基本変形の定義
    - 行基本変形を表わす行列
    - 階段行列
    - 階数の定義とその意味
    - 同値関係
    - 斉次方程式の解
    - 解のパラメーター表示（準同型次元定理）
    - $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の可解条件
4. ベクトルの１次独立性

- 線形部分空間
- 基底と次元

5. 行列式
   - 行列式の置換による定義
   - 行列式の性質
   - 行列式の意味

講義の感想

全般を通して抽象的な線形代数の準備としてなるべく具体的な話をした．後期は固有値，行列の標準化という話を中心にするつもりであるが連立方程式の基礎理論の理解が前提条件であり，その意味でも前期の内容について十分なリアリティーを伴う理解をさせることが肝心であると思う．

参考資料

試験問題

問題 $\boxed{1}$　行列 A が与えられたとする．

(1)　$\mathrm{rank}\,A$ (A の階数) の定義は何か．それは行列の何を表しているものなのかを簡潔に述べよ．

(2)　$\det A$ (A の行列式) が定義されるためには A はどのような行列である必要があるか．行列式の定義を述べよ．それは行列の何を表しているものなのかを簡潔に述べよ．

(3)　連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ が与えられた時に $\mathrm{rank}\,A$，$\det A$ は方程式の性質，解法についてどのような情報を与えるか簡潔に述べよ．

問題 $\boxed{2}$

(1)　$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ は $\mathbf{R}^2$ の基底となることを証明せよ．

(2)　$\mathbf{R}^4$ の部分空間 $x + 2y - 3z - w = 0$ の基底を一組求めよ．

問題 $\boxed{3}$　$\mathbf{R}^4$ における４つのベクトル

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \ \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \ \mathbf{v_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

は一次独立かあるいは一次従属か．もし一次従属ならば $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}$ の間の関係式を一つ求めよ．

問題 $\boxed{4}$　連立方程式

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 0 \\ -2x + y + Cz &= 0 \\ x - 2y - 7z &= 0 \end{aligned}$$

が与えられた時

(1) 方程式が無限個の解を持つように定数 C の値を決定せよ.

(2) (1) の条件の下で連立方程式

$$\begin{aligned} x+2y+z &= 4 \\ -2x+y+Cz &= B \\ x-2y-7z &= -8 \end{aligned}$$

が解を持つように定数 B の値を求めよ.

(3) (2) の方程式の解を求め解の幾何学的意味を述べよ.

科目名 **数学基礎 II** **担当教官** **斎藤 秀司**

サブタイトル 線型代数

対象学年 **１年** **1.5 単位** **必修**

教科書 特になし
参考書 線型代数入門，東京大学出版会

予備知識

特に仮定しない

講義内容

１．行列式：平行体の体積と３次の行列式について説明したのち，置換と行列式の定義に進む．行列式の計算に習熟させるとともに余因子行列，クラメールの公式，小行列式平行体の体積，行列式，行列式の展開，行列式の計算，余因子行列，などが主な授業項目．

２．行列と連立１次方程式：３次の行列について詳しく説明したのち，一般の行列に移り連立１次方程式によって行列の理解を深めさせる．さらに，連立１次方程式の解法を説明して，行列の階数へ進む．掃き出し法による連立方程式の解法、解空間の自由度などが主な項目．

３．行列の階数と正則性：行列の階数と正方行列がいつ可逆になるかについて述べ，それ

講義の感想

学生の受講態度は熱心であったので気持ちよく講義ができた．

参考資料

線型代数演習 (I)(行列式 (I))

[1] 次の行列の行列式を求めよ。ただし (9),(10) において $\zeta^n = 1$ とする。

(1) $\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\phi \\ r\cos\theta\cos\phi & r\cos\theta\sin\phi & -r\sin\phi \\ -r\sin\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & a^2-bc & a^3 \\ 1 & b^2-ca & b^3 \\ 1 & c^2-ab & c^3 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & 0 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ a^2 & 0 & 1 & a \\ a & a^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} a+b & a & a & \cdots & a \\ a & a+b & a & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & a+b \end{pmatrix}$ $(n \times n)$　(8) $\begin{pmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \cdots & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & x \\ 0 & 0 & \cdots & x & 1+x^2 \end{pmatrix}$ $(n \times n)$

(9) $\begin{pmatrix} 1 & \zeta & \cdots & \zeta^{n-1} & \zeta^n \\ \zeta & \zeta^2 & \cdots & \zeta^n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \zeta^{n-1} & 1 & \cdots & \zeta^{n-3} & \zeta^{n-2} \\ \zeta^n & 1 & \cdots & \zeta^{n-2} & \zeta^{n-1} \end{pmatrix}$　(10) $\begin{pmatrix} 1 & \zeta & \cdots & \zeta^{n-2} & \zeta^{n-1} \\ \zeta & \zeta^2 & \cdots & \zeta^{n-1} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \zeta^{n-1} & 1 & \cdots & \zeta^{n-3} & \zeta^{n-2} \end{pmatrix}$

(11) $\begin{pmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_1 & x & -1 & \ddots & & \vdots \\ a_2 & 0 & x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 & x \end{pmatrix}$　(12) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & \cdots & n \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & n-1 \\ 2 & 1 & 0 & \ddots & & n-2 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\ n-1 & n-2 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(13) $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$　(14) $\begin{pmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$

(15) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n & b \end{pmatrix}$　(16) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & a \\ 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ a & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(答え：(1) $r^2 \sin\theta$, (2) $(a+b+c)^2(a-b)(b-c)(c-a)$), (3) 0, (4) $(b+c)(c+a)(a+b)$,
(5) $1+a^4+a^8$, (6) $2(a+b+c)^3$, (7) $(na+b)b^{n-1}$, (8) $1+x^2+x^4\cdots+x^{2n}$, (9) $(-1)^{n(n-1)/2}(1-\zeta)^n$),
(10) 0, (11) $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots a_{n-1}x+a_n$, (12) $(-1)^n 2^{n-1} n$, (13) $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$
(14) $(x_1-a_1)(x_2-a_2)\cdots(x_n-a_n)(1+\sum_{i=1}^n a_i/(x_i-a_i))$, (15) $b-\sum_{i=1}^n a_i^2$,
(16) $(-1)^{n(n-1)/2}(a-1)^{n-1}(a+n-1)$

線型代数演習 (II)(行列式 (II), 行列の演算)

[1] n を自然数とし $\zeta = \cos\frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{n}$ とするとき次を示せ。

$$\det\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-2} \\ x_{n-2} & x_{n-1} & x_0 & \cdots & x_{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_0 \end{pmatrix} = \prod_{k=0}^{n-1}(x_0+\zeta^k x_1 + +\zeta^{2k}x_2+\cdots+\zeta^{(n-1)k}x_{n-1})$$

[2] 空間内の４点 (x_i, y_i, z_i) $1 \le i \le 4$ が同一平面上にあるための必要十分条件は $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{pmatrix} = 0$ であることを示せ。

[3] 以下 A, B, C, D は $n \times n$ 行列であるとして次を示せ。

(1) $\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B) \cdot \det(A-B)$

(2) A が可逆とするとき $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \cdot \det(D - CA^{-1}B)$

(3) A, B の成分が実数として $\det \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = |\det(A + \sqrt{-1}B)|^2$

[4] A は $n \times n$ 実数行列であるとして全ての $v \in \mathbb{R}^n$ にたいし $Av = v$ であるとすると A は単位行列であることを示せ。

[6] $1 \le i, j \le n$ なる自然数にたいし $E_{i,j}$ を (i, j) 成分は１で他の成分は全て０であるような $n \times n$ 行列とする。このとき次を示せ。

$$E_{i,j} \cdot E_{k,l} = \begin{cases} E_{i,l} & \text{if } j = k, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

[7] 2×2 行列 A で $A^2 = O$ を満たすものを全て求めよ。

[8] 次の行列の n 乗を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

(答え：(1) n 偶数なら $(x^2 + yz)^{n/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, n 奇数なら $(x^2 + yz)^{(n-1)/2} \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}bd \\ 0 & a^n & na^{n-1}d \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$)

線型代数演習 (III)(連立一次方程式, 掃出し法)

[1] 掃出し法により次の連立方程式を解け。

(1) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 8x_4 = 1 \end{cases}$ (答え：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$)

(2) $\begin{cases} 2x_2+4x_3+2x_4=2c \\ -x_1+x_2+3x_3+2x_4=2c \\ x_1+2x_2+3x_3+x_4=bc \\ -2x_1-x_2+ax_4=c \end{cases}$ (a,b,c は定数)

(答え：Case $b\neq 1$: 解なし, Case $b=1, a=1$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

Case $b=1, a\neq 1$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$)

[2] 掃出し法により次の行列の逆行列を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(答え：(1) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 4 & -1 \\ -2 & 0 & -2 & 2 \\ 7 & 1 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & -a & ab-c \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$)

[3] 掃出し法により次の行列の計算を行え。

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ と $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ にたいし $A^{-1}B$。　(答え：$\begin{pmatrix} 6 & -4 & 8 \\ -2 & 7 & -3 \\ 1 & -6 & 1 \end{pmatrix}$)

[4] 次の連立方程式が自明でない解をもつための λ の条件を求め，さらにそのときの解を全て求めよ。

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+\lambda x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+x_2+\lambda x_3+x_4=0 \\ x_1+x_2+x_3+\lambda x_4=0 \end{cases}$$

(答え：$\lambda=1$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\lambda=-3$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$)

[5] α,β,γ を　ABC の内角の和とするとき次の連立方程式は自明でない解をもつことを示せ。

$$\begin{cases} \cos 2\alpha\cdot x_1+\cot\alpha\cdot x_2+x_3=0 \\ \cos 2\beta\cdot x_1+\cot\beta\cdot x_2+x_3=0 \\ \cos 2\gamma\cdot x_1+\cot\gamma\cdot x_2+x_3=0 \end{cases}$$

線型代数演習 (IV)(線形空間, 基底, 行列の階数)

[1] 次の線型空間の次元と一組の基底を求めよ。

(1) $\{\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$ (答え：2 次元。$< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} >$)

(2) $\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 | \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \}$ (答え：2 次元。$< \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} >$)

(3) $\{A \in M(n) |\ trA = 0\}$ (答え: $n^2 - 1$ 次元。基底は自分で考えよ。)

(4) $\{A \in M(n) | A = {}^t A\}$ (答え: $n(n+1)/2$ 次元。基底は自分で考えよ。)

(5) $\{A \in M(n) | A + {}^t A = 0\}$ (答え: $n(n-1)/2$ 次元。基底は自分で考えよ。)

(6) $\{f(x) \in \mathbb{R}[x] |\ \int_{-1}^{1} f(x) = 0,\ \deg f(x) \leq 3\}$ (答え: 3 次元。$< x, x^2 - \frac{1}{3}, x^3 >$)

(7) $\{(a_n)_{n \geq 0} |\ a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3}\}$ (答え: 3 次元。基底は自分で考えよ。)

(8) $\{y = f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} |\ f(x)$ は無限階微分可能, $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + y\}$ (答え: 3 次元。)

[2] n を自然数とする。V を次数が n 以下の多項式全体のなす線型空間とする。$v_0 = f(x)$ を n 次多項式として $v_k = f^{(k)}(x)$(k 階導関数) とするとき, $< v_0, v_1, \ldots, v_n >$ は V の基底であることを示せ。eb

[3] $m \times n$ 行列 A, B にたいし $rank(A+B) \leq rank(A) + rank(B)$ を示せ。また等号が成り立たない例も作れ。

[4] $l \times m$ 行列 A と $m \times n$ 行列 B にたいし $rank(AB) \leq \min\{rank(A), rank(B)\}$ を示せ。また等号が成り立たない例も作れ。

[5] $n \times n$ 行列 A, B にたいし $AB = O$ なら $rank(A) + rank(B) \leq n$ であることを示せ。

[6] 与えられた $n \times n$ 行列 A にたいし $AB = O$ かつ $rank(A) + rank(B) = n$ となる $n \times n$ 行列 B が存在することを示せ。

[7] $n \times n$ 行列 A, B にたいし $A + B = \mathbb{E}_n$ かつ $AB = O$ なら $rank(A) + rank(B) = n$ であることを示せ。

[8] $m \times n$ 行列 A にたいし $rank(A) = 1$ であることと $m \times 1$ 行列 B と $1 \times n$ 行列 C が存在して $A = BC$ と書けることは同値であることを示せ。

科目名　数学基礎 II　　**担当教官**　栗田 英資

サブタイトル　線形代数

対象学年　１年　　**1.5 単位**　**必修**

教科書　斉藤正彦著，“基礎数学１，線形代数入門”　東京大学出版会
参考書　斉藤正彦著，“基礎数学４，線形代数演習”　東京大学出版会

予備知識

特に仮定しない

講義内容

前半は 2 行 2 列行列に話を限り，後半で一般の行列の場合を行った．具体的な講義内容は以下の通り：

1. 二次元の線形変換
   - 図形を線形変換してみる．
   - ベクトル．直線のパラメータ表示．線形性．
2. 二変数の連立一次方程式
   - 解の次元．逆行列．行列式．
3. 一般の行列の定義と演算
4. 行列の基本変形
   - 基本変形の行列表示．ランク．逆行列の計算法．
5. (一般の) 連立一次方程式

講義の感想

講義を通じて，できる限り平易に解説を心がけた．

参考資料

期末試験

教科書と参考書の問題から出題した。

1. 次の行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

に逆行列があれば求めよ．

2. パラメータ a, b を含む次の連立一次方程式を解け.

$$\begin{aligned} 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 2 \\ -x_1 + \ \ x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ \ x_4 &= b \\ -2x_1 - \ \ x_2 \qquad\quad + ax_4 &= 1 \end{aligned}$$

3. $n \times n$ 正則行列 A の第 i 行と第 j 行を交換した行列を B とする。B の逆行列 B^{-1} は A^{-1} にどの様な変形を施したものか。

4.1. 平面上, 原点を通り x 軸から正の向きに角 θ の方向にある直線に関する折り返しは、線形変換を引き起こす。この線形変換を表現する行列を求めよ。

4.2. 平面の, 原点のまわりの回転は, 原点を通り, 軸に対して互いに対称な二直線に関する折り返しの積として表せる事を示せ.

科目名　　**数学展望 I**　　　　**担当教官**　**行者 明彦**

サブタイトル

対象学年　　**１年**　　　　**２単位**　　**選択**

教科書　なし
参考書　高木貞治，近世数学史談，共立
高木貞治，初等整数論講義，岩波
日本数学会編，数学辞典（第 3 版），岩波
G. Polya，帰納と類比，丸善

予備知識

特に仮定しない

講義内容

講義のテーマ：

１．19 世紀中頃までの数学のハイライト.

２．数学を専攻するとどんなことを勉強するのか，一通り紹介すること.

時間に限りがあるので，代数と解析に話を限る.

内容は：

冪級数（収束半径，解析関数，複素関数論，母関数）.

三角関数のｎ倍角の公式，チェビシェフ多項式とその母関数.

円周等分問題（初等整数論，有限体，ガウスによる解法）.

曲線の長さと楕円関数（講義ではレムニスケート関数のみを扱った）.

レムニスケート関数が振り子の運動の記述に現れること（微分方程式）.

楕円関数の周期性を，前項の物理的イメージで説明.

さらにレムニスケート関数の虚数乗法により二重周期性を証明した.

楕円曲線の等分問題と，それが楕円関数の二重周期性の発見のきっかけを与えたことの解説.

楕円曲線の等分方程式の可解性，アーベル方程式，ガロワ理論の紹介（環，体）.

その他，学生からの希望により，リーマンのゼータ関数についても解説した.

1 回目（4 月 16 日）複素数.

（１）複素平面，絶対値，偏角，極表示，複素共役の復習.

（２）ガウス整数の環を仮に「複素整数」と呼び，そこにおける素数にあたるものを仮に「複素素数」と呼ぶことにし,「複素素数」をどのように定義するべきかについて考えた.

その上で有理整数 ｎ について

「ｎ は複素素数でない」

「n は二つの平方数の和として表わされる」

「n は４で割ると１余る」

という３条件のうち，後の２条件については講義中に数値実験を行い，詳細な考察はレポート課題とした．

２回目（4 月 23 日）「冪級数展開」の導入．

（１）「ヴォルテール著，哲学書簡」を取上げて，微積分学の与えた影響について解説した．

（２）収束などの正当化はいったん忘れることにして，冪級数展開を導入した．

３回目（5 月 7 日）「冪級数展開」の正当化．

（１）冪級数の収束半径について，証明のアイデアを示した．

（２）$\sin(\pi/6)$ の数値計算により，冪級数展開が実際に目的の関数に等しいことが確からしいとの証拠を与えた．

（３）小テストを実施した．範囲は「冪級数展開」．同時に授業に対する「感想・要望・批判など」を提出してもらった．

４回目（5 月 14 日）指数関数．

（１）指数関数の復習．

（２）指数関数の変数が複素数になると，それが三角関数で表わせること（オイラーの等式）を示した．証明は，冪級数展開によるものと，微分方程式によるものと，二通り与えた．

（３）項目（２）の批判として，複素変数に対しては指数関数を定義していなかったことを指摘した．

（４）さらに項目（３）の批判として，定義の拡張の任意性を指摘した．

５回目（5 月 21 日）複素関数論．

（１）複素数の範囲で微分可能な関数（＝解析関数）に対して，冪級数展開が正当であるという事実を紹介した．

（２）「解析接続」の紹介．

（３）解析接続の例として，リーマンのゼータ関数を紹介した．

６回目（5 月 28 日）リーマンのゼータ関数．

（１）ゼータ関数を，１より大きな実数に対して定義し，次に正の実数にまで定義域を拡張し,「もっと，くふうすれば」１を除く全ての複素数に対して定義できるという事実を紹介した．

（２）ゼータ関数の関数等式を紹介した．

（３）ゼータ関数がオイラー積を持つことを証明した．オイラー積があるおかげで，ゼータ関数を研究すると素数の性質がわかることを指摘し，リーマン仮説を仮定してリーマンが素数定理を証明したことを話した．また素数定理は，その後リーマン仮説よりも弱い事実を用いて証明できたが，リーマン仮説そのものは未解決であることを話した．

（４）ゼータ関数の特殊値についての，オイラーの（heuristic な）「証明」のアイデアを紹介し，この「証明」を実行することは演習問題とした．

７回目（6 月 4 日）倍角の公式．

（１）三角関数がオイラーの等式により指数関数であらわせることを注意した．

（２）この注意だけで，２倍角の公式と３倍角の公式が，簡単に導けることを示した．

（３）チェビシェフ多項式（＝ｎ倍角の公式）の母関数を考えて，それの漸化式を求めた.

（４）漸化式により，４倍角の公式と５倍角の公式も求めた.

８回目（6 月 11 日）正多角形の作図.

（１）5 倍角の公式から，$\cos(2\pi/5)$ を求め，その値が平方根のみで表わされることから，正 5 角形が作図可能であることを示した.

（２）$\cos(2\pi/17)$ も平方根のみで表わされることを紹介し，従って正 17 角形が作図可能であることを示した.

（３）さらに一般に正多角形が作図可能であるための必要十分条件（ガウスの定理）を紹介した.

９回目（6 月 18 日）レムニスケートの等周問題.

（１）曲線を粒子の運動の軌跡ととらえ,

「時間微分＝速度ベクトル」

「速度ベクトルの大きさの積分＝軌跡の長さ」

を解説した．ついでに,

「時間に関する２階微分＝加速度ベクトル」

「加速度×質量＝力」

を復習した.

（２）楕円の周長を求め,「第２種楕円積分」を導入した.

（３）レムニスケートの周長を求めると「第１種楕円積分」になることを紹介し，その逆関数として（楕円曲線 $y^2 = x^4 - 1$ に付随する特別な）「楕円関数」を導入した（これをレムにスケート関数と呼ぶ）.

（４）前回の講義と同様にして，レムニスケートの等周問題が考えられることを指摘し，この問題が１９世紀の数学において極めて重要な意味を持ったことを解説した.

１０回目（6 月 25 日）楕円関数.

第１種楕円積分の逆関数として楕円関数を導入する部分がわかりにくい様子だったので，この個所を以下のように解説した．最初に以下の項目について，演習問題を解いた.

（１）逆関数.

（２）逆三角関数.

（３）逆三角関数の出てくる定積分.

以上の準備のもとに,

（４）積分

$$x = \int_0^y 1/\sqrt{1-x^2}dx$$

で定まる関数の逆関数として $y = \sin x$ を定義することもできたはずだったことを注意した.

（５）同様に，積分

$$x = \int_0^y 1/\sqrt{1-x^4}dx$$

で定まる関数の逆関数として「サイン関数もどき」が定義できることを指摘し，こうして $y = \mathrm{sn}\, x$ を定義し，これを「楕円関数」（正確には，その特別のものである「レムニスケート関数」）と呼んだ.

１１回目（7 月 2 日）楕円関数の周期性.

最初に以下の項目について，演習問題を解いた.

（１）置換積分．とくに第１種楕円積分の変形.
（２）１階の微分方程式の解法.
（３）２階の微分方程式の解法.
以上の準備のもとに,「時刻０で真下にあり，最大 $\pi/2$ まで振れる，振り子の運動」を解析し，そこにレムニスケート関数が現れることを見て，その周期性を示した.

１２回目（7 月 9 日）整数論，環，体．
（１）「法（modulo）」という概念を導入し，例として，整数全体を　mod 5 で考えた集合には，四則演算が実行できることを示した.
（２）整数全体を　mod 6,　mod ７,　mod 11 で考えたときの積の一覧表を，全員で手分けして黒板の上で計算した.
（３）こうして法が素数なら，四則演算が可能であることを見て,「有限体」，あるいはより一般に「体」の概念を導入した.

１３回目（7 月 16 日）円周等分問題（正多角形の作図についての，解説の続き）．
（１）整数全体を１７を法として得られる有限体の０以外の元が，３の巾になることを示した.
（２）ガウスに従って，円周の 5 等分と 17 等分の方程式を解く.（この項目については，全員で手分けして黒板の上で計算して，このことを見た.）

１４回目（7 月 23 日）楕円関数の二重周期性．
（１）積分
$$t = \int_0^x 1/\sqrt{1-x^2}dx$$
で定まる関数の逆関数として $x = \sin t$ を定義すると $x = \sin t,\ y = (\sin t)'$ とが，円周のパラメタ表示を与えることを示す.
（２）cos のｎ倍角の公式と平行して，sin のｎ倍角の公式を考察した.
（３）三角関数から円周が得られるのと同様にして，楕円関数から得られる曲線を楕円曲線と呼ぶ.
（４）cos のｎ倍角の公式と平行して，sin のｎ倍角の公式を考察した.
（５）レムニスケート関数について，3 倍角の公式と 5 倍角の公式を紹介した.
（６）楕円曲線のｎ等分の方程式が n^2 個の解を持つことを紹介し，そのことが，楕円関数の二重周期性の発見の糸口になったことを解説した.
（７）前回の講義で楕円関数が周期を持つことを，物理的に示したが，さらにレムニスケート関数が虚数乗法を持つことを利用して，楕円関数が２重周期関数であることを示した.

以下の項目については，話したかったが，時間切れで話せなかった.
（８）円周をｎ等分するという，特殊ｎ等分問題と同時に，円周の一部をｎ等分するという，一般ｎ等分問題が考えられることを指摘する.
（９）楕円関数のケースでも，同様に二つの問題が考えられるが一般等分方程式のほうは巾根のみで解ける（アーベル）.
（１０）レムニスケート関数のケースでは，特殊ｎ等分方程式が平方根のみで解けるための必要十分条件は，同じｎに対して，円周の特殊ｎ等分方程式が平方根のみで解けることである（アーベル）.

（１１）円周の場合の一般３等分問題が，平方根のみでは解けないことを解説し，ガロワ理論を簡単に紹介する．

講義の感想

講義内容はかなり「重く」なり,「全部わかった」というわけにはいかなかったと思いますが，未知の世界が広がっているということを知り，興味を持ってもらえたら，幸いです．

科目名　数学演習 I　　**担当教官**　金井 雅彦

サブタイトル

対象学年　１年　　**２単位**　**選択**

教科書　なし
参考書　なし

予備知識

仮定しない

講義内容

この演習科目の目的は，具体的な問題を解くことを通じ,『数学基礎 I・II 』の講義内容に対する理解を補強すると伴に，数学的な思考方法を獲得することにある．

実際にこの科目で取り扱った話題のうち主なものを列挙する．

- 数列の極限 — フィボナッチ数列・黄金比の無理数性・３項間漸化式・有界単調数列・近似計算
- 連続関数 — 中間値の定理とその応用
- 連立１次方程式 — ガウスの消去法・解の存在と一意性・逆行列
- 行列式 — 置換とその符号・行列式の定義・行列式の計算方法

数学基礎 I・II の講義がある程度進むまでは，講義とは独立に微積分の基礎となるべき話題，すなわち，数列の極限，および連続関数に関連する比較的簡単な演習問題を出題した．その後，話題を線形代数に転じ，まずは連立１次方程式の解法とその周辺の基本的な話題をいくつか取り扱った．さらに，一学生の要望に基づき，行列式に関し，基本的な事柄の解説と，計算練習を行った．

講義の感想

科目名　数学演習 I　　**担当教官**　木村 芳文

サブタイトル

対象学年　１年　　**２単位**　**選択**

教科書　特になし
参考書　特になし

予備知識

特に仮定しない

講義内容

昨年度から導入した一年生に対する少人数クラスの演習を今年度も担当した．高校からの数学との橋渡しをある程度個々の学生に則して行うことを目的にしており，問題数をこなすと言うよりはむしろ少ない数の重要な問題をゆっくり理解することに努めた．授業の内容をなるべく把握し，ある時には理解を助けるための問題を用意し，またあるときには違った視点からの解説を加えたりした．

具体的内容としては

1. 数列の収束
    - 収束の概念
    - コーシー列の収束
    - ニュートン法
2. 級数の収束
    - 調和級数
    - 積分判定法
3. 関数項級数
    - 一様収束
4. 連立方程式の理論
    - 行基本変形
    - 斉次方程式の解
5. 線形空間
    - 線形写像
    - 核と像

このうち糸健太郎助手に一回代講をお願いした．

講義の感想

出席状況や学生の反応を見る限りかなりの手ごたえを感じた．学生の雰囲気は大変明るく意欲的に参加していたと思う．いつも言うことであるが少人数クラス演習はある意味では大変に贅沢な授業形態であるが，ある程度の効果を上げるのであれば研究科の理解が得られる限り積極的に続けることが重要だと思う．

科目名　　**数学演習 I**　　　　**担当教官**　**吉田 健一**

サブタイトル　１年前期演習 (微積分と線形代数)

対象学年　　**１年**　　　　**２単位**　　**選択**

教科書　理工系の微分積分学 (吹田信之，新保経彦)
理系の基礎数学，線形代数学 (江尻典雄)

参考書

予備知識

特に仮定しない

講義内容

１年生向けの微積分と線型代数学の演習をおおむね講義にそって交互に行った．
具体的な講義内容は以下の通り：

1. 数列の極限
2. 線形独立性 (平面ベクトル，空間ベクトルが中心)
3. 初等関数 (双曲線関数を通して，グラフ，逆関数を学ぶ)
4. 連立一次方程式の解法 (I) ガウスの消去法
5. 初等関数 (II) 逆三角関数，微分可能性
6. 連続性，導関数，高次導関数，ライプニッツの公式
7. 逆行列の計算，連立一次方程式と行列
8. テーラー展開
   (a) 平均値の定理
   (b) テイラーの展開とその応用
   (c) 極限値の計算 (ロピタルの定理)
   (d) 行列式 (サラスの方法など)

講義の感想

朝早い時間の授業にも関わらず，割と良く出席してくれた．内容的には，積分計算，行列式が時間切れとなってあまりできなかったのが残念だった．全般的には，微積分の極限の取り扱い，論理的な演習問題に関する反応が悪かった．

科目名　数学演習 I　**担当教官**　佐藤 猛

サブタイトル

対象学年　１年　**２単位**　**選択**

教科書
参考書

予備知識

なし

講義内容

合計で 55 問出題した．ただし小問に分かれた問題があるので実際は 55 問より多い．配布した問題プリントの表題は以下の通り：

- 簡単な不等式と数列の極限
- 収束性の判定
- 行列の表す変換
- コーシー列，2×2 行列と一次方程式
- 行列の積と逆行列，数列の絶対収束
- 連続関数，逆行列の計算
- 論理の初歩，とくに否定の作り方
- 中間値の定理と最大値の定理，正則行列
- 微分，行列の基本変形
- ロルの定理とテイラーの定理，基本変形と階数
- テイラーの定理，逆行列の計算
- 関数の凸性
- 積分，連立一次方程式と行列の階数

講義の感想

科目名　　　**数学基礎 V**　　　　　　　　　　**担当教官**　**服部 哲弥**

サブタイトル

対象学年　　　**２年**　　　　　　　　　　　　**1.5 単位**　**必修**

教科書　　複素解析学１，志賀啓成著，培風館
参考書　　解析概論，高木貞治著，岩波書店

予備知識

数学基礎 I および数学基礎 III の内容を既知とする．

講義内容

- 微分可能性（定義，コーシー・リーマンの関係式，正則関数）
- 線積分（定義，項別積分，不定積分）
- コーシーの積分定理，コーシーの積分公式
- べき級数（収束半径，べき級数の正則性，項別微分，exp(z)）
- テーラー展開（テーラー係数の積分表示，零点の孤立，モレラの定理，一致の定理）
- ローラン展開，極，留数定理

講義の感想

共通教育ということもあって，２年の必修講義の中でただ一つ演習がない．せっかく演習問題集を自作して用意したが，生かしきれなかったかも知れない．T.A. の日向氏には平均１週おきにレポートの採点と模範解答作成をしていただいたが，たいへん丁寧な仕事ぶりで，大いに助かった．日向君の多大の働きがなければ６回のレポートは採点不能であった．なお，リーマン面，$\log z$, $\sqrt{z}$ は間に合わなかった．

参考資料

第１回試験　2001.06.12

1 (35).　　$r > 0$ に対して C_r を中心 $a \in \mathbb{C}$ 半径 $r > 0$ の円を反時計回りする複素平面 $\mathbb{C}$ 上の曲線，また， n を非負整数とするとき，

$$\int_{C_r} (z-a)^n \, dz \quad \text{および} \quad \int_{C_r} \frac{1}{(z-a)^n} \, dz$$

を計算せよ．

2 (35). 正定数 M, δ, R_0 があって，$|z| > R_0$ で定義された複素関数 f が定義域上で $|f(z)| \le M|z|^{-1-\delta}$ を満たすならば,

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{|z|=R} f(z)\,dz\right| = 0$$

となることを証明せよ.

3 (30). $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}\,dx$ は $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ の何倍か？コーシーの積分定理を用いて答えよ.

第２回試験　2001.09.11

1 (30). $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+4\sin x}\,dx$ を，複素積分を利用して求めよ.

2 (30). $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx$ を，複素積分を利用して求めよ.

3 (30). $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-\sqrt{-1}x}}{x^2+1}\,dx$ を，複素積分を用いて求めよ（分子指数部の符号を意識していることが明確な答案にすること）.

4 (30). $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{x^3+1}\,dx$ を，複素積分を利用して求めよ.

科目名　　抽象ベクトル空間　　　　　　**担当教官**　中西 知樹

サブタイトル

対象学年　　２年　　　　　　**４単位**　　**必修**

教科書
参考書　砂田利一「行列と行列式 2 」岩波書店のうち第５，６章を著作権法第３５条に基づき複製したもの

予備知識

１年における線形代数の一通りの経験．特に１次方程式を解くことができること

講義内容

1. 講義の目的と概要 (初回講義配布資料「講義アウトライン」より引用)

講義の目的：

線形構造は数学のいたるところに現れる最も基本的な数学構造 (mathematical structure) である．この後にみなさんが学ぶものの中から例をあげれば，関数空間とその上の線形作用素（解析学），多様体における接空間やホモロジーなどの不変量（幾何学），種々の代数構造とその作用域，体の拡大（代数学）などがあり，これらはすべてそれぞれの理論の根幹に関わる基礎的な働きをする．例えて言えば，大学およびそれ以降の数学における線形代数は，高校までの数学における四則演算と同じ基礎的でかつ重要な役割を演じる．したがって，線形代数の基礎事項の確実な理解がなければ，以後の数理学科の講義が全く理解不能になる．この講義の目的は，みなさんがこれらの線形代数の基礎事項を確実に取得することにある．

講義内容：

みなさんが道に迷わないように講義を３つのパートに分割する．

Part 1. ベクトル空間と線形写像（５回）

１年の線形代数の講義が教官により異なっていることを考慮し，復習をかねて，線形代数におけるもっとも基礎的な事項からもう一度はじめる．ベクトル空間，部分空間，一次独立性，基底，次元，線形写像，全射，単射，Kernel，Image，同形写像，線形写像の表現行列などの諸概念を一点のあいまいさもなく理解をしておくことがこのパートの目標である．２年以降，これらが講義で説明されるのはこれが最後になる．まだ，これらを確実に取得してないと感じている人はここでがんばらなければあとで必ず後悔することになる．

Part 2. ベクトル空間の抽象的な扱い（３回）

２０世紀に入り数学は「集合論 (the set theory)」（のちに「圏論（the category theory)」）を基礎として再構成がなされた．ベクトル空間も応用において「集合論」な扱いがなされることが多い．ここでは，商空間，部分空間と商空間の「双対性」，双対空間，Hom 空間，直和と射影，などを学びこのような抽象的な扱いに慣れはじめよう．商空間は「集合と位相」の講義に出てくる「商集合」などの良い例題にもなっている．「線形写像における準同形定理」を理解することがこのパートの頂上である．

Part 3. 固有値問題と行列の標準形（５回）

固有値問題と行列の対角化が関連していることは，１年の線形代数の講義で学んだと思う．はじめに，これらを復習したあと,「対角化できない場合」にどうなるのか，その先を学ぶ.「ジョルダン標準形」とは何か，どのような性質をもっているのかを把握するのがこのパートの頂上である．

2. 実際に行った各講義の内容

4/18 Part 1-1 ベクトル空間. 0. 線形代数学とは. 1. 線形構造とベクトル空間 (定義, 例) 2. 体 (定義, 例は **Q**, **R**, **C** のみ) 3. 線形結合 (定義, 基本性質)

4/25 Part 1-2 部分空間/線形独立. 1. 部分空間 (定義, 基本性質, 例, ベクトルの生成する部分空間, 有限次元と無限次元) 2. 線形独立 (定義, 基本性質, 意義)

5/2 休講.

5/9 Part 1-3 基底と次元. 1. 基底 (定義 (有限次元場合のみ), 例, K^n の標準基底, 意義, 基底の存在) 2. 次元 (定義, 次元 (基底の元の個数) の一意性) 3. 線形写像 (定義, 構造と準同形, 例)

5/16 Part 1-4 線形写像. 1. 線形写像の基本性質 (0 の像は 0, 線形結合の保存) 2. 重要な例 $\varphi : K^n \to K^m$ (行列, $\varphi : K^n \to K^m$ と行列の１対１対応) 3. $\mathrm{Im}\,\varphi$ と $\mathrm{Ker}\,\varphi$ (部分空間となること, 次元定理, 写像の rank, 行列の rank との関係)

5/23 Part 1-5 同形写像/表現行列. 1. 全射, 単射, 全単射 (定義, 逆写像, 全単射の意義 (同一視), 線形写像の場合の基本性質, 単射の φ による特徴づけ) 2. 同形写像と同形 (定義, 意義, 同値関係をなすこと, 有限次元のとき次元が等しければ同形) 3. 表現行列 (定義と公式の導出, 例)

5/30 Part 1 確認テストおよび Part 2-1 商空間 1. 同値関係と商集合 (定義, 例, 意義, 標準射影) 2. 商空間 (定義, 例, 線形構造が well-defined, 標準射影, 次元)

6/6 Part 2-2 双対空間/直和空間. 1. 双対空間 (定義, 線形構造, 例, 双対基底, 次元) 2. 外部的直和 (定義, 線形構造, 例, 基底, 次元)

6/13 Part 2-3 直和空間/準同形定理. 1. 内部的直和 (和, 和の例, 直和条件, 定義, 直和分解, 意義, 基底, 次元) 2. 外部的直和と内部的直和の関係 (同形写像の構成) 3. 準同形定理

6/20 Part 2 確認テストおよび Part 3-1 固有ベクトルと固有空間. 1. 線形写像と行列式 (定義, 正則性と行列式) 2. 基底の変換 (基底の変換行列, 表現行列の変換公式) 3. 固有ベクトルと固有空間 (定義, 固有空間の基本性質) 補講. (行列式について．１年青本さん講義受講者対象. 当日午後 40 分)

6/27 Part 3-2 線形写像の半単純性. 1. 固有空間 (直和条件) 2. 線形写像の半単純性 (定義, 意義, 固有基底と表現行列の対角性) 3. 固有値問題の解法 (解法, 例)

7/4 Part 3-3 Jordan 標準形 (1). 1. 行列の相似と対角化 (定義, 意義, 行列の対角化の実例, 行列の対角化可能性と対応する線形写像の半単純性の同値性) 2. Jordan 標準形 (Jordan block, Jordan 標準形, Jordan block と Jordan chain)

7/11 Part 3-4 Jordan 標準形 (2). 1. Jordan chain (定義, 基本性質, 表現行列が Jordan block の直和となる基底の条件) 2. 広義固有ベクトル (定義, Jordan chain との関係, 広義固有空間による直和分解 (主張のみ)) 3. Jordan chain たちからなる広義固有空間の基底の構成 (主張のみ) 4. Jordan 標準形の求め方 (例)

7/12 Part 3 確認テスとおよび Part 3-5 Summary. 1. Part 3 まとめ (Jordan 標準形の存在定理の意義) 2. Lecture まとめ (線形代数はなぜ線形「代数」と呼ばれるか) 講義補足ノート: A. 広義固有空間によ

る直和分解 B. Jordan chain たちからなる広義固有空間の基底の構成

9/12 成績評価試験.

講義の感想

受講者の多くの積極的な学習意欲がはっきりと感じられ, 気持ちよく講義ができた. 受講者のさらなる数学のレベルアップを期待する.

参考資料

期末試験問題 (１時間半，９点満点)

問 1. (半単純性と行列の対角化) (各１点, 計２点)

C 上の行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

の対角化可能性をそれぞれ判定せよ.

問 2. (Jordan 標準形) (各１点, 計２点)

(1) **C** 上のベクトル空間 V と線形写像 $\varphi : V \to V$ について以下のことが成り立つとする.

(i) $\dim V = 4$.

(ii) φ はただ一つの固有値 λ を持つ.

また, 行列 A は V のある基底に関する φ の表現行列であり, かつ Jordan block の直和であるとする. このとき A の可能な形をすべて挙げよ. ただし, Jordan block の順序を取り替えたものは区別しなくてよい.

(2) (i), (ii) に加えて, さらに

(iii) $N^{(k)} = \{\vec{v} \in V \mid (\varphi - \lambda)^k(\vec{v}) = \vec{0}\}$ とするとき, $\dim N^{(1)} = 2$, $\dim N^{(2)} = 4$.

が成り立つとする. このとき A を決定せよ. (Hint: 見かけは違うが Part 3 の確認テストで既にやった問題と本質的に同じ問題なので出来ないと思わないこと)

問 3. (基底, 直和) (各１点, 計３点)

以下の定理とその証明をよく読んで，途中の主張 1, 2, 3 を証明せよ.

定理. V を n 次元のベクトル空間, W を V の k 次元の部分空間 $(1 \leq k \leq n-1)$ とする. このとき, V の $n-k$ 次元の部分空間 W' で

$$V = W \oplus W' \qquad (\oplus \text{ は内部的直和})$$

となるものが存在する.

証明. 簡単のため $k = n-1$ の場合のみを考える. $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{n-1}$ を W の基底とする. また, $\vec{b}(\neq \vec{0})$ を W に含まれない V のベクトルとする. このとき

主張 1. $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{n-1}, \vec{b}$ は線形独立.

主張 2. $V = \langle \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{n-1}, \vec{b} \rangle$

が成り立つ. すなわち $\vec{a}_1$, . . . , $\vec{a}_{n-1}$, $\vec{b}$ は V の基底になる. このとき, $W' := \langle \vec{b} \rangle$ とおくと

主張 3. $V = W \oplus W'$

が成り立つ. 以上により $k = n-1$ の場合に定理が示された. (証明終)

問 4. (双対空間, 表現行列) (各１点, 計２点)
V を K 上のベクトル空間, $\vec{a}_1$, . . . , $\vec{a}_n$ を V の基底とする.
(1) V^* を V の双対空間とし, $\vec{a}_1^*$, . . . , $\vec{a}_n^* \in V^*$ を

$$\vec{a}_i^*(\vec{a}_j) = \delta_{ij} \quad (\delta_{ij}\text{: Kronecker のデルタ})$$

により定めると, $\vec{a}_1^*$, . . . , $\vec{a}_n^*$ は V^* の基底となることは講義で述べた ($\vec{a}_1$, . . . , $\vec{a}_n$ の双対基底). このうち, 特に $\vec{a}_1^*$, . . . , $\vec{a}_n^*$ の線形独立性を証明せよ.
(2) $\varphi : V \to V$ を線形写像とし, 基底 $\vec{a}_1$, . . . , $\vec{a}_n$ に関する φ の表現行列を $A = (a_{ij})$ とする. つぎに, 線形写像 $\phi : V^* \to V^*$ を, φ を用いて

$$\begin{array}{rccc} \phi : & V^* & \to & V^* \\ & f & \mapsto & f \circ \varphi \end{array}$$

と定める. このとき, 基底 $\vec{a}_1^*$, . . . , $\vec{a}_n^*$ に関する ϕ の表現行列は A の転置行列 ${}^tA$ となることを示せ. (Hint: (1) V^* の 0 ベクトル $\vec{0}_{V^*}$ は $\vec{0}_{V^*} : \vec{v} \mapsto 0$ ($\vec{v} \in V$) で与えられる. (2) ϕ の表現行列を $C = (c_{ij})$ と置くと, $\phi(\vec{a}_j^*) = \sum_{k=1}^{n} c_{kj} \vec{a}_k^*$ となる. この両辺を $\vec{a}_i$ に作用させると...)

科目名 **解析学序論** **担当教官** **中西 敏浩**

サブタイトル 微分積分学の基本と多変数関数の微分積分

対象学年 **２年** **４単位** **必修**

教科書 教科書はなし
参考書 田島一郎，解析入門
高木貞治，解析概論，岩波書店
J. ヨスト，ポストモダン解析学，シュプリンガー・フェアラー ク東京
溝畑茂，解析学小景，岩波全書
飯高茂，微積分と集合–そのまま使える答えの書き方，講談社

予備知識

１年次の必修科目（微分積分学，線形代数学）の基本的事項（数学基礎 I〜IV）

講義内容

微分積分学の初歩を講じる．前半では実数というものの特徴づけ，すなわち途切れのない実直線のイメージを形作る実数の公理系を考える．数列 $\{(1+n^{-1})^n\}$ それ自身が自然対数の底 e である（実際にはその Cauchy 列としての同値類だが）といった考え方もできることに気づかせる．高校の数学では直感的に扱われている実数列の収束や実数値関数の連続性，いくつかの初等関数などを厳密に述べる方法として ϵ-δ 論法などが使えるようにする．こうした実数論の準備のもとで１年生の微積分で習った項目を復習する．直感的には当たり前にみえることも「言葉で説明する」ためには例えばこのような議論が必要なのだということを学生に感じとってもらう．

授業の後半では多変数関数の微分積分学について学ぶ．微分については全微分可能性という概念についてよく理解してもらう．積分については１変数の場合と違って積分領域の形を気にしないといけないので面倒である．しかしこの面倒さを引き受けることによって面積や体積の概念は人間の「良識と思索」（溝畑）の産物であることがわかる．

具体的な講義内容は以下の通り：

1. 数列の収束（4 月 16 日，23 日）
   - ϵ-N 論法による数列の収束の定義.
   - 有界単調数列.
   - Cauchy 列.
   - 命題論理.
2. 実数を特徴付ける（5 月 7 日，14 日）
   - 上限と下限.
   - 実数の完備性.

- 集積値.
- 命題論理.

3. 連続関数（5 月 21 日，28 日）
    - ϵ-δ 論法による連続性の定義.
    - 中間値の定理.
    - 最大値・最小値の存在.
4. 微分法（5 月 28 日，6 月 4 日）
    - 微分可能性と導関数.
    - 指数関数・対数関数.
    - 微分法の応用 (極大・極小値).
5. 平均値の定理と Taylor 展開（6 月 4 日）
    - Rolle の定理・平均値の定理.
    - 高階微分.
    - Taylor 展開.
    - 凸関数.
6. 多変数関数の微分（6 月 11 日，18 日，25 日）
    - 多変数関数の連続関数.
    - 偏微分.
    - (全) 微分可能性.
    - 合成関数の微分.
    - 多変数関数の極値問題.
7. 積分法（6 月 25 日，7 月 2 日）
    - 古代の求積法.
    - 定積分.
    - 不定積分と微分積分学の基本定理.
8. 重積分（7 月 9 日，16 日）
    - 重積分の定義.
    - Darboux の定理.
    - 累次積分と積分の順序の交換.
    - 変数変換.

講義の感想

高等学校・大学１年次の微分積分学の積み重ねにどれぐらい期待してよいのかわからず，また項目によっては習っていない学生がいたので１年次で習うはずの微積分のほとんどの項目を復習する形となった．ただし最初に実数論や ϵ-δ 論法，命題論理を紹介し，それらを用いて厳密な議論を展開したつもりである．しかし ϵ-δ 論法 (ϵ-N 論法) は，例題をなんども繰り返したり演習問題の答案の誤った箇所を取り上げて解説するなどしないとなかなか理解してもらえない（というより慣れてもらえない）．授業で聴くとわかった気がするが，小テストで ϵ-δ 論法に関する問題がでるとどのように手を付けてよいのかわからないという感想を述べる学生が多い．実際

２つの数列 $\{a_n^{(1)}\}, \{a_n^{(2)}\}$ がそれぞれ $a^{(1)}, a^{(2)}$ に収束するならば，任意の正数 ϵ に対してある番号 N が存在して $N < n$ ならば

$$|a_n^{(1)} - a^{(1)}| < \epsilon,\ |a_n^{(2)} - a^{(2)}| < \epsilon$$

が同時に成り立つことを証明せよ．

といった問題でも満足できる解答が書けた学生は半数にも満たなかった．過去に習ったことを復習することは今年度からの学部教育の再検討の趣旨からはずれていないと考えるが，旧カリキュラムでは多変数の微積分を教えることになっているので教えるべき項目の配分にとても悩んだ．実際，1 変数の微積分に時間をとられすぎて多変数（特に積分）に関する項目については厳密な理論を展開する余裕はなく深みに欠いた講義をしてしまった．現行の解析学序論は内容が多すぎる．旧カリキュラムの学生がいなくなった時点でこの授業で教えるべき項目を少なくする方向で検討するべきである．

小テストや期末試験の答案を見て，自分がわからないところは保留しておく態度がないのが気にかかる．受験勉強時に試験対策としてわからなくても何かを書いておけという指導を受けたのだろうか．たとえば開区間上の連続関数なのに最大値の存在を仮 定するなど苦し紛れに自分の都合に合わせて物事を考えてしまう．特に理系の学問を学ぶ者にとってこうした態度は問題である．

受講生の数が 90 名というのは多すぎる．他大学（一部の私立は除く）の数学科の授業の受講生の 2 倍はいる．実際の受講者数はそれよりは少なかったが，それでも毎回小テストやレポートを課すという方法はたいへんな負担であった．

参考資料

試験問題　2001.07.23

問題 1(実数の性質・数列)　$I = [0, 1]$ (0 と 1 との間の閉区間) とし写像 $f : I \to I$ は次の条件をみたすとする。

$0 < r < 1$ をみたす実数 r が存在して $x, y \in I$ ならば $|f(x) - f(y)| < r|x - y|$.

(1) $a \in I$ とし、$a_1 = f(a)$ 以下帰納的に a_n が定まったら $a_{n+1} = f(a_n)$ とおく。このとき $\{a_n\}$ は Cauchy 列となることを証明せよ (20 点)

(2) $f(x) = x$ をみたす $x \in I$ がただ一つだけ必ず存在することをしめせ (5 点)

問題 2 (連続関数) $f(x)$, $g(x)$ をともに区間 (a,b) で定義された連続関数とする。

(1) $f(x)+g(x)$ が連続関数であることの証明を ϵ-δ 論法をつかって記述せよ (10 点)

(2) $h(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ を各 $x\in(a,b)$ に $f(x)$ と $g(x)$ の大きいほうの値を対応させる関数とする。このとき $h(x)$ も連続関数であることの証明を ϵ-δ 論法をつかって記述せ (10 点)

(3) $|f(x)|$ が連続関数であることを証明せよ (5 点)

問題 3 (多変数関数の極値) 境界つき円板 $\{(x,y) : x^2+y^2\le 1\}$ の点 $X(x,y)$ で $P(1/2,1)$, $Q(1/2,-1)$, $R(-3/2,0)$ からの距離の自乗の和

$$\overline{XP}^2+\overline{XQ}^2+\overline{XR}^2$$

が最小になるものを求めよ。

問題 4 (重積分)

(1) xy 平面内の領域 $D=\{(x,y):0<x,0<y,x+y<1\}$ を考える。変換 $x=u-uv$, $y=uv$ によって D に写される uv 平面内の領域を図示せよ (10 点)

(2) 変換 $x=u-uv$, $y=uv$ の Jacobi 行列

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$$

を計算せよ。(5 点)

(3) 積分 $\displaystyle\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy$ を計算せよ (10 点)

再試験問題　2001.09.14

問題 1(実数の性質・数列) 数列 $\{a_n\}$ は次の条件をみたすとする。

$$\text{ある } 0<r<1 \text{ が存在して} \quad |a_{n+1}-a_n|<r|a_n-a_{n-1}|.$$

以下の問いに答えよ。

(1) $n>1$ のとき $|a_{n+1}-a_n|<r^{n-1}|a_2-a_1|$ をしめせ。

(2) $m>n>1$ であるとき

$$|a_m-a_n|<\frac{r^{n-1}}{1-r}|a_2-a_1|$$

であることをしめせ。((1),(2) を合わせて 5 点)

(3) $\{a_n\}$ が Cauchy 列であることを示したい。すなわち任意に正数 ϵ を与えたとき、ある番号 N が存在して $N\le n<m$ ならば $|a_m-a_n|<\epsilon$ が成り立ってほしい。N をどのように選べばよいか？(10 点)

(4) 数列 $\{a_n\}$ を $a_1=1$ とし、以下

$$a_{n+1}=\frac{1}{2+a_n}$$

で定める。上の設問を参考にして a_n の極限値を求めよ。(10 点)

問題 2 (連続関数) $f(x)$, $g(x)$ をともに区間 (a,b) で定義された連続関数とする。

(1) α,β を実数とする ($\alpha\ne 0$, $\beta\ne 0$ としてよい)。$\alpha f(x)+\beta g(x)$ が連続関数であることの証明を ϵ-δ 論

法をつかって記述せよ (10 点)

(2) a_1, a_2, b_1, b_2 を実数で $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$ とする。このとき $\min\{a_1, a_2\} < \min\{b_1, b_2\}$ であることをしめせ。また ϵ を実数 (正数でなくてもよい) とするとき $\min\{a_1 + \epsilon, a_2 + \epsilon\} = \min\{a_1, a_2\} + \epsilon$ であることをしめせ。(5 点)

(3) $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ を各 $x \in (a, b)$ に $f(x)$ と $g(x)$ の小さいほうの値を対応させる関数とする。このとき $h(x)$ も連続関数であることの証明を ϵ-δ 論法をつかって記述せよ (10 点)：(2) の問題は一つのヒントになっている。

問題 3 (多変数関数の極値) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y$ とする。

(1) $f(x, y)$ の極値があればそれらを求めて、さらに極大であるか極小であるかについて判定せよ。

(2) 集合 $\{(x, y) : 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2\}$ 上での $f(x, y)$ の最大値、最小値を求めよ。

問題 4 (重積分)

(1) xy 平面内の領域 $D = \{(x, y) : 0 < y, x^2 + y^2 < x\}$ を考える。極座標による変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ によって D に写される $r\theta$ 平面内の領域を図示せよ (10 点)

(2) 積分 $\displaystyle\iint_D x^2 + y^2 dxdy$ を計算せよ (15 点)

科目名　**集合と位相**　**担当教官**　**藤原 一宏**

サブタイトル　数学的理解への誘い

対象学年　**２年**　**２単位**　**必修**

教科書　なし
参考書　松坂和夫，集合 · 位相入門，岩波書店
志賀浩二，集合への 30 講，朝倉書店
マグロウヒル大学演習，集合論，オーム社
志賀浩二，位相への 30 講，朝倉書店
マグロウヒル大学演習，一般位相，オーム社

予備知識

特に仮定しない

講義内容

数理学科進学後初めて講義を受ける人が多いこともあり内容を基本的な事項に絞り，概念的な理解，数学的な理解とは何かに触れてもらうことを目的とした．また，講義全体を通して数学的な世界観 (基本的なものから公理的に許された操作を適用することで作られるものを対象として認めるということ)，機能的な見方を強調した．「無限」をほとんど切り捨てたのは賛否両論があるのかも知れないが，この立場の方が実用的のみならずある意味より本質を浮き彫りにするといえよう．つまり，自然数，整数，分数，実数，数直線，平面，空間といった過程を経てから関数を対象とするようになり，関数空間や汎関数につながっていく数学の流れがより明らかになると考える．

具体的な講義内容は以下の通り：

1. 集合 (2.5 回)
   - 数学の普遍性
   - 元と部分集合，空集合，集合の記法 (外延的記法と内包的記法)
   - $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$
   - 有限集合と無限集合
   - 集合の演算 (1) 和集合，共通部分，補集合，分配則，de Morgan の法則，ベキ集合，特性関数，積集合
2. 写像 (2 回)
   - 写像の定義，全射，単射，全単射
   - 写像の合成，恒等写像，逆写像，全単射と逆写像の存在の同値性
   - 写像の標準分解，包含写像の単射性
   - 関数とは

- 写像とグラフ: グラフの定義，逆写像のグラフとの関係

3. 同値関係と商集合 (1.5 回)
    - 同値関係の定義
    - 同値関係と類別
    - 集合の演算 (2)：商集合
    - well-defined
    - $\mathbf{Z/nZ}$, $\mathbf{R/Z}$, $\mathbf{R^2/Y}$ (Y: 線形部分 空間)
    - $\mathbf{R}$ 上の周期関数と $\mathbf{R/Z}$
    - $\mathbf{R/Z}$ が円であること
4. $\mathbf{R}$ の距離と開集合，閉集合（1.5 回）
    - 導入: 基本的な $\mathbf{R}$ の部分集合は何か，開集合の必要性
    - $\mathbf{R}$ の開集合と $\mathbf{R}$ 上の連続関数の関係 (1)
    - ユークリッド空間: ユークリッド距離とその性質，Cauchy-Schwartz 不等式.
    - ユークリッド空間の開集合の定義と基本的な性質
    - 集合についての補足: 集合族と共通部分，和集合，可算無限，非可算無限，連続体
5. 距離空間と位相（1.5 回）
    - 距離関数と距離空間
    - 開球体，開集合，開被覆
    - $\mathbf{R}$ の開集合と $\mathbf{R}$ 上の連続関数の関係 (2)
    - 開集合全体のもつ性質，距離空間から定まる位相空間
    - 部分集合の逆像
    - 写像の連続性 (1): 連続写像，開集合の逆像は開集合，ϵ-δ 論法との関係
6. 点列，収束性，閉集合（2 回）
    - 点列の定義，距離空間における収束点列，ϵ-N 論法
    - 点列と閉集合との関係，閉包
    - 近傍と集積点，閉包の別の定義
    - 写像の連続性 (2)：閉集合の逆は閉集合，収束点列の像は収束点列で，極限を保つ
    - 位相同型
    - 距離空間の例: 部分空間，積空間，関数空間
7. compact 性（１回）
    - 部分点列，(点列) compact 性の定義
    - compact 空間上連続関数が最大値，最小値を持つこと

- compact 性の遺伝: 積空間，compact の像は compact
- $[0,1]$ 区間のコンパクト性
- ユークリッド空間での compact 性と有界閉集合との同値性
- Cauchy 列の収束性: compact 空間は完備であること (事実のみ)

講義の感想

講義を通じて，できる限り平易に解説を心がけた.

参考資料

中間テスト問題　2001.05.31

以下の問題では $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ は自然数の全体, $\mathbf{R}$ は実数の全体とする.

(1) a) 集合 A, B が与えられている時に 「A から B への写像 f が与えられている」とはどういうことを言うのか, きちんと説明せよ.
b) 全射でも単射でもない $\mathbf{N}$ から $\mathbf{N}$ への写像を一つ作り, 実際に全射にも単射にもならないことを示せ.
c) 写像 $f : A \to B$, $g : B \to C$ が両方とも全射のとき, 合成写像 $g \circ f : A \to C$ も全射であることを示せ.

(2) a) X を集合, A, B, C を X の部分集合とするとき以下の X の部分集合間の等式を証明せよ.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

b) 集合 A, B が与えられているとする．積集合 $A \times B$ の部分集合 $\Gamma \subset A \times B$ が全単射 $f : A \to B$ のグラフであるとする: $\Gamma = \{(a, f(a)) \in A \times B,\ a \in A\}$. このとき逆写像 $g : B \to A$ の グラフは $\Gamma' = \{(b, a) \in B \times A,\ (a, b) \in \Gamma\}$ であることを示せ.

(3) a) 実数係数の 3 次多項式

$$f(X) = X^3 + aX^2 + cX + d$$

が与えられている時, 写像 $F_f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を

$$F_f(x) = f(x) \quad (x \in \mathbf{R})$$

で定める．F_f は全射であることを示せ.
b) $a^2 < 3c$ のとき F_f は全単射になることを示せ.

(4) a)「集合 A に同値関係 $\sim$ が定まっている」とはどういうことを言うのか, きちんと説明せよ.
b) 積集合 $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ 上の関係 $\sim_Q$ を

$$(m, n) \sim_Q (m', n') \Leftrightarrow nm' = mn'$$

で定義する. $\sim_Q$ が同値関係であることを示せ.

c) A を商集合 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}/\sim_Q$ とし, $(m,n)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ の属する同値類を $\overline{(m,n)}$ とする. 次の写像 F

$$F : A\times A \to A$$

$$F(\overline{(m,n)},\overline{(m',n')}) = \overline{(mm',\ mn'+nm')}$$

は well-defined なことを示せ.

(5) 現在までの講義に対する意見, 感想を述べよ.

テスト問題　2001.09.20

以下の (1)-(5) に解答せよ. ただし (4) は (4-1) または (4-2) いずれか一方のみの選択とする.

記号: $\mathbf{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ は自然数の全体, $\mathbf{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots\}$ は整数の全体, $\mathbf{Q}$ は有理数の全体, $\mathbf{R}$ は実数の全体とする. 特別の指示がない限りユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ には通常のユークリッド距離が与えられているとする.

(1) a) 距離空間の定義を述べよ.

b) 距離空間 (X,d_X), (Y,d_Y) が与えられている時に「X から Y への連続写像 f が与えられている」とはどういうことを言うのか, きちんと説明せよ. また, $\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への連続でない関数を作り, その理由を述べよ.

c) b) の答えに基づき, 連続写像 $f: X\to Y$, $g: Y\to Z$ の合成 $g\circ f$ は連続であることを示せ. ただし X, Y, Z の距離関数をそれぞれ d_X, d_Y, d_Z とする.

(2) (a) 距離空間 (X,d_X) の開集合, 閉集合の定義を述べよ.

(b) 以下の $\mathbf{R}^2$ の部分集合が開集合かそうでないかを証明つきで述べよ.

(b-1) $\mathbf{R}^2$ から異なる三点を除いた集合
(b-2) 座標が整数の点の全体 $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2,\ x,y\in\mathbf{Z}\}$
(b-3) 座標が有理数の点の全体 $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2,\ x,y\in\mathbf{Q}\}$

(3) a) $f,g:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ を二つの連続関数とする. 次の事実のうちいずれかを証明せよ.
(a-1) $f+g$ も連続関数
(a-2) fg も連続関数

b) 変数 x,y の多項式 $f(x,y)=\sum_{0\le i,j\le N} a_{ij}x^iy^j\quad(a_{ij}\in\mathbf{R})$ が $\mathbf{R}^2$ 上の関数として連続関数であることを示せ.

c) 楕円の内部 (周上は除く) は $\mathbf{R}^2$ の開集合であることを示せ.

(4) (4-1)

a) (X, d_X) を距離空間, X を有限集合とする. X の任意の部分集合は開集合であることを示せ.

b) 一般の距離空間 (X, d_X) がコンパクトであるとはどういうことを言うのか, きちんと説明せよ.

c) X が有限集合のとき, (X, d_X) は距離の取り方にかかわらずコンパクトであることを示せ.

(4-2)

$\mathbf{Q}$ に関係 $\sim_{\mathbf{Z}}$ を $x \sim_{\mathbf{Z}} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbf{Z}$ で入れる.

a) $\sim_{\mathbf{Z}}$ は同値関係であることを示せ.

b) 商集合を $X = \mathbf{Q}/\sim_{\mathbf{Z}}$, $x \in \mathbf{Q}$ の属する類を $\bar{x}$ とする.

$$F(\bar{x}, \bar{y}) \overset{def}{\to}= \overline{xy}$$

は well-defined でないことを示せ.

c) X は無限集合であることを示せ.

(5) 講義に対する意見, 感想を述べよ.

レポート用問題集　2001.04.26

レポート提出の期限は 5/10 (木) 5:00 とする. 理学部一号館一階の事務に提出すること.

(1) 集合 X を一つ固定する. A, B を X の部分集合とするとき ($A \supset B$ となっていないときでも)

$$A \setminus B = \{x \in A;\ x \notin B\}$$

と定義する. このとき以下の X の部分集合間の等式を証明せよ.

$$A \backslash B = A \cap B^c$$

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C),\ A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C),\ (A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$$

(2) 集合 X を一つ固定する. A, B を X の部分集合とするとき

a)

$$\emptyset^c = X,\ X^c = \emptyset$$

$$A \subset B \Rightarrow A^c \supset B^c$$

$$(A^c)^c = A$$

を示せ. ただし, $(-)^c$ は X 内での補集合を表すこととする.

b) de Morgan の法則

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

を示せ.

(3) 集合 X を一つ固定する.

a) A, B を X の部分集合とするときその特性関数 χ_A, χ_B に対して

$$\chi_{A^c}(x) = 1 - \chi_A(x) \quad (x \in X)$$

$$\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x) \quad (x \in X)$$

であることを示せ.

b) $A_1, \ldots, A_n$ を X の n 個の部分集合とするとき

$$\chi_{A_1 \cup \cdots \cup A_n}(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \chi_{A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}}(x)$$

$$= \chi_{A_1}(x) + \cdots + \chi_{A_n}(x) - \chi_{A_1 \cap A_2}(x) - \chi_{A_1 \cap A_3}(x) - \cdots + (-1)^{n-1} \chi_{A_1 \cap \cdots \cap A_n}(x) \quad (x \in X)$$

であることを示し, X が有限集合の時

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < \ldots < i_k} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| \quad (x \in X)$$

を示せ. (Hint: de Morgan の法則を使う.)

(4) ☆ $X = \{1, 2, \ldots, m\}$ から $Y = \{1, 2, \ldots, n\}$ への全射の総数を $S(m, n)$ とする.

a) $S(n+1, n)$, $S(n+2, n)$ を求めよ.

b) 一般の場合に $S(m, n)$ を求めよ.

(5) $f : A \to B$, $g_1, g_2 : B \to C$ を写像とする. このとき f が全射で $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ なら $g_1 = g_2$ であることを示せ.

(6) A を有限集合, $f : A \to A$ を写像とする. もし f が全射なら f は全単射であることを示せ. A が有限集合でないときは反例があることを示せ.

(7) $f : A \to B$ を写像とする. このとき標準分解

$$A \xrightarrow{p} f(A) \xrightarrow{i} B$$

で, p が全射, i が単射になることを示せ.

(8) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ となる写像とする. このとき標準分解を具体的に計算せよ.

(9) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を実数値関数とする．f が微分可能で, どの $x \in \mathbf{R}$ に対しても $f'(x) > 0$ とする．

a) f は単射であることを示せ.

b) $I = [0,1]$ (閉区間) として, I での f の最小値, 最大値をそれぞれ m, M とする．このとき写像

$$F : I \to [m, M],\ x \mapsto f(x)$$

が定義できるが, F は全単射であることを示せ.

(10) ☆ (あみだくじの問題) $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ とする.

$$\mathfrak{S}_n = \{f : X \to X,\ f \text{ は全単射 }\}$$

とする ($\mathfrak{S}_n$ は n 文字の上の置換の全体で, n 次対称群といわれる).

$1 \leq i \leq n-1$ に対し $(i, i+1) \in \mathfrak{S}_n$ を

$$(i, i+1)(x) = \begin{cases} x & x \neq i, i+1 \\ i+1 & x = i \\ i & x = i+1 \end{cases}$$

とする (i と $i+1$ を入れ替える互換)．このとき, $\mathfrak{S}_n$ の任意の元は $\frac{n(n-1)}{2}$ 個以下の $(i, i+1)$ 達 $(1 \leq i \leq n-1)$ の合成写像で書けることを示せ．また, 実際に $\frac{n(n-1)}{2}$ 個どうしても必要なものがあることも示せ. (注意: この問題は講義中述べたものと同一である.)

問題集　2001.07.12

(1) 写像 $f : A \to B$, 部分集合 $C \subset A$ に対し C の像 $f(C)$ を

$$f(C) = \{y \in B;\ \text{ある } x \in C \text{ が存在して } y = f(x)\}$$

で定義する．このとき A の部分集合族 $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して

$$f(\cap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda) \subset \cap_{\lambda \in \Lambda} f(C_\lambda)$$

$$f(\cup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda) = \cup_{\lambda \in \Lambda} f(C_\lambda)$$

となることを示せ.

(2) 写像 $f : A \to B$, 部分集合 $D \subset B$ に対し D の逆像 $f^-(D)$ を

$$f^-(D) = \{x \in A;\ f(x) \in D\}$$

で定義する．このとき B の部分集合族 $\{D_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して

$$f^-(\cap_{\lambda \in \Lambda} D_\lambda) = \cap_{\lambda \in \Lambda} f^-(D_\lambda)$$

$$f^-(\cup_{\lambda \in \Lambda} D_\lambda) = \cup_{\lambda \in \Lambda} f^-(D_\lambda)$$

(3) $F_f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を n 次多項式 $f(X) = a_0 X^n + \ldots + a_n,\ n \geq 1,\ a_0 \neq 0$ で与えられる写像とする．このとき

$$U = \{x \in \mathbf{R},\ F_f(x) > 0\}$$

は有限個の開区間, または $(a,\ \infty)$, $(-\infty, b)$ の形の無限区間の和集合であることを示せ.

(4) $\mathbf{R}^2$ で三角形の内部 (周は含まない) はユークリッド距離に関し開集合であることを示せ.

(5) $\mathbf{R}^n$ で開区間の n 個の直積 $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ はユークリッド距離に関し開集合であることを示せ.

(6) (数列空間の例) 集合 ℓ_∞ を有界な実数列全体の集合とする．

$$\alpha \in \ell_\infty \Leftrightarrow \alpha = \{a_n\}_{n \in \mathbf{N}},\ a_n \in \mathbf{R},\ n \text{ によらない } C > 0 \text{ があって全ての } n \text{ に対して } |a_n| \leq C$$

このとき

$$d_\infty(\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbf{N}}) = \sup_{n \in \mathbf{N}} |a_n - b_n|$$

とすると d_∞ は ℓ_∞ の距離になることを示せ.

(7) (関数空間の例) $a, b \in \mathbf{R}$ とする．集合 $C([a, b])$ を閉区間 $[a, b]$ 上連続な関数全体の集合とする．

$$f \in C([a, b]) \Leftrightarrow f : [a, b] \to \mathbf{R},\ f \text{ は連続}$$

このとき

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

とすると d_∞ は $C([a, b])$ の距離になることを示せ.

(8) (変な距離の例) p を素数とし, 関数 $\mathbf{Q} \to \mathbf{R}$ を次のように定義する。$a = 0 \Rightarrow |a|_p = 0$. $a \neq 0$ の時は $a = \frac{m}{n}$ としたとき $|a|_p = p^{-(\alpha - \beta)}$, ただし p^α, p^β はそれぞれ m, n を割る p の最大ベキ.

a)

$$|a + b|_p \leq \max(|a|_p,\ |b|_p)$$

$$|ab|_p = |a|_p \cdot |b|_p$$

が成り立つことを示せ.

b) $\mathbf{Q}$ に $d_p(x, y) = |x - y|_p$ により距離が入ることを示せ．d_p を $\mathbf{Q}$ の p-進距離という.

c) p-進距離が決める位相に関し開球体 $B(0, r)$ は全て閉集合でもあることを示せ.

(9) 集合 X に二つの距離 d_1, d_2 が与えられているとする．$C > 0$ で

$$\text{どんな } x, y \in X \text{ に対しても } d_1(x, y) \leq C \cdot d_2(x, y)$$

が成立するものがあるとする．このとき $A \subset X$ が d_1 に関して開集合なら, d_2 に関しても開集合であることを示せ．(Hint: $\alpha \in X$, $r > 0$ に対し $\{x \in X,\ d_2(x, \alpha) < \frac{r}{C}\} \subset \{x \in X,\ d_1(x, \alpha) < r\}$ を示す.)

(10) $\mathbf{R}^n$ に

$$d_\infty((x_1,\ldots,x_n),\ (y_1,\ldots,y_n)) = \sup_{1\le i\le n}|x_i-y_i|,$$

$$d_2 = \text{ Euclid 距離}$$

という二つの距離を与える． このとき d_2 と d_∞ は $\mathbf{R}^n$ に同じ位相を与えることを示せ． (Hint: $d_\infty(x,y)\le d_2(x,y)\le\sqrt{n}\cdot d_\infty(x,y)$ を示す.)

(11) 距離空間 $(X,\ d_X)$, $(Y,\ d_Y)$, 写像 $F: X\to Y$ が与えられているとする．
F が連続 $\Leftrightarrow$ 全ての Y の開集合 $V\subset Y$ に対し逆像 $f^-(V)$ が X の開集合になるを連続の定義としたとき, F の連続性は ϵ - δ 論法が成立することと同値なことを示せ．つまり

$$F\text{ が連続 } \Leftrightarrow \text{ どんな } \alpha\in X,\ \epsilon>0 \text{ に対してもある } \delta>0 \text{ があって}$$

$$d_X(x,\alpha)<\delta\Rightarrow d_Y(f(x),f(\alpha))<\epsilon$$

(12) (X,d) を距離空間とする．

a) $\alpha\in X$. $r>0$ に対して $\{x\in X;\ d(x,\alpha)>r\}$ は開集合であることを示せ．

b) $r,\ R\in\mathbf{R}$ とするとき $\{x\in X;\ r\le d(x,\alpha)\le R\}$ は X の閉集合であることを示せ．

c) $\alpha\in X$ を固定するとき x に $d(x,\alpha)$ を対応させる X 上の実数値関数は連続であることを示せ．

(13) x 方向への射影 $F:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R},\ (x,y)\mapsto x$ は連続であることを示せ．ただし, $\mathbf{R},\ \mathbf{R}^2$ には Euclid 距離を与える．

(14) a) 距離空間 $(X,\ d_X)$, $(Y,\ d_Y)$ が与えられているとき積集合 $X\times Y$ は

$$d_{X\times Y}((x_1,\ y_1),\ (x_2,y_2)) = \sqrt{d_X(x_1,\ x_2)^2+d_Y(y_1,\ y_2)^2}$$

により距離空間になることを示せ．

b)

$$\tilde{d}_{X\times Y}((x_1,\ x_2),\ (y_1,y_2)) = \sup\{d_X(x_1,\ x_2), d_Y(y_1,\ y_2)\}$$

も $X\times Y$ の距離であることを示せ． $d_{X\times Y}$ と $\tilde{d}_{X\times Y}$ は $X\times Y$ の同じ開集合を定めることを示せ ($d_{X\times Y}$ に関し開集合 $\Leftrightarrow \tilde{d}_{X\times Y}$ に関し開集合)．

c) U, V をそれぞれ X, Y の開集合とするとき, $U\times V$ は $X\times Y$ の開集合であることを示せ．

d) X 方向への射影 $p_X: X\times Y\to X$, Y 方向への射影 $p_Y: X\times Y\to Y$ は共に連続であることを示せ．

(15) $\mathbf{R}$ に通常の距離をいれる．$\mathbf{Q}$ の $\mathbf{R}$ 内の閉包 $\overline{\mathbf{Q}}$ は $\mathbf{R}$ であることを示せ．また, $\overline{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}=\mathbf{R}$ も示せ (特に, $\mathbf{Q}$ は $\mathbf{R}$ の中で開でも閉でもない)．

(16) 距離空間 (X,d) を考える．

a) $\alpha\in X$, $r>0$ に対して半径 r の開球体を $B(\alpha,r)=\{x\in X;\ d(x,\alpha)<r\}$, 閉球体を $B_c(\alpha,r)=\{x\in X;\ d(x,\alpha)\le r\}$ とする．$B(\alpha,r)$ の閉包 $\overline{B(\alpha,r)}$ は $B_c(\alpha,r)$ に含まれることを示せ．

b) (X,d) が Euclid 空間の時は $\overline{B(\alpha,r)}=B_c(\alpha,r)$ を示せ．

c) 一般の距離空間のときは $\overline{B(\alpha,r)}=B_c(\alpha,r)$ とならない例を作れ．

(17) 連続写像の合成は連続であることを示せ.

集合と位相補足　2001.07.19

講義補足 (7/5 日分): A の閉包 $\overline{A}$ が A を含む最小の閉集合であること:

証明. A を含む最小の閉集合 C が存在することは講義中示した. まず, $\overline{A} \subset C$ をいう. $x \in \overline{A}$ とし, X の収束点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ で $x_n \in A$, 極限が x になるものをとる. $x_n \in C$ で, C は閉集合だから, 講義で述べた定理から $x \in C$. つまり $\overline{A} \subset C$. 次に $C \subset \overline{A}$ をいう. 補集合を取って $(\overline{A})^c \subset C^c$ をいえばいい. $x \in (\overline{A})^c$ とする. 講義中に示した定理から, ある x を含む開球体 W があって, $A \cap W = \emptyset$. つまり W^c は A を含む閉集合だから, C の最小性から $C \subset W^c$. つまり $x \in W \subset C^c$ となり, $(\overline{A})^c \subset C^c$.

A の閉包 $\overline{A}$ が閉集合であること: 上の結果から明らか.

閉包の性質のうち講義中に示していないこと:

$$\overline{\overline{A}} = \overline{A}.$$

証明. $\overline{A}$ は上で示したことより閉集合. 閉集合に対しては閉包は自分自身と一致するから $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

証明. まず $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ を示す. $A \subset \overline{A \cup B}$, $\overline{A \cup B}$ は閉集合, より $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ (閉包の最小性より). 同様に $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. 従って $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. 次に $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ を示す. $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ は明らか. $\overline{A}$, $\overline{B}$ は閉集合だから $\overline{A} \cup \overline{B}$ も閉集合. 閉包 $\overline{A \cup B}$ の最小性より $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

近傍の基本的性質: V が x の近傍, $V \subset W \Rightarrow W$ も x の近傍 V, W が x の近傍 $\Rightarrow V \cap W$ も x の近傍

講義補足 (7/12 日分): A が開集合 $\Leftrightarrow$ 各 $\alpha \in A$ に対し A が α の近傍

証明. $\Rightarrow$: A が開集合だから, どの $x \in A$ に対しても $r_x > 0$ があって, $B(x, r_x) \subset A$ となる. $B(x, r_x)$ は x の近傍だから, 正しいことがいえた. $\Leftarrow$: 各点 x にたいし A が x の近傍だから, 近傍の定義からある $r_x > 0$ があって $B(x, r_x) \subset A$ となる. これは A が開集合であることそのものである.

距離空間 (X, d_X), (Y, d_Y) の積空間 $(X \times Y, d_{X\times Y})$ に対し

$\{(x_n,\ y_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ が $X \times Y$ で収束点列 $\Leftrightarrow \{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ がそれぞれ $X,\ Y$ で収束点列

講義補足 (7/19 日分): Euclid 空間の部分集合 $A \subset \mathbf{R}^N$ が部分空間と見たとき compact なら A は有界閉集合であること:

証明． まず A の有界性を示す．$1 \leq i \leq N$ として i 番目の座 標を与える射影

$$x_i : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R} \quad (x_1, \ldots, x_N) \mapsto x_i$$

を考える．x_i は連続である ($N = 2$ のとき: 前にやった．一般: 同様, report 問題参照)．そこで合成写像

$$A \overset{i_A}{\hookrightarrow} \mathbf{R}^N \overset{x_i}{\to} \mathbf{R}$$

を考える．A を部分空間と見ると i は連続写像．連続写像の合成は連続だから (7/12, 演習) 合成 $x_i \circ i_A : A \to \mathbf{R}$, $(a_1, \ldots, a_N) \mapsto a_j$ も連続．講義中に述べた定理と A のコンパクト性から $x_i \circ i_A$ は A で最大値, 最小値を持つ．つまり $(a_1, \ldots, a_N) \in A$ の i 成分 a_i に最大値, 最小値があることになり, 特に $|a_i|$ は有界．各 i 座標が有界だから, A は有界集合．次に閉集合であることを示す．より一般に, 次の補題が成り立つことを示す．$X = \mathbf{R}^N$ として適用すればよい．

補題． (X, d) が距離空間, $A \subset X$ を部分空間とするとき, A が compact なら, A は X の中で閉集合である．

補題の証明． $A = \overline{A}$ ($\overline{A}$ は A の閉包) を言えばよい．そこで $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ を A 内の点列で X で収束するものとし, その極限を $\alpha \in X$ とする．$\alpha \in A$ を言えばよい．A の compact 性より部分列 $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbf{N}}$ があり, $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbf{N}}$ は A で収束する．その極限を β とすると, $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbf{N}}$ は X 内でも β に収束するから, $\alpha = \beta$．つまり $\alpha \in A$.

この講義の位相の部分で絶対覚えておくべき定義

集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, 集合族の和集合 $\cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, 共通部分 $\cap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$

写像 $f : A \to B$ による部分集合 $C \subset A$ の像 $f(C)$, 部分集合 $D \subset B$ の逆像 $f^{-}(D)$

☆: 距離空間の定義

☆: 開集合の定義（二通りある):
1. 各点 $x \in X$ に対し $r_x > 0$ があって $B(x, r_x) \subset A$
2. 集合族 $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ で各 B_λ は開球体であるものがあり

$$A = \cup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda.$$

Remark. 1 の方が実用的な定義である．☆: 閉包の定義（二通りある):

1. $A \subset X$ を距離空間 (X, d) の部分集合とするとき

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow X \text{ の収束点列 } \{x_n\}_{n \in \mathbf{N}} \text{ で } x_n \in A, \ \text{極限が } x \text{ になるものがある}$$

2.

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \text{ の任意の近傍 } W \text{ に対して } A \cap W \neq \emptyset$$

Remark. 2 の方が好まれることが多い. $\overline{A}$ の元のことを A の集積点, または A の触点という.

☆: 閉集合の定義（二通りある):

1. 補集合が開集合
2. 閉包が自分自身と一致する

☆: 連続性の定義 (四通りある) 距離空間 $(X,\ d_X)$, $(Y,\ d_Y)$, 写像 $f : X \to Y$ が与えられているとする.

1. f が連続 $\Leftrightarrow$ 全ての Y の開集合 $V \subset Y$ に対し逆像 $f^{-}(V)$ が X の開集合になる

1'. f が連続 $\Leftrightarrow$ 全ての Y の閉集合 $V \subset Y$ に対し逆像 $f^{-}(V)$ が X の閉集合になる

2.

$$f \text{ が連続 } \Leftrightarrow \text{ どんな } \alpha \in X,\ \epsilon > 0 \text{ に対してもある } \delta > 0 \text{ があって}$$

$$d_X(x, \alpha) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(\alpha)) < \epsilon$$

3. f が連続 $\Leftrightarrow$ 全ての X 内の収束点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ に対して $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ は Y の収束点列で $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$.

Remark. 理論的な面では（例えば, 基本的な定理の証明など) 1, 1', 3 が使われることが多い. ただし, 具体的な写像, 関数の連続性を示すときには 2 (ϵ-δ 論法) が最も有効である.

☆: 部分空間, 直積空間の定義

☆: コンパクト空間の定義

距離空間 (X, d) がコンパクト $\Leftrightarrow$ 　任意の X 内の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ に対し収束部分列 $\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbf{N}}$ が存在する

レポート問題

1. ϵ-δ 論法が成立すれば連続であることを示せ. つまり距離空間 (X, d_X), (Y, d_y), $f : X \to Y$ に対して

$$\text{どんな } \alpha \in X,\ \epsilon > 0 \text{ に対してもある } \delta > 0 \text{ があって } d_X(x, \alpha) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(\alpha)) < \epsilon$$

が成立していれば, どんな Y の開集合 $V \subset Y$ に対しても逆像 $f^{-}(V)$ は X の開集合.

2. (X, d) が距離空間であるとき

$$f, g : X \to \mathbf{R} \text{ が連続関数} \Rightarrow f \pm g,\ fg \text{ も 連続関数}$$

3. $1 \leq i \leq N$ として i 番目の座標を与える射影

$$x_i : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R} \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$$

を考える. Euclid 距離に関して x_i は連続である.

位相の部分で講義内でやっていない重要なこと:

1. 距離空間と限らない位相空間の一般論, 特に商位相と分離性.
2. 点列を使った compact 性 と開被覆の関係
3. 連結性, 弧状連結性 (中間値の定理との関係も含む)
4. 完備性の詳しい性質, 完備化 ($\mathbf{Q}$ から $\mathbf{R}$ を作る方法の一般化)

追加問題集

1. 距離空間の収束点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ の部分列 $\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbf{N}}$ も収束点列で, 同じ極限を持つことを示せ.

2. ユークリッド空間 $\mathbf{R}^2$ 上の関数

$$f(x,y)=e^x\sin y$$

は連続であることを示せ.

3. $\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{R}$ への連続写像 $f,\ g$ が与えられているとき

$$F:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2,\quad (x,y)\mapsto(f(x,y),\ g(x,y))$$

は $\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{R}^2$ への写像として連続であることを示せ.

4.

a). $A\subset X$ を距離空間 $(X,\ d_X)$ の部分集合とする. A に部分空間の構造を与えて距離空間 $(A,\ d_A)$ と思うと, A の開集合は必ず $A\cap U$, U は X の距離 d_X に関する開集合, の形になることを示せ. 逆に, この形の A の部分集合は全て A の d_A に関する開集合である.

b). 包含写像 $i:A\to X,\ a\mapsto a$ は連続であることを示せ.

科目名　数学演習 III・IV　　**担当教官**　梅村 浩

サブタイトル

対象学年　２年　　**計 4 単位　必修**

教科書　特になし．
参考書

予備知識

特に仮定しない．

講義内容

各学生の能力に応じて個人指導をおこなった．

具体的には，各学生がどこに自分の問題点があるのか，それを改善するためにはどうしたら良いか．3 週間ごとに計画をたてる．毎週その計画を実行した成果，うまく行かなかった点を報告する．毎週 10 題程度の問題を解いてくる．その内，一題を黒板で説明し，あと一題を紙面にて提出してもらい文章の書方も含めて添削して返却する．それを清書したものをファイルとして保存する．

具体的には学生たちは，一年生のときに学んだ線形代数の問題，微積分の問題，現在聴講ている講義から生ずる演習問題を解いてきた．また，講義の試験問題で解けなかったものなども教材とした．

論理的な文章を書かせる指導を丁寧におこなった．証明のなかには，不要な文章はないこと．全体の論理構成のなかで，ひとつの文章のしめる位置役割をはっきりと把握させるようにつとめた．また出来上がった証明に推敲を加え，可能な限り簡明にするように指導した．

勤勉な学生は夏休みまでに，200 題程の問題を解いた．夏休みにもこれに沿った勉強を続けるように約束した．この演習が少人数であること，また講義がこれまでと違って非常に丁寧に，手間をかけて行われたれたこともあってかなりの成果があがったものと思われるが．しばらく時間がたって見ないと正確な評価はできないであろう．

講義の感想

学生とも親しくなれ，楽しい演習でした．

科目名　数学演習 III・IV　　**担当教官**　佐野 武

サブタイトル　D グループ

対象学年　２年　　**計 4 単位　必修**

教科書　指定なし
参考書　指定なし

予備知識

特に仮定しない

講義内容

1 回の演習を 2 つに分け，輪講と演習の 2 本立てで行なった．

1. 輪講
   演習時間の約半分を使って輪講を行なった．輪講といっても途中で何度も止めて，定義の確認や，演習を織り混ぜて行なった．目的は，自力で本を読むときに必要なコツをつかんでもらうことと，苦手とされる論理的な考え方を理解しもらうことにある．特に大学院進学者には役立つだろうと思った．
   テキストは「トポロジー」田村 一郎 著で，一人一回発表してもらい，第一章を終わらせた．内容は以下の通り．
   - 集合と写像；和 (共通）集合，全 (単) 射，積集合，同値関係，商集合
   - ユークリッド空間とユークリッド幾何；ユークリッド距離，合同
   - 同位相と位相的図形；収束，連続写像，e 近傍，内点，境界，開（閉）集合，開集合系
   - 位相的集合の構成；球体，球面，トーラス，メービウスの帯，クラインの壷，射影空間
   - 位相的図形の特徴付け；連続曲線，弧状連結，弧状連結成分
2. 演習
   ちからだめしの解説，講義（集合と位相，抽象ベクトル空間）でのテストの解説と類題，学生からの要望で関数論の演習を行なった．(注；関数論だけ演習時間がついていない）
   内容；べき級数，コーシーの積分表示，テーラー展開，正則関数の無限階微分可能性，リューヴィルの定理

講義の感想

位相は 2 年生が不得意とする分野だという事もあって，難しかったようだ．

科目名　**数学演習 III・IV**　**担当教官**　**鍜島 康裕**

サブタイトル　１年次の数学の復習

対象学年　**２年**　**計 4 単位**　**必修**

教科書　なし
参考書　なし

予備知識

特に仮定しないが，１年次の数学をうっすらとは理解（または聞いた覚え）していること．

講義内容

１年次に習う線形代数および解析は，どの分野に進むにしても必須であり，自分の物として使えこなせないとそれ以後の大学生活が辛く厳しい物となる．そこでせめて最低限の知識を復習し，出来るだけそこに現れる数学上の概念の意味や背景を理解させ，数学に対する興味を持たせたいと考え，若干の数学史を含めた演習をした．　テキストは用いず，プリントを作成した．また，２回に１回程度の割で証明問題の小テストを行い添削して返却した．数学の文章を書くことが苦手な学生が余りに多かったため．

具体的な講義内容は以下の通り：

1. 線形代数の復習（２回）
   - 線形写像
   - Ker Image 等
2. 重積分（２回）
   - 重積分の定義
   - ヤコビ行列，n 個のベクトルによって張られる図形の体積とそのベクトルから作られる行列の行列式との関係
   - 変数変換
   - 例．アフィン変換による変数変換にヤコビ行列の現れる当たり前さ
3. 横道（１回）
   - 行列式の特徴付けと体積
   - 求める関数を決定する性質をあげ，その性質を満たす関数を見つける事により関数を求める
4. 実数論（２回？）
   - Dedekind の切断
   - Weierstrass の定理
   - 有界単調数列の収束

5. テイラー展開など（２回？）
    - 多項式をテイラー展開してみる
    - 自然対数の底が無理数である事
    - 素数が無限にある事
6. ジョルダン標準形，行列式（２回？）
    - 復習

講義の感想

出席率が高く，よかった．分かってない事をうやむやにしないようにしましょう．

科目名　　数学演習 III・IV　　　　**担当教官**　佐藤 周友

サブタイトル

対象学年　　２年　　　　**計 4 単位　必修**

教科書　なし
参考書　なし

予備知識

特に仮定しない

講義内容

初回に実力テスト，2 回目と 3 回目にかけてはその復習をやりました．それ以後は主に次の項目について復習と演習問題に取組んでもらいました．

1. 写像の定義と例，(基底を 1 つ止めたときの) 線型写像と行列の対応，ε-N 論法による実数列の極限の論証
2. 同値関係による集合の商の計算例，ε-δ 論法による関数の極限の論証
3. 商集合に誘導される演算 (well-definedness)
4. 実関数の集合を線型空間と見る自然な方法 (線型空間の復習)，実連続関数の和と実数倍は連続であること (連続性の復習)
5. 2 変数関数 ($\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への関数) の極限と連続性
6. 連立 1 次方程式と線型写像 (の像や核) との関係，2 変数関数の偏導関数の計算
7. 距離空間，開集合と開区間の関係，関数の連続性の 2 つの定義の同値性

講義の感想

2 年生の前期では 1 年次とは違い抽象的な概念が次々と出てきてました．この演習は学生の人々にはそれらの難しい概念に慣れてもらう為の時間でしたので,「まだよく分からない」という人が多いのは当然だと思います．もっと理解したい人には，まず「自力で理解しようと努力して」もらう以外にありません．なぜなら,「考える」と「質問する」の繰り返しがよりレベルの高い「理解」への道だからです．

参考資料

問題（ちからだめし）　2001.04.19

問題 1.　数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = 3, \qquad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

により与えられるとき，以下の問に答えよ.

(1) すべての番号 $n = 1, 2, \dots$ に対し，$a_n > 2$ が成り立つことを示せ.

(2) $\{a_n\}$ が単調減少数列であることを示せ.

(3) $\{a_n\}$ が収束することを示し，その極限値を求めよ.

問題 2. 次の積分の値を求めよ.（**ヒント：**極座標を用いよ.）

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

問題 3. 実線形空間 $\mathbb{R}^3$ とその上の内積

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

を考える．$\mathbf{v} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ とし，$\mathbf{v}$ に直交するベクトル全体のなす $\mathbb{R}^3$ の線形部分空間を W とする.

(1) W の基底を１組求めよ.

(2) $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ で，特に $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$ となるものを１組求めよ.

(3) ベクトル $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ を

$$a = \lambda\mathbf{v} + \mathbf{x}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{x} \in W$$

の形に表せ.

問題 4. $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像，$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ を $\mathbb{R}^n$ の基底，$\mathbf{b}_1 = \varphi(\mathbf{a}_1), \dots, \mathbf{b}_n = \varphi(\mathbf{a}_n)$ とする．このとき，$\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ が一次独立ならば $\operatorname{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$ であることを証明せよ.（**方針：**「$\mathbf{v} \in \operatorname{Ker}\varphi$ とする」ではじめる.）

科目名　**数学演習 III・IV**　　**担当教官**　**金井 雅彦**

サブタイトル　再履修者グループ

対象学年　**３年以上**　　**計 4 単位**　**必修**

教科書　なし
参考書　印刷物を配布

予備知識

特に仮定しない

講義内容

数理学科２年生向けの前期科目『数学演習 III・IV 』が今年度より少人数グループで実施されることになった．当初，履修者全員を合計６つのグループに分け，斉藤秀司氏が担当予定の１グループがとくに再履修者のためにあてられる予定であった．実際には，再履修者数が２０名を越えたため，金井がその補助を務めることになった．しかし，再履修者グループに属する学生の学力差が無視できぬほど大きいため，演習４回目より，再履修者グループに属する学生のうち７名を集め完全に別グループとし，それを金井が担当することになった．

斉藤氏が線形代数の復習から始めたことをうけ，金井が担当したグループも演習全時間のおよそ 2/3 を線形代数の基礎事項の復習に費やした．そこで扱った主な内容は，以下の通りである．連立１次方程式の解法・解の存在と一意性・逆行列および行列式の計算・線形部分空間の定義と例・基底と次元．計算問題が中心ではあったが，ときには簡単な証明を出題し，数学的表現力の向上にも努めた．

最後の数回は『集合と位相』の中間試験問題の「解説」に費やされた．藤原一宏氏が担当する『集合と位相』の中間試験の採点済み答案用紙が２年生向け演習の担当教官を通じて学生に返却されることになった．一方，私が担当する再履修者グループに属するほとんどすべての学生が，今学期『集合と位相』を再履修している．彼等の答案を見ると理解が不十分な点が少なからず存在することに直ちに気付いた．そこで，少なくとも中間試験に出題された問題に対しては，完全な正答に達するまで，個々の学生に指導を行った．

講義の感想

この演習では，確実な理解を目標としたため，決して多くの問題を取り扱うことは出来ませんでした．しかしそれを通じ，履修者が数学の発想方法や学習方法をある程度は習得できたのではないかと期待しています．

科目名　代数学要論　**担当教官**　金銅 誠之

サブタイトル　環と多項式

対象学年　３年　**６単位**　**選択**

教科書

参考書　松阪和夫，代数系入門，岩波
S. Lang, Algebra

予備知識

線形代数，代数学序論

講義内容

講義内容は以下の通り：

1. 群論の復習（２回）
   - 例（$GL(n, \mathbf{R}), S_n, \mathbf{Z}$) を通して部分群，剰余群，準同型定理の復習.
2. 群の作用とシローの定理（２回）
   - 群の作用，シローの定理.
3. 環（５回）
   - 環，整域，イデアル，剰余環,
   - 素イデアル，極大イデアル，中国剰余定理，標数
   - 分数体
   - 単項イデアル，一意分解整域
   - $\mathbf{Z}[\sqrt{-1}]$ の素元
4. 多項式環（２．５回）
   - 体上の多項式環
   - 一意分解整域上の多項式環（ガウスの補題，アイゼンシュタイン）
   - 若干の補足（多変数，代数閉体）
5. 加群（１．５回）
   - 単項イデアル整域上の加群の構造定理（一意性はやらず）

講義の感想

落ちこぼれていたが，かなり努力し回復したと思われる学生もいた．ただ欠席者が多い．欠席者には対処の仕様がない．特別履修という制度は見直す必要があると思う．

科目名 **微分方程式** **担当教官** **三宅 正武**

サブタイトル

対象学年 **３年** **６単位** **選択**

教科書
参考書 コディントン・レヴィントン，常微分方程式論上，吉岡書店

予備知識

特に仮定しないが，微積分の基礎知識があれば望ましい．

講義内容

常微分方程式に馴染ませるために，最初は変数分離型などの簡単な微分方程式の求積法から始め，次に，リプシッツ条件下での解の一意存在定理などの基礎的定理を逐次近似法，不動点定理による方法などで証明し，解析学の基本的な考え方や方法論を講議した．ついで，線形微分方程式（系）の解の構造や各種のパラメーターに関する連続依存性や解析的微分方程式の解の存在定理について講議した．講義の流れとしては，標準的な教科書のそれと同じである．

具体的な講義内容は以下の通り：

1. 微分方程式における諸概念（１回）
   - 方程式の分類（常微分方程式と偏微分方程式）
   - 解の分類（一般解，特異解）
   - 問題の分類（初期値問題，境界値問題）
   - 解の存在定理の証明方法の解説（初期値問題について）（折れ線法とアスコリ・アルゼラの定理，逐次近似法と一様収束性）
   - 一意存在とリプシッツ連続性
2. 簡単な微分方程式の解法
   - 一階線形微分方程式
   - 変数分離形
   - ベルヌーイの方程式
   - 完全微分式と積分因子
   - 定数係数線形微分方程式と一般解
   - 定数係数線形微分方程式（簡単な非斉次方程式）
3. 関数列の収束の概念
   - 単純収束，一様収束，広義一様収束

- 一様収束極限に関する各種の性質

4. 解の存在定理（リプシッツ条件下で）と解の延長
   - 積分方程式への変換
   - 逐次近似列の収束性
   - 解の一意性
   - 解の延長
   - 線形常微分方程式系の場合への応用（解の存在についてのみ）
5. 不動点定理と微分方程式
   - 距離空間の完備性
   - 縮小写像と不動点の存在
   - 積分方程式への応用（微分方程式の初期値問題の可解性）
6. 方程式の一般化
   - 連立微分方程式と高階化
7. 線形微分方程式
   - 解の存在と存在範囲
   - 解の構造定理
   - 一次独立性とロンスキアン
8. 定数係数線形微分方程式系
   - 行列と指数関数
   - 基本解行列（ジョルダン標準形）
9. 非斉次方程式と定数変化法
   - 連立微分方程式の場合
   - 単独高階方程式の場合
10. パラメーターに関する連続依存性
    - グロンウォールの不等式（単純な場合）
    - 初期値に関する連続性，微分可能性
    - 外部パラメーターに関する連続性
11. 複素微分方程式（線形方程式）
    - 優級数の構成
    - 解の収束性と収束半径
    - 特異点と解析接続

講義の感想

常時出席している学生は，全般的に学習態度も良く，参考書（多くは演習書）で計算練習をしていた様である．従って，試験の計算部分はかなり出来が良いが，証明などの論証的な部分については今一つ弱いように感じられる．

科目名　ルベーグ積分論　　**担当教官**　青本 和彦

サブタイトル　実関数論への入門

対象学年　３年　　**６単位**　選択

教科書
参考書　A. N. Kolmogorov & S. V. Fomin, Introductory real analysis, Dover
高橋陽一郎，実関数と Fourier 解析 I，岩波基礎数学 1
猪狩惺，実解析入門，岩波書店

予備知識

２年次までの必修科目

講義内容

面積，体積の自然な拡張である測度の定義と性質，および，それを用いた積分について学ぶ.

1. 実数とは？（復習）
    - 実数列あるいは実数の集合の上限
    - 下限，上極限，下極限，”関数の極限を $\epsilon-\delta$ 論法で述べよ．実際に，関数を与えて，$\epsilon = \frac{1}{10}$，$\frac{1}{100}$，$\frac{1}{2^{10}}$ のときの，δ を求めよ．”
2. 測度
    - 外測度 $m_e(E)$，内測度 $m_i(E)$ の定義，不等式 $m_i(E) \leq m_e(E)$
    - 外測度，内測度の簡単な計算 $E = \phi, [a, b], (a, b), (a, b], [a, b], \mathbf{Q} \cap [0, 1]$, カントール集合 $\mathcal{C}$ など
    - 可測集合とその測度 $m(E)$ の定義 $m(E) = m_e(E) = m_i(E)$
    - 可測集合と測度の性質 $E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2, E_1 - E_2, \cup_{j=1}^{\infty} E_j, \cap_{j=1}^{\infty} E_j$, $m(E_1 \cup E_2) + m(E_1 \cap E_2) = m(E_1) + m(E_2)$
    - 測度の加法性と完全加法性
    - 測度 0 の集合（零集合）の定義と例
3. ボレル（Borel）集合族
    - 開集合と閉集合
    - F_σ 集合と G_δ 集合
    - ”ボレル (Borel) 集合族は，すべての開集合と閉集合を含む最小の σ 加法族である．”
    - ボレル (Borel) 集合はすべて可測である．
4. 連続関数と可測関数
    - 連続関数とは？上半連続関数，下半連続関数.

- 可測関数とは？”連続関数，上半連続関数，下半連続関数はすべて可測関数である．”
- リーマン (Riemann) 積分とルベーグ (Lebesgue) 積分の定義”リーマン (Riemann) 積分可能ならば，ルベーグ (Lebesgue) 積分可能であって，両者の積分は等しい．” ”ルベーグ (Lebesgue) 積分可能でない場合がある．”

5. ルベーグ積分の基本性質
   - 線形性，加法性，不等式など.
   - 単（階段）関数積分によるルベーグ積分の近似
6. 積分の収束定理
   - エゴロフ (Egorov) の定理
   - ルベーグの有界収束定理と一般収束定理
   - ファトウ（Fatou）の収束定理
   - ”ほとんどすべての x に対して収束する ”と ”測度的に収束する ”
7. 有界変分関数と絶対連続関数
   - 絶対連続関数における微分積分学の基本定理
   - ジョルダンの分解定理
   - カントール関数は単調増大（したがって有界変分）であるが，絶対連続ではない.
8. 完備なノルム空間
   - ヘルダーの不等式，ミンコウスキーの不等式
   - L^p $p \geq 1$, L^∞

講義の感想

講義を通じて，できる限り平易に解説を心がけた．丁寧にやるには時間が足らない.

科目名　幾何学要論　　**担当教官**　小林 亮一

サブタイトル

対象学年　３年　　**６単位**　選択

教科書　小沢哲也，曲線・曲面と接続の幾何
参考書

予備知識

基本的な線形代数と微積分を仮定したが，あやふやそうなところは学生の反応を見ながらそのつど説明した．

講義内容

ベクトル空間とその双対空間．双対基底のことばでクラメルの公式を概念的に理解する．変換性による微分形式の導入．局所座標の概念．外積・外微分と基本的性質．1 の分解と多様体上の積分．多様体上の積分の定義．絶対収束と条件収束．積分定理 (Stokes の定理．Gauss 発散定理，それらの証明とその周辺)．ベクトル場とその流れ．ベクトル場の関数への作用．ベクトル場の作る流れを関数の空間で観察する．ベクトル場と Taylor 展開．スケーリングによる接空間の導入．座標関数としての dx_i．ベクトル空間とベクトルバンドルの比較．内積の入ったベクトル空間．２次形式とその標準形．微分・勾配ベクトル場とその変換性．

講義の感想

参考資料

試験問題

1. (1) 平面の直交座標 (x, y) と極座標 (r, θ) の関係を書きなさい．
(2) 平面の面積要素 $dxdy$ を極座標で表しなさい．
(3) 積分

$$\int_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2 - y^2) dxdy$$

を求めなさい．
(4) 積分

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2) dx$$

を求めなさい．

2. (1) 2 次の対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ を固定し，$r > 0$ を動かすことによって生じる平面 2 次曲

線の族

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = r^2 \tag{Q_r}$$

を考える. 平面 2 次曲線 (Q_r) と単位円周

$$x^2 + y^2 = 1$$

が接するとき, $r > 0$ と行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の関係を述べなさい (答えだけでなく, 理由も書きなさい. 絵で説明してもよい.).

(2) 平面 2 次曲線 Q_r $(r > 0)$ が楕円を表すとき, 積分

$$\int_{\mathbb{R}^2} \exp(-ax^2 - 2bxy - cy^2) dxdy$$

は収束することを証明しなさい. また, その値を $\det A$ を使って表しなさい.

3. (1) $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ で定義された 2 次微分形式

$$\omega = \frac{x\,dy \wedge dz - y\,dx \wedge dz + z\,dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

は $d\omega = 0$ を満たすことを示しなさい.

(2) 原点に中心をもつ半径 $r > 0$ の球面を S_r とする. 積分

$$\int_{S_r} \omega$$

は $r > 0$ によらないことを示しなさい.

(3) 空間の極座標 (r, θ, ϕ) は, $r > 0$, $-\pi < \theta < \pi$, $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$ に対して

$$x = r\cos\phi\cos\theta$$

$$y = r\cos\phi\sin\theta$$

$$z = r\sin\phi$$

で与えられる. これを表現する絵を描きなさい.

(4) (2) の積分の値を求めなさい.

(5) $\mathbb{R}^3$ 内の曲面 M が

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

で与えられるとする. 積分

$$\int_M \omega$$

を求めなさい. ただし曲面 M の向きは, 外向き法線に関して右ねじの法則によって決まる通常の向きとする.

科目名　数学演習 VII　　**担当教官**　吉田 健一

サブタイトル　代数学要論に付随した演習

対象学年　３年　　１単位　選択

教科書
参考書　松阪和夫著，代数系入門，岩波書店
サイエンス社の「代数演習」(数学演習ライブラリー)

予備知識

２年前期までの必修科目（線形代数学の基本的事項（数学基礎 I〜IV）抽象ベクトル空間，集合と位相）の知識はある程度前提にする．また，２年次の代数学序論の内容を復習しながら学習をすすめる．

講義内容

毎回２，３題程度の問題と解答用紙を配布し，出席するすべての生徒に問題を解かせた．また，教室内を徘徊し，適宜アドバイスを与え，必要に応じて黒板で説明をした．６月から７月にかけて４回程，演習の最初の時間に小テストを行った．４月・５月は，２年生の代数学序論で学習した群論中心の演習を行い，後半は環論中心の演習を行った．講義の演習を考慮しつつ，できるだけ具体的な問題を解くことを心がけた．

具体的な講義内容は以下の通り：

1. ２面対群，部分群の位数，ラグランジュの定理
2. 剰余類，群の準同型
3. 対称群，共役類，交換子群
4. シローの定理，可解群
5. イデアルと生成元，整域，剰余環とイデアル
6. 多項式環とイデアル，素イデアルと極大イデアル
7. 環の準同型，単数群
8. 多項式の既約性 (Eisenstein の既約判定法，正標数への還元)

講義の感想

今回の演習では，全員参加をテーマにし，出席と演習への参加を重視した．さらに，夏休み中の勉強を促すため，夏休み明けに試験を実施した．結果として，多くの生徒が演習に参加するというテーマについてはほぼ達成できたが，さぼり癖のついてしまった生徒も多く，そのような学生の学力向上が見られず，結果的には，優をつけられる成績を残した生徒が少なかった．はっきりと個別にテーマを与える必要があるかもしれない．大雑把に見ると，２年次の学力不足が著しい生徒は最初から演習への参加をさぼりがちで, 結局脱落してしまうケースが多いようだ．また，後半からさぼる生徒の成績は，期待された伸びをみせていない．少なくとも積極的に演習に参加することがまず大事なのではないかと思う．

参考資料

試験問題（内容を予告して出題, 一部訂正）

問題１. 次の２条件をみたす自然数 $n(\geq 2)$ を１つあげよ。説明も付けること。
ただし, シローの定理は用いてよい。

(a) n は素数ではない。　(b) 位数 n の群はつねに巡回群である。

問題２. $\mathbf{Z}$ を整数全体のなす環とするとき, 次の各問いに答えよ。

(1) 剰余環 $\mathbf{Z}/24\mathbf{Z} := \{n + 24\mathbf{Z} \,|\, n \in \mathbf{Z}\}$ の元の個数, 及び (環としての) 単位元をそれぞれ答えよ。
(2) $\mathbf{Z}/24\mathbf{Z}$ のイデアルをすべて求めよ。簡単な説明を付けること。
(3) (2) のイデアルのうち, 素イデアルはどれか。理由をつけて答えよ。
(4) $\mathbf{Z}/24\mathbf{Z}$ から $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ への環準同型 (ただし, 単位元は単位元にうつされる) が存在するための n についての必要十分条件を求めよ。

問題３. 次の各問いに答えよ。

(1) U.F.D. 上の Eisenstein の既約判定法を述べよ。(忘れた場合は $\mathbf{Z}$ 上でもよい!)
(2) 次の $\mathbf{Z}$ 上の多項式のうち, Eisenstein の既約判定法が <u>適用できるものを１つ選び</u>, 判定せよ。
　(a) $f(x) = x^3 - 9$
　(b) $f(x) = x^4 - 10$
　(c) $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
(3) $\mathbf{Z}$ 上の多項式 $f(x) = x^3 + x + 1$ が $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ 上で既約になるような奇素数 p の例をあげよ。説明を付けること。

問題４. 次のうちどちらか <u>**一方を選択**</u> して答えよ。証明不要。できるだけ一般的な例をあげること。

選択 (2a) 位数 n の群の非可換群は２面体群に限る。このような自然数 n の例をあげよ。

選択 (2b) 部分群 (自明なものを含む) をちょうど３つ持つ群の例をあげよ。

問題５. 次の主張のうち正しいものには○をつけ, 正しくないものには×をつけて, 反例などをあげて説明せよ。

(1) 可換環 R の素イデアルはつねに極大イデアルである。
(2) 可換環 R のイデアル I, J に対して, I と J の積は, $IJ = \{ab \,|\, a \in I,\, b \in J\}$ である。
(3) 実数体 $\mathbf{R}$ 上の２変数多項式環 $\mathbf{R}[X, Y]$ は U.F.D. である。
(4) $\mathbf{C}[x]/(x^2+1)\mathbf{C}[x]$ は整域である。
(5) どんな可換環 R に対しても, $\mathbf{Z}$ からの環の単準同型を作ることができる。
(6) $\mathbf{Q}$ の部分環 $\{\frac{a}{b} \in \mathbf{Q} \,|\, a, b \in \mathbf{Z},\, b \neq 0,\, (b, 3) = 1\}$ は局所環である。

科目名　数学演習 VIII　**担当教官**　梁 淞

サブタイトル

対象学年　３年　**１単位**　選択

教科書
参考書　吉田耕作，微分方程式の解法，岩波
加藤義夫-三宅正武，微分方程式演習，サイエンス社

予備知識

特に仮定しない

講義内容

三宅教官の講義に沿った演習であり，授業の進度にあわせて進めた．
具体的な講義内容は以下の通り：

- 変数の分離
- 同次微分方程式
- 線形微分方程式
- 完全微分形
- 高階微分方程式
- 一様収束
- リプシッツ条件と解の一意性
- 逐次近似
- 不動点定理
- 行列の指数関数
- 連立微分方程式
- 総合問題

演習問題を計 102 問配付した．また全部で 6 回小テストを行い，回答を添削して返した．

講義の感想

演習問題や小テストに関するヒントを与え，判らない学生にはできるだけ平易に解説し，学生の意欲を出させるように心がけた．

科目名　数学演習 IX　　**担当教官**　千代延 大造

サブタイトル　ルベーグ積分演習

対象学年　３年　　**１単位**　**選択**

教科書
参考書

予備知識

２年生までに学ぶ解析の知識

講義内容

ルベーグ積分の講義内容に可能なかぎり沿って，その講義内容の理解を確実なものにする目的をもって演習をおこなった.

具体的な演習の内容は以下の通り：

1. ルベーグ積分への道
2. カントール関数
3. 加法族，有限加法的測度，外測度，測度
4. ルベーグ測度の構成，性質
5. 可測関数
6. ルベーグ積分の定義と簡単な性質
7. ルベーグ積分の収束定理 I
8. ルベーグ積分の収束定理 II
9. ルベーグ積分の収束定理 III
10. 関数列の収束
11. 関数空間，フーリエ変換

なお，中間と期末の 2 回の小テストを行った.

講義の感想

参考資料

小テスト I　2001.05.05

いうまでもないが、答案は最終結果だけでなく、そこにいたる道筋も、読む人にわかりやすいように記すこと。

1.　$A_n,\ n=1,2,\ldots,$ を $\mathbf{R}^d$ の中の部分集合の列とし、

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{l=k}^{\infty} A_l, \qquad \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{l=k}^{\infty} A_l,$$

とする。

(1) $\liminf_{n\to\infty} A_n$ と $\limsup_{n\to\infty} A_n$ が一致しない $\{A_n\}$ の例をあたえよ。その例にたいしてそれぞれ $\liminf_{n\to\infty} A_n$ と $\limsup_{n\to\infty} A_n$ がどうなるかも記せ。

(2) （ボーナス問題）$x\in\mathbf{R}^d$ が $x\in\liminf_{n\to\infty} A_n$ であること、また $x\in\mathbf{R}^d$ が $x\in\limsup_{n\to\infty} A_n$ であることの直感的意味を言葉（日本語）で述べよ。

2.　X の部分集合族 $\mathcal{A}$ があたえられたとき、$\mathcal{A}$ をふくむ最小の加法族を $\mathcal{B}[\mathcal{A}]$ であらわし、$\mathcal{A}$ で生成される加法族とよぶ。

(1) $A\subset X,\ \mathcal{A}=\{A\}$ のとき、$\mathcal{B}[\mathcal{A}]$ はなにか。

(2) $\mathcal{A},\ \mathcal{B}$ が加法族のとき、$\mathcal{A}\cap\mathcal{B}$ も加法族になることをしめせ。

(3) $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$ はかならずしも加法族にならないことを反例をもってしめせ。

3.　$(X,\mathcal{B},\mu)$ を一般の測度空間, $A_n\in\mathcal{B}, n=1,2,\ldots,$ とする。

(1)$A_n\to A$ であることの定義をのべよ。このとき、必ず $A\in\mathcal{B}$ であるといえるか。いえなければ反例をあたえよ。

(2) $A_n\downarrow A$ かつ $\mu(A_1)<\infty$ ならば $\mu(A_n)\downarrow\mu(A)$.

　Hint: 測度の完全加法性より簡単に導かれる性質「$A_n\uparrow A$ ならば $\mu(A_n)\uparrow\mu(A)$.」をもちいよ。

(3) (2) をもちいて $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)<\infty$ ならば

$$\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n)\geq\limsup_{n\to\infty}\mu(A_n)$$

をしめせ。

　Hint: $B_k=\bigcup_{l=k}^{\infty} A_l$ とおくと $B_k\downarrow\limsup_{n\to\infty} A_n$ である。それと、測度の単調性をもちいよ。

(4) $\mu(X)=1$ とする。　$A_n\in\mathcal{B},\ n=1,2,\ldots,\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)<\infty$ ならば

$$\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n)=0$$

をしめせ。

4.　(1)　$\mathcal{A}^n$ を n 次元区間有限個の直和全体、m を $(\mathbf{R}^n,\mathcal{A}^n)$ 上

$$m(\prod_{i=1}^{n}(a_i,b_i])=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$$

によって定義されるジョルダン測度 とする。この記号 $\mathcal{A}^n$ および m を利用して $A\subset\mathbf{R}^n$ がルベーグ測度０であることの定義式を書け。

(2) μ を R^2 上のルベーグ測度とする。そのとき

$$\mu((x_1,x_2)\in R^2 : x_2=c)=0$$

をしめせ。

Hint: まず $\mathbf{R}$ の任意の有界な区間 I にたいして $\mu(I \times \{c\}) = 0$ をしめす。

小テスト II　2001.07.17

1. から **3.** までを必ず解き、**4.** か **5.** のどちらかを解け。(全部解いても良い。)

1.

f を $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上の実数値可積分関数とする。

(1)　任意の $a > 0$ に対し

$$\mu(x \in X; |f(x)| \geq a) \leq \frac{1}{a} \int_X |f(x)| \mu(dx).$$

(2) 上の不等式をもちいて、つぎをしめせ。

$f \geq 0$ とする。$\int f d\mu = 0$ ならば $f = 0$ a.e. である。

2.　f は $\mathbf{R}$ 上有界可測かつ原点で連続とする。そのとき

$$\lim_{t \to 0} (\pi t)^{-1/2} \int_{\mathbf{R}} e^{-x^2/t} f(x) dx = f(0).$$

をしめせ。

Hint: 変数変換 $x = \sqrt{t} u$.

3.　微分積分順序交換定理をもちいてつぎをしめせ。

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos ax \qquad dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-a^2/4}.$$

Hint: 左辺 $= I(a)$ とおき、$I'(a)$ を定理をもちいて計算せよ。

4.　$\{f_n\}$ を $\mu(X) = 1$ であるような測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上の $\mu - a.e.$ に有限な可測関数の列とする。$\{f_n\}$ が f に測度収束するとは

$$\lim_{n \to \infty} \mu(x; |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon) = 0 \quad \text{for any} \quad \epsilon > 0$$

がなりたつことをいう。

(1) 可測関数 f および $0 < \epsilon < 1$ にたいして、

$$\epsilon \mu(x; |f(x)| > \epsilon) \leq \int \min\{|f(x)|, 1\} d\mu \leq \epsilon + \mu(x; |f(x)| > \epsilon)$$

をしめせ。

(2) $\{f_n\}$ が f に測度収束するための必要十分条件は

$$\lim_{n \to \infty} \int \min\{|f_n(x) - f(x)|, 1\} d\mu = 0.$$

がなりたつことであることをしめせ。

(3) $\{f_n\}$ が f に μ-a.e. に収束すれば $\{f_n\}$ が f に測度収束することをしめせ。

ヒント：$\mu(X) < \infty$ であることに注意。（それがなければ一般には成り立たない。）

5. 測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上のルベーグ可測関数 $f(x)$ に対して

$$\|f\|_p = \left\{ \int_X |f(x)|^p d\mu \right\}^{1/p},$$

また、

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess.sup} |f| = \inf\{\alpha; |f(x)| \le \alpha \ \ \mu - a.e.\ \}$$

と定義する。$\|f\|_p, \|f\|_\infty$ は $+\infty$ をとりうる。$\mu(X) = 1$ であるような測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上において以下がなりたつことをしめせ。（ただし、不等式の両辺はともに有限な値をとるものと仮定してよい。）

(1) 任意の $p \ge 1$ にたいして $\|f\|_1 \le \|f\|_p$ である。

Hint: Hölder の不等式:$p, q > 1$ が $1/p + 1/q = 1$ の関係にあるとき、

$$\|f \cdot g\|_1 \le \|f\| \cdot \|g\|_q$$

をもちいよ。

(2)

$$\lim_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$$

をしめせ。

Hint: まず、任意の $p > 1$ にたいして $\|f\|_p \le \|f\|_\infty$ をしめし、そのあと任意の $\epsilon > 0$ にたいして $\|f\|_p \ge \|f\|_\infty - \epsilon$ をしめせ。

科目名　　**数学演習 X**　　**担当教官**　**糸 健太郎**

サブタイトル　幾何学演習

対象学年　　**３年**　　**１単位**　**選択**

教科書　小沢哲也著　曲面曲線と接続の幾何学（培風館）
参考書　小林昭七著　曲面と曲線の微分幾何（裳華房）
長野正著　曲面の数学（培風館）

予備知識

線形代数と（多変数の）微積分

講義内容

- 3 次元までのユークリッド空間（の部分集合）上の微分形式（約 5 回）

  外積，外微分，微分形式の引き戻し，微分形式の積分，ストークスの定理

- 2 次元，3 次元のベクトル解析の復習（約 4 回）

  ベクトル場の線積分，面積分．微分形式のストークスの定理から，ベクトル解析におけるガウスの発散定理，ストークスの定理が導かれることを確認する．

講義の感想

教えた内容についてはよく理解したと思う．生徒の好奇心，向学心をより刺激するような内容に出来たらよかったと思う．大人数ということもあって無難な内容にしてしまったが，もう少し高度な内容にもついてきただろうと思う．

科目名　**多様体のトポロジー**　**担当教官**　**大和 一夫**

サブタイトル　現代の幾何学

対象学年　**４年**　**６単位**　**選択**

教科書
参考書　村上信吾，多様体，共立出版

予備知識

特に仮定しない．

講義内容

ユークリッド空間上で学習してきた微積分学を多様体（局所ユークリッド空間）上で考える．そのために，逆関数の定理などの復習等から始める．多様体の定義を与えた後，例，技術的な補題等厳密な話しのあと，多様体の大域的な図形としてのおもしろさを直感的に説明する．そのおもしろさは連続変形のもとでの不変的性質にあり，その理論が講義タイトルのトポロジーである．

具体的な講義内容は以下の通り：

1. 数空間における準備
   - 無限回微分可能関数，実解析関数，微分位相同型写像，逆関数の定理.
2. 微分可能多様体
   - n 次元球面，実射影空間.
   - 閉多様体，境界のある多様体，部分多様体，ベッチ数.
   - ２次元多様体としての閉曲面.
3. 多様体上の無限回微分可能関数，写像,
   - 微分可能関数の性質，微分可能関数の存在，１の分割.
   - 微分位相同型.
4. 接ベクトル空間
   - 多様体上のなめらかな曲線.
   - 接ベクトル，接ベクトル空間，接ベクトルバンドル.
5. ベクトル場
   - １パラメーター変換群.
   - ベクトル場の積分曲線，軌道.
6. ベクトル場と関数環
   - 微分作用素，括弧積.

- リー微分.

7. リーマン計量
    - 曲線の長さ.
8. 微分形式
    - 交代形式.
    - 微分形式，外微分.
    - 線積分，グリーンの定理，外微分と境界作用素の双対性.
9. 問題と解説
    - 常微分方程式とベクトル場，Lobatchevski 平面，閉１次微分形と多価関数.

講義の感想

基礎的な，厳密な話ばかりでは，これで卒業してしまう人には幾何学のおもしろさが伝わらないと思ったので，図にかいて説明したことが多かったがわかってくれたかどうか.

科目名　近代解析　　**担当教官**　大沢 健夫

サブタイトル

対象学年　４年　　**６単位**　**選択**

教科書
参考書　岩沢健吉，代数関数論

予備知識

講義内容

主に岩沢健吉，代数関数論の 3 章以降に沿って，リーマン面の定義にはじまる 1 変数代数関数論の解析的理論を紹介した．その中には以下のトピックがふくまれる．

１．ワイルの直交射影の方法による非定数有理型関数の存在証明

２．上の応用として，リーマン面が加算基をもつことと，単連結リーマン面の分類定理（Koebe の一意化定理）の証明

３．代数関数体とリーマン面の対応

４．因子類群とヤコビ多様体（アーベル・ヤコビの定理）

５．トレリの定理とテータ因子

６．リーマンの分解定理

講義の感想

科目名　　体とガロア理論　　　　　　**担当教官**　齊藤 博

サブタイトル　体の拡大と代数方程式の解法

対象学年　　４年　　　　　　**６単位**　　**選択**

教科書
参考書　松阪和夫著　代数系入門・岩波書店
足立恒雄著　ガロア理論講義・日本評論社
J. ロットマン著　関口次郎訳　ガロア理論・シュプリンガー・フェアラーク東京
アルティン著　寺田文行訳　ガロア理論入門・東京図書

予備知識

代数学序論（群，環，体，イデアルなどの言葉と剰余群，剰余環の概念）

講義内容

- 標数，体上の１変数多項式環，代数拡大
- 単純拡大，拡大次数,（有限体の元の数）
- 拡大の埋込みの数の評価
- 埋込みの拡張
- 正規拡大と分解体
- 分離拡大
- ガロア拡大，基本定理
- 巡回拡大
- 円分体
- ３次４次の代数方程式の解法
- 一般の代数方程式の非可解性，作図問題
- 有限体の拡大

講義の感想

初めはほとんど予備知識を仮定せず必要なことは復習しながら講義を進めるつもりであったが，学生のそれは知っているとの言葉に幾つかの事を既知として講義したのは全体として理解を浅くする結果になったかも知れない．また，正規拡大と分離拡大は体の拡大の埋め込みで定義したが分かりにくくなったのかも知れない．

参考資料

演習問題

問題 1. (i) $\mathbf{Q}[\sqrt[3]{2}]$ を $\mathbf{Q}$ 係数の $\sqrt[3]{2}$ の多項式全体の作る環とする．その元は全て $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{2}^2$, $(a,b,c\in\mathbf{Q})$ と書けることを示せ.
(ii) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}\in\mathbf{Q}[\sqrt[3]{2}]$ を示せ.
(iii) ユークリッドの互除法により $a(x)(x^2+x-1)+b(x)(x^3-2)=1$ となる多項式 $a(x),b(x)\in\mathbf{Q}[x]$ を一組見付けよ.
(iv) (iii) の x に $\sqrt[3]{2}$ を代入することにより

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}^2+\sqrt[3]{2}-1}\in\mathbf{Q}[\sqrt[3]{2}]$$

を示せ.
(v) $\mathbf{Q}[\sqrt[3]{2}]$ が体であることを示せ.

問題 2. (i) $X^3-2\in\mathbf{Q}[X]$ は既約であることを示せ.
(ii) $\mathbf{Q}[X]/(X^3-2)\cong\mathbf{Q}[\sqrt[3]{2}]$ を示せ．(体の同型)
(iii) $[\mathbf{Q}[\sqrt[3]{2}]:\mathbf{Q}]=?$
(iv) $\mathbf{Q}[\sqrt[3]{2}]\supset K\supset\mathbf{Q}$ となる部分体 K は $K=\mathbf{Q}$ または，$K=\mathbf{Q}[\sqrt[3]{2}]$ であることを示せ.

問題 3. $\mathbf{F}_3=\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ を 3 個の元からなる標数 3 の体とする.
(i) $\mathbf{F}_3[X]$ の全ての monic な 2 次多項式を書け.
(ii) そのうち，既約なものは？
(iii) $\mathbf{F}_3[X]/(2$ 次既約$)$ は体として全て同型であることを示せ．[ヒント:その一つを $\mathbf{F}_3[X]/(f(X))$ とすると，２次既約多項式 $g(X)$ はこの体で根 α を持つことを示し，$\mathbf{F}_3[Y]\longrightarrow\mathbf{F}_3[X]/(f(X)), Y\mapsto\alpha$ は同型 $\mathbf{F}_3[Y]/(g(Y))\cong\mathbf{F}_3[X]/(f(X))$ を導くことを示せ．]

問題 4. K/k を体の有限次拡大とする．$a\in K$ に対して，$m_a: K\longrightarrow K, x\mapsto a\cdot x$ という k-線型写像を考える.
(i) $[K:k]=n$ とし，$b_1,\ldots,b_n$ を k ベクトル空間 K の基底とする時

$$ab_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}b_j,\qquad \alpha_{ij}\in k$$

とし，$A=(\alpha_{ij})$ を $n\times n$ 行列とする時，$g(t)=\det(tI_n-A)$ は基底 b_i の取り方によらないことを示せ. ($g(t)=g_a(t)=\det(t\cdot\mathrm{id}_K-m_a)$ と書くべきものである．) さらに， $g(A)=0$ を示せ.
(ii) $f(X)\in k[X]$ が n 次既約多項式，$K=k[X]/(f(X))$ の時，$X \bmod (f(X))=x$ と書くと $g_x(t)=f(t)$ を示せ．[ヒント: 基底として, $1,x,\ldots,x^{n-1}$ を取れ．]
(iii) 一般に，$[K:k[a]]=m$ とし，$f(t)\in k[t]$ を $a\in K$ の最小多項式とする時，$g_a(t)=f(t)^m$ を示せ．[ヒント: $[K:k[a]]\cdot[k[a]:k]=[K:k]$ の証明を思い出せ．]

問題 5. $\mathbf{Q}[\sqrt[3]{2}]$ のなかで，$\sqrt[3]{2}^2+\sqrt[3]{2}-1$ の最小多項式を前問の方法で求めよ.

問題 6. k を体，A を整域で k 上のベクトル空間として有限次元とする：$\dim_k A<\infty$. A が体であることを示せ.

問題 7. $\sqrt[3]{2}+\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\in\mathbf{Q}[\sqrt[3]{2},\sqrt{-3}]$ の $\mathbf{Q}$ 上の最小多項式を求めよ.

問題 8. (i) $k_i\subset K,(i\in I)$ が体 K の部分体の族である時, $\bigcap_{i\in I}k_i\subset K$ も部分体であることを示せ.
(ii) K/k を体の拡大, $E\subset K$ を部分集合とする. $I=\{F\subset K;$部分体$,k\cup E\subset F\}$ と置く. $k'=\bigcap_{F\in I}F\subset K$ は次の性質を持つことを示せ.
(a) $k'\subset K$ は部分体で, $k\cup E\subset k'$.
(b) $k''\subset K$ が部分体で, $k\cup E\subset k''$ ならば, $k'\subset k''$.
性質 (a), (b) を持つ k' は K 内で唯一つであり, $k'=k(E)$ と書き, k 上 E で生成された K の部分体と言う.
(iii) $E_1,E_2\subset K$ の時, $k(E_1\cup E_2)=k(E_1)(E_2)$ を示せ.
(iv) $E=\{a_1,\ldots,a_n\}$ の時, $k(E)=k(a_1,\ldots,a_n)$ と書く. それは, $f(x_1,\ldots,x_n),g(x_1,\ldots,x_n)$ を変数 $x_1,\ldots,x_n$ を持つ多項式で それに $a_1,\ldots,a_n$ を代入した $f(a_1,\ldots,a_n),g(a_1,\ldots,a_n)$ で, $g(a_1,\ldots,a_n)\neq 0$ となるものについての $f(a_1,\ldots,a_n)/g(a_1,\ldots,a_n)$ の全体と一致することを示せ.
(v) $a_1,\ldots,a_n$ が k 上代数的な時, $k(a_1,\ldots,a_n)=k[a_1,\ldots,a_n]$ （即ち, (iv) で $g=1$ と取ったもの全体と一致すること）を示せ.

問題 9. (i) 集合 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}\text{-alg}}(\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}),\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2},\sqrt{-3}))$ を求めよ.
(ii) 集合 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}\text{-alg}}(\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2},\sqrt{-3}),\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}))$ を求めよ.

問題 10. $p>0$ を素数とする.
(i) $0<i<p$ の時, ２項係数について $\binom{p}{i}\equiv 0 \pmod p$ を示せ.
(ii) K を標数 p の体とする. $a,b\in K$ に対して, $(a+b)^p=a^p+b^p$ を, 従って, $Fr:K\longrightarrow K,x\mapsto x^p$ は環準同型であることを示せ.

問題 11. $p>0$ を素数, x を変数として, $\mathbf{F}_p$ 係数の x の有理式全体の作る体 $K=\mathbf{F}_p(x)$ の中で x^p の有理式全体の作る部分体 $k=\mathbf{F}_p(x^p)$ を考える.
(i) K の元は, f/g $(f\in\mathbf{F}_p[x],\,g\in\mathbf{F}_p[x^p]$) の形に書けることを示せ.
(ii) $[K:k]=?$
(iii) 集合 $\mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(K,K)$ (或いは K の任意の拡大体 F について $\mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(K,F)$) を求めよ.

問題 12. 次の内, 正規拡大であるものはどれか？
(i) $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})/\mathbf{Q}$
(ii) $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbf{Q}$
(iii) $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2},\sqrt{-3})/\mathbf{Q}$
(iv) $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2},\sqrt{-3})/\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$
(v) $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2},\sqrt{-3})/\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$

問題 13. K,N が共に体 k の拡大体で N/k は正規拡大とする. $\mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(K,N)\neq\emptyset$ ならば, K から N の任意の拡大体への k-準同型写像は N への準同型写像（を経由すること）になることを示せ.

問題 14. N/k が正規拡大とする. $a,b\in N$ が同一の k 上の既約多項式の根である（即ち a,b の k 上の最小多項式が一致する）ための必要充分条件は, $\sigma\in\mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(N,N)$ で $\sigma(a)=b$ となるものが存在することであることを示せ.

問題 15. N/k を有限次拡大とする．N/k が正規拡大であるための必要充分条件は，任意の $a \in N$ の k 上の最小多項式が N で分解する（１次式の積になる）ことである事を示せ.

問題 16. K/k を有限次拡大とする．次が同値であることを示せ.

(i) K/k が分離的.

(ii) 任意の $a \in K$ は k 上分離的.

(iii) $a_1, \dots, a_r \in K$ で各 a_i は k 上分離的，$K = k(a_1, \dots, a_r)$ となる有限個の $a_1, \dots, a_r$ がある.

問題 17. F/k を有限次拡大とする．$\{a \in F; a : k \text{ 上分離的 }\} = K$ は体になり，K/k は分離拡大であることを示せ.

問題 18. K/k が分離的ならば，N/K で N/k が分離的且つ正規であるものがあることを示せ.

問題 19. $f \in k[X]$ とする.

(i) k の標数が 0 ならば どんな f も分離的であることを示せ.

(ii) f が k 上既約とし $p > 0$ を k の標数とする．次を示せ.

$f : k$ 上分離的でない $\Leftrightarrow f(X) = g(X^p)$ となる $g(Y) \in k[Y]$ がある

(iii) すべての $f \in \mathbf{F}_p[X]$ は分離的であることを示せ.

問題 20. K に群 G が効果的に作用しているとする: $G \subset \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}\text{-alg}}(K, K)$．$K^G = \{a \in K; \sigma(a) = a, \forall \sigma \in G\}$ と置くと，K/K^G はガロア拡大で $Gal(N/N^G) \cong G$ であることを示せ.

問題 21. $N/K/k$ を体の拡大とする時，次の中で正しいのはどれか，正しければ証明し，正しくなければ反例を揚げよ.

(i) N/k が正規拡大ならば K/k も正規拡大.

(ii) N/k が正規拡大ならば N/K も正規拡大.

(iii) N/K, K/k が正規拡大ならば N/k も正規拡大.

問題 22. N/k はガロア拡大とし，ガロア対応で，その中間体 K とそのガロア群 $G = Gal(N/k)$ の部分群 H が対応しているとする.

(i) $\sigma \in G$ に対して，中間体 $\sigma(K)$ と部分群 $\sigma H \sigma^{-1}$ が対応していることを示せ.

(ii) K/k が正規拡大である為の必要充分条件は $\sigma(K) = K, \forall \sigma \in G$ であることを示せ.

(iii) 更に，中間体 K' と部分群 H' が対応し $K' \subset K$ とすると $H' > H$ （部分群）であるが K/K' が正規拡大である為の必要充分条件は H が H' の正規部分群であること，更に，この時，K/K' はガロア拡大で，$Gal(K/K') \cong H/H'$ を示せ．（ヒント: N/K' はガロア拡大で そのガロア群は H' であった．）

問題 23. N/k はガロア拡大で $G = Gal(N/k)$ をそのガロア群，N_1, N_2 を N/k の中間体，G_1, G_2 を対応する G の部分群とする.

(i) 中間体 $N_1 \cdot N_2 = N_1(N_2)$ に対応する部分群は何か？

(ii) 中間体 $N_1 \cap N_2$ に対応する部分群は何か？

(iii) N_1/k, N_2/k がガロア拡大で，$N_1 \cdot N_2 = N$, $N_1 \cap N_2 = k$ の時，G, G_1, G_2 を $Gal(N_1/k), Gal(N_2/k)$ を使って表せ.

問題 24. N/k はガロア拡大，K はその中間体，$a \in K$ とする．$G = Gal(N/k)$, $H < G$ を K に対応する部分群，$H' < G$ を $k(a)$ に対応する部分群とする．$H < H'$ である．

(i) $\tau \in H'$, $\sigma \in G$ に対して，$\sigma\tau(a) = \sigma(a)$, 従って，$\dot{\sigma} \in G/H$ に対して， $\sigma(a)$ は $\sigma \in \dot{\sigma}$ の取り方に依らずに決まることを示せ．これを $\dot{\sigma}(a)$ とかく．

(ii) 制限写像 $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(K, N)$ により $\bar{\rho} : G/H \cong \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(K, N)$ を示し，$\dot{\sigma} \in G/H$ に対して，$\dot{\sigma}(a) = \bar{\rho}(\dot{\sigma})(a)$ を示せ．

(iii) $\prod_{\dot{\sigma} \in G/H'}(t - \dot{\sigma}(a)) = g_a(t)$ は a の k 上の最小多項式であることを示せ．

(iv)

$$\sum_{\dot{\sigma} \in G/H} \dot{\sigma}(a) = [K : k(a)] \sum_{\dot{\sigma} \in G/H'} \dot{\sigma}(a), \qquad \prod_{\dot{\sigma} \in G/H} \dot{\sigma}(a) = (\prod_{\dot{\sigma} \in G/H'} \dot{\sigma}(a))^{[K:k(a)]}$$

はそれぞれ，4 (i) の (K に対する） $\mathrm{Tr}(A)$, $\det(A)$ と一致することを示せ．これらを $\mathrm{Tr}(a) = \mathrm{Tr}_k^K(a)$, $\mathrm{Nm}(a) = \mathrm{Nm}_k^K(a)$ と書いて，トレース，ノルムという．

(v) これらは $\mathrm{Tr} : K \longrightarrow k$, $\mathrm{Nm} : K^\times \longrightarrow k^\times$ と見なせ，加法群，乗法群の準同型写像であることを示せ．$(K^\times = K \setminus \{0\}.)$

(vi) もっと一般に，

$$g_a(t) = \prod_{\dot{\sigma} \in G/H}(t - \dot{\sigma}(a)) = \prod_{\tau \in \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(K,N)}(t - \tau(a))$$

($g_a(t)$ は 4, (i) で K に対して定義されたもの）を示せ．

問題 25. K/k を有限次分離拡大とする．

$$K \times K \longrightarrow k, \quad (x, y) \mapsto \mathrm{Tr}(xy)$$

は，非退化 k-双線形形式であることを示せ．

問題 26. N/k を巡回拡大，$\sigma \in Gal(N/k)$ をガロア群の生成元とする．$a \in N$ に対して，$\mathrm{Tr}(a) = 0$ である為の必要充分条件は $a = b - \sigma(b)$ となる $b \in N$ が存在することである，ことを示せ．(ヒント: $z = a\sigma(x) + (a + \sigma(a))\sigma^2(x) + \cdots + (a + \cdots + \sigma^{n-2}(a))\sigma^{n-1}(x) + (a + \cdots + \sigma^{n-1}(a))\sigma^n(x)$ を考える．)

問題 27. $f(X)$ を体 k 上の分離多項式，N をその分解体，$R = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ を $f(X) = 0$ の相異なる根全体の集合とする: $N = k(R)$．N/k はガロア拡大で $G = Gal(N/k)$ をそのガロア群とする．これを方程式 $f(X) = 0$ の k 上のガロア群という．

(i) $\sigma \in G$ は，各 $\alpha \in R$ に対して，$\sigma(\alpha) \in R$ であり，$\bar{\sigma} : R \longrightarrow R$ を引き起こし，$\bar{\sigma} \in S_R$ (R 上の対称群) であり，それから導かれる $G \longrightarrow S_R, \sigma \mapsto \bar{\sigma}$ は群の単射準同型であることを示せ．

(ii) $f(X)$ が既約である為の必要充分条件は G が R に推移的に作用することである，ことを示せ．

問題 28. 標数 $\neq 2$ の体の上の既約とは限らない monic 分離２次式のガロア群を求めよ．

問題 29. 標数 $p > 0$ の体 k を考え，$a \in k$ に対して，$f(X) = X^p - X - a$ と置く．

(i) $f(X)$ が k 上の分離多項式であることを示せ．

(ii) k のある拡大体 K で $f(X)$ が根 α を持てば，$\alpha + 1$ も根であることを示せ．そして，根を全部求めよ．

(iii) $k(\alpha)/k$ はガロア拡大で $\alpha \notin k$ ならば，そのガロア群が $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ であること示せ．

問題 30. X^5-1 の $\mathbf{Q}$ 上のガロア群を計算し，1 の原始 5 乗根を（整数の）加減乗除と根号（の繰り返し）で表せ.

問題 31. N/k はガロア拡大とする.
(i) $\sigma \in Gal(N/k) = G > H$ ならば，$N^{\sigma H \sigma^{-1}} = \sigma(N^G)$ を示せ.
(ii) $H \triangleleft G \Leftrightarrow N^H/k$: 正規拡大 を示せ.
(iii) $H < H' < G$ とする. $H \triangleleft H' \Leftrightarrow N^H/H^{H'}$: 正規拡大 を示せ.
(iv) $K' = N^{H'}$, $K = N^H$ と置く時，K/K' がガロア拡大ならば, $Gal(N/K') \longrightarrow Gal(K/K')$ は全射準同型で，核は H と同型であることを示せ.

問題 32. 1 の原始 n 乗根 ζ_n の $\mathbf{Q}$ 上の最小多項式を $\Phi_n(x)$ とする:

$$\Phi_n(x) = \prod_{0<m<n,(m,n)=1} (x-\zeta^m)$$

(i) $\Phi_3(x)$ を求めよ.
(ii) $\mathbf{F}_7$ で $\Phi_3(x)$ は既約か？

問題 33. $1 \le n \le 10$ について，$Gal(\mathbf{Q}(\zeta_n)/\mathbf{Q})$ を求めよ．その部分群, $\mathbf{Q}(\zeta_n)$ の部分体を全て求めよ.

問題 34. (i) ζ_7 を加減乗除根号を使って表せ.
(ii) $Gal(\mathbf{Q}(\zeta_{11})/\mathbf{Q})$ を求めよ.
(iii) ζ_{11} を加減乗除根号を使って表せ.

問題 35. (i) $Gal(\mathbf{Q}(\zeta_{17})/\mathbf{Q})$ を求めよ.
(ii) ζ_{17} を加減乗除平方根を使って表せ.
(iii) 正１７角形を作図せよ.

問題 36. K/k を標数 $p>0$ の体の拡大とする.
K/k が p 次巡回拡大 $\Leftrightarrow K = k(x)$, $\quad x \notin k$ は $X^p - X - a = 0$ の根 $(a \in k)$.
（ヒント: $\Rightarrow$: $26 + \mathrm{Tr}(-1) = 0$. $\Leftarrow$: 29.）

問題 37. $m, n \in \mathbf{Z}$ とする．次を示せ.
(i) $(m,n) = 1 \Rightarrow \mathbf{Z}/mn\mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$
(ii) $(m,n) = 1 \Rightarrow (\mathbf{Z}/mn\mathbf{Z})^\times \cong (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^\times \times (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$, ここで $?^\times$ は 環 ? の可逆元の作る乗法群.
(iii)

$$n = \prod_{p|n:\text{素数}} p^{n_p} \Rightarrow (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times = \prod_{p|n:\text{素数}} (\mathbf{Z}/p^{n_p}\mathbf{Z})^\times$$

(vi) p を素数とする．自然な群準同型 $(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times \longrightarrow (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times$ は全射で核は $(1+p\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times$ であることを示せ.（ヒント: $\frac{1-r^n}{1-r} = 1 + r + \cdots + r^{n-1}$ に注意.）
(v) $p \ge 3$ を素数とする．$(1+p)^{p^{n-2}} \not\equiv 1 \pmod{p^n}$, $|(1+p\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times| = p^{n-1}$,

$$(1+p\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times \cong \mathbf{Z}/p^{n-1}\mathbf{Z}, \qquad (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times \cong \mathbf{Z}/p^{n-1}\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/(p-1)\mathbf{Z}$$

（ヒント: $i \ge 2$ に対して $p^i\binom{p^{n-2}}{i} = \frac{p^{n-2+i}}{i}\binom{p^{n-2}-1}{i-1} \equiv 0 \pmod{p^n}$ を示せ．）
(vi) $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^\times = 1$, $\quad (\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})^\times \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, $\quad (\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})^\times \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.
(vii) $(\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z})^\times \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2^{n-2}\mathbf{Z}$, $\quad (n \ge 2)$ （ヒント: (v) のまね）.

問題 38. $\pi : G \longrightarrow \bar{G}$ が有限群の全射準同型とする．
(i) N が G の部分群 H の正規部分群ならば $\pi(N)$ は $\pi(H)$ の正規部分群で，$H/N \longrightarrow \pi(H)/\pi(N)$ は全射であることを示せ．これから，H/N が巡回（可換）群ならば，$\pi(H)/\pi(N)$ もそうであることを示せ．
(ii) G が可解ならば $\bar{G}$ も可解であることを示せ．

問題 39. H' は有限群 G の部分群とする．
(i) N が G の部分群 H の正規部分群ならば $N \cap H'$ は $H \cap H'$ の正規部分群で，$(H \cap H')/(N \cap H') \longrightarrow H/N$ は単射であることを示せ．これから，H/N が巡回（可換）群ならば，$(H \cap H')/(N \cap H')$ もそうであることを示せ．
(ii) G が可解ならば H' も可解であることを示せ．

問題 40. N が有限群 G の正規部分群とする．G が可解である為には N と G/N が可解であることが必要充分であることを示せ．

問題 41. $f(X) \in k[X]$ を次数 > 1 の既約多項式とする．
$f(X)$ の一根が k から加減乗除根号の繰り返しで書けることと　$f(X)$ の全ての根が k から加減乗除根号の繰り返しで書けることは同値であることを示せ.（ヒント: 14 ）

問題 42. (i) G は素数 p 次の対称群の部分群で，集合 $\{1, \ldots, p\}$ に推移的に作用しているとし $(12) \in G$ とする．$G = S_p$ を示せ.（ヒント: 「$i \sim j \Leftrightarrow (i = j$ 又は $(ij) \in G)$」 が集合 $\{1, \ldots, p\}$ 上の同値関係であること，$\sigma \in G$ が $\sigma(i) = k$ ならば $i \sim j \Leftrightarrow k \sim \sigma(j)$ を示せ．
(ii) $X^5 - 10X - 5 \in \mathbf{Q}[X]$ は既約多項式であることを示せ．
(iii) $x^5 - 10X - 5 = 0$ が３実根，２虚根を持つことを示せ．
(iv) $x^5 - 10X - 5 = 0$ の根が $\mathbf{Q}$ から加減乗除根号をいくら繰返し用いても書けないことを示せ．

問題 43. 体 K について，次の４条件は同値であることを示せ．
(i) K 係数多項式 ($\neq$ 定数）は K に根を持つ．
(ii) K 係数多項式 ($\neq$ 定数）は $K[x]$ で１次式の積に分解される．
(iii) 既約な K 係数多項式は１次式である．
(iv) K の代数拡大体は K のみである．
この同値な条件を充たす体を代数閉体という．

問題 44. 次の順序で複素数体 $\mathbf{C}$ が代数閉体であることを示せ．
(i) 奇数次の実数係数の多項式は少なくとも一つ実根を持つことから $\mathbf{R}$ には奇数次拡大が存在しないことを示せ．
(ii) $\mathbf{C}$ は，$\mathbf{R}$ の唯一の２次拡大体であり，$\mathbf{C}$ において，$x^2 - c = 0$, $c = a + b\sqrt{-1}$, $x = y + z\sqrt{-1}$, $(a, b, y, z \in \mathbf{R})$ は $\mathbf{C}$ に根を持つことを示せ．
(iii) $\mathbf{R}$ のガロア拡大の拡大次数は ≤ 2 であることを示せ.（ヒント: (i) からガロア群は 2-群であること，その時，中心 $\neq 1$ をいうことに依り，位数 > 2 ならば，指数 4 の部分群を持つこと，それが (ii) に矛盾することを示せ.）
(iv) $\mathbf{C}$ が代数閉体であることを示せ．

問題 45. (i) K/k が（有限次とは限らない）代数拡大で全ての k 係数多項式は K で分解するとする．K は代数閉体であることを示せ．この時，K を k の代数閉包という．
(ii) この時，k の任意の有限次拡大体 E に対して，$\mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(E,K) \neq \emptyset$ である．(実は任意の代数拡大に対して同じ結論が言える.）
(iii) 逆に，K/k が（有限次とは限らない）代数拡大で k の任意の有限次拡大体 E に対して，$\mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(E,K) \neq \emptyset$ とする．全ての k 係数多項式は K で分解する事を示せ．

問題 46. 素数 p の冪乗 $q = p^a > 1$, $(n,p) = 1$, $\mathbf{F}_q$ 上の $X^n - 1$ の分解体 $\mathbf{F}_{q^m}$: $m = \min\{m; q^m \equiv 1 \pmod n\}$ とする．$\Phi_n(X) \in \mathbf{Z}[X]$ の像 $\in \mathbf{F}_q[X]$ が既約 $\Leftrightarrow$ $(\mathbf{Z}/n)^\times \ni q$ の位数が $\phi(n)$ を示せ．

問題 47. $m \in \mathbf{Z}_{>0}$, $q = p^a > 1$, $d = (q-1, m)$ とする．$\zeta \in \mathbf{F}_q^\times$ を 1 の原始 $q-1$ 乗根とする．$\mathbf{F}_q$ の元の m 乗の形の $\mathbf{F}_q^\times$ の元は $\zeta^{k\cdot d}$ $(0 \geq k < \frac{q-1}{d}$ であることを示せ．また，この各元は d 個の $\mathbf{F}_q$ の元の m 乗根になっていることを示せ．

問題 48. $f \in \mathbf{F}_q[X]$ が既約の時，$f(\alpha) = 0$, $\alpha \in \mathbf{F}_{q^m}$ に対して，$\mathbf{F}_q(\alpha)$ は f の分解体であることを示せ．

問題 49. i) $\mathbf{F}_5[X]$ で $X^2 - 2$ が既約であることを示せ．
ii) $\mathbf{F}_{25} = \mathbf{F}_5(\alpha)$, $\alpha^2 = 2$ とする．この体の元が $a + b\cdot\alpha$, $a, b \in \mathbf{F}_5$ の形に書けることを示せ．
iii) 1 の原始 24 乗根 $\in \mathbf{F}_{25}$ を ii) の形の中から（一つ）見つけよ．

定期試験　2001/09/27:10:30–12:00

問題 1. (i) $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{3}, \sqrt{2})$ の $\mathbf{Q}$ 上の拡大次数を求めよ．
(ii) $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{3}, \sqrt{2}) = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2})$ を示せ．
問題 2. $n > 1$ を整数, $\Phi_n(t)$ を 1 の原始 n 乗根の $\mathbf{Q}$ 上の最小多項式とする．
(i) n が奇数の時，$\Phi_{2n}(t) = \Phi_n(-t)$ を示せ．
(ii) n が偶数の時 $\Phi_{2n}(t) = \Phi_n(t^2)$ を示せ．
問題 3. (i) $x^6 + 3 = 0$ の $\mathbf{Q}$ 上のガロア群を求めよ．
(ii) $x^6 + 2 = 0$ の $\mathbf{Q}$ 上のガロア群を求めよ．
問題 4. $f \in k[X]$ とする．
(i) f が k 上既約とし $p > 0$ を k の標数とする．次を示せ．
$f : k$ 上分離的でない $\Leftrightarrow$ $f(X) = g(X^p)$ となる $g(Y) \in k[Y]$ がある
(ii) すべての $f \in \mathbf{F}_p[X]$ は分離的であることを示せ．

科目名　代数学 III ／代数学概論 III　　**担当教官**　金銅 誠之

サブタイトル　複素多様体入門

対象学年　４年／大学院　　**２単位**　**選択**

教科書

参考書　堀川，複素代数幾何学入門，岩波
P. Griffiths, J. Harris, Principles of Algebraic geometry

予備知識

関数論

講義内容

講義内容は以下の通り：

1. 複素多様体の例（２回）
   - 2 次元球面，射影空間，複素トーラス，Hopf 多様体，ブローアップ，$SL(2, R)$ と上半平面，正則写像，逆関数定理.
2. 層とコホモロジー（５回）
   - Mittag-Leffler の問題
   - 層
   - 層のコホモロジー (Cech)，完全系列
3. DeRham Theory（２．５回）
   - ベクトル束
   - De Rham の定理
   - Dolbeault の定理
   - 簡単なコホモロジーの計算例
4. 因子と直線束（１．５回）
   - Div, Pic
5. Compact Riemann 面（１．５回）
   - Riemann-Roch, Serre duality, Linear system
   - 楕円曲線の Weierstrass model

講義の感想

教務委員会より大学院１年の基礎知識をつける講義をしてほしいとの依頼があり，特に代数，幾何学専攻

の学生を対象とした入門的講義を目標とした．入門的講義としては，コホモロジーをやるよりも，楕円曲線論等より具体的でおもしろい対象に絞った講義の方が良いのではなかったかと，反省している．

科目名　　**幾何学 III ／幾何学概論 III**　　**担当教官**　**太田 啓史**

サブタイトル　多様体のコホモロジーとできれば特性類

対象学年　　**４年／大学院**　　**２単位**　　**選択**

教科書
参考書　Bott and Tu, Differential forms in algebraic topology, Springer.
中岡稔，位相幾何，共立.
服部晶夫，位相幾何，岩波.
森田茂之，微分形式の幾何学１，２，岩波.

予備知識

3 年次までの科目（微分積分学，線形代数学の基本的事項（数学基礎 I〜IV）抽象ベクトル空間，解析学序説，集合と位相，ベクトル解析，多様体と微分形式，基本群と被覆空間）は既知とする．同じく前期に開講されている大和先生による 4 年生向けの「多様体のトポロジー」における内容を修得しているか，そうでなければ同時に受講することを強く望む，と授業案内には書いた.

講義内容

微分形式を適宜簡単に復習しつつ，de Rham cohomology を中心に基本的なことを講議した．4 年大学院共通で，4 年生の多くが教育実習のため不在の際には，本論から少し外れてセル複体の整係数ホモロジー，普遍係数定理，de Rham の定理 の紹介などもした.

具体的な講義内容は以下の通り：

(1) de Rham コホモロジーの定義（1.5 回）

- 1.1) いろいろなコホモロジーとその参考書.
- 1.2) 多様体と微分形式，外微分の復習.
- 1.3) de Rham コホモロジーの定義.
- 1.4) 例（$H^0(M)$, $H^*(\mathbf{R})$ の計算，微積分学の基本定理）.

(2) de Rham コホモロジーのホモトピー不変性（1.5 回）

- 2.1) ホモトピーの復習，cochain map, cochain homotopy.
- 2.2) ホモトピー不変性の証明．Poincaré の補題の証明．微積分学の基本定理再び.

(3) 和空間のコホモロジー (Mayer-Vietoris exact sequence) （2 回）

- 3.1) ホモロジー代数の一般論からの準備 (複体の短完全系列からコホモ ロジーの長完全系列).
- 3.2) Mayer-Vietoris exact sequence, 証明．連結準同型射の記述．連結な分解の場合のある性質についての注意.
- 3.3) 計算例 1. S^n のコホモロジーの計算，$\mathbf{Z}$ 係数コホモロジーの注意，生成元の具体的記述.

- 3.4) 計算例 2. $\mathbf{C}P^n$. (射影空間の定義，多様体であることの証明，Mayer-Vietoris を用いたコホモロジーの計算．$\mathbf{Z}$ 係数コホモロジーの注意．)

(4) 積空間のコホモロジー (Künneth formula)　（1 回）

- 4.1) ベクトル束の基本事項 (定義，局所自明性，局所自明化写像，変換関数，コサイクル条件，ベクトル束の同型，直和，テンソル，外積束，切断，ベクトル場，微分形式を切断と思うこと，ベクトル束の引き戻し).
- 4.2) 直積空間上の外積束の分解.
- 4.3) de Rham コホモロジーの Künneth formula. 計算例.
- 4.4) 整係数コホモロジーの Künneth formula についての注意．Tor の基本的性質.

(5) 相対 de Rham コホモロジー（0.5 回）

- 5.1) 定義．(部分多様体，埋め込みの復習).
- 5.2) コホモロジーの長完全系列.
- 5.3) 相対ホモトピー不変性.
- 5.4) 計算例．$H^*(D^n, S^{n-1})$.
- 5.5) 3 組のコホモロジーの長完全系列.

(6) 胞複体のホモロジー，コホモロジーおよび de Rham の定理，概説（1.5 回）

- 6.1) 胞体，胞複体．胞複体のホモロジー.
- 6.2) 例 1. D^n, S^n, T^2.
- 6.3) 例 2. 複素射影空間の胞体分割とそのホモロジーの計算.
- 6.4) 整係数コホモロジー，普遍係数定理．(証明なし)．Ext の基本的性質．G 係数ホモロジー群，普遍係数定理.
- 6.5) de Rham の定理．同型写像が積分により与えられることを説明したのみで証明はやらず．コホモロジー環 (de Rham の場合の積のみ説明しカップ積は名前を出したのみ) で環としての同型であることの注意.

(7) Poincaré 双対（1.5 回）

- 7.1) 非退化双線形写像．コンパクト多様体の Poincaré 双対.
- 7.2) コンパクト台をもつコホモロジー．例，コンパクト台をもつコホモロジーに対する Poincaré の補題 (ファイバー積分が同型写像を与えること)．相対コホモロジーとの関係．非コンパクト多様体の Poincaré 双対.
- 7.3) Poincaré 双対の簡単な応用例.（基本類の存在，奇数次元多様体のオイラー数.）
- 7.4) 閉部分多様体の Poincaré 双対．例 $(S^n \times S^m)$.「直 交」していることの注意.
- 7.5) 交叉数．例 $(S^n \times S^m)$.

(8) 法ベクトル束と管状近傍定理（0.5 回）

- 8.1) 動機 (7.4) を一般的状況で詳しく調べる．法ベクトル束．例 (対角線集合の法束，ベクトル束のゼロ切断の法束).
- 8.2) 管状近傍定理．(存在証明はせず．)
- 8.3) ベクトル束の向き．

(9) Thom 同型と Thom 類（1 回）

- 9.1) ファイバーに沿う積分．ファイバー方向にコンパクト台をもつコホモロジー．
- 9.2) Thom 同型．コンパクト台をもつコホモロジーによる定式化，相対コホモロジーによる定式化．Poincaré の補題のベクトル束版と思えること．
- 9.3) Thom 類．特徴付け．Thom 類の乗法性.
- 9.4) Thom 類と Poincaré 双対．法束の Thom 類としての理解.

(10) Euler 類（1 回）

- 10.1) Thom 類による Euler 類の定義.
- 10.2) 非ゼロ切断の存在と Euler 類.
- 10.3) Euler 類の自然性と直和束の Euler 類（Thom 類の乗法性）.
- 10.4) 接束の Euler 類の積分と多様体の Euler 数．対角集合の Poincaré 双対．例 (ベクトル場の特異点).

講義の感想

講義時間以外でも自分で復習あるいは先のことをどんどん勉強して欲しい.

科目名　解析学 III ／解析学概論 III　**担当教官**　三宅 正武

サブタイトル　解析的微分方程式と優級数法

対象学年　４年／大学院　**２単位**　**選択**

教科書　なし
参考書　なし

予備知識

特に仮定しないが，複素関数論の知識があれば助けになる．

講義内容

解析的常及び偏微分方程式に現れる形式的巾級数解の収束性を示す方法は歴史も古く，多くの方法が知られている．この講義では，最も素朴な優級数を用いる方法が多くの問題において有効に用いられる事を紹介するのが目的であった．証明の要点は優級数（優関数）の満たす方程式が関数方程式（多くの場合は２次方程式）として与えられ，古典的な陰関数定理（２次方程式の正則解）により収束性が得られると言うもので，従来の証明に比べて格段に単純で短く，適用範囲も広い．

具体的な講義内容は以下の通り：

1. 正則関数と優級数の構成法
2. 陰関数定理と優級数法（単独方程式，連立方程式）
3. 解析的常微分方程式と優級数法（単独方程式，連立方程式）
4. 線形微分方程式の形式解の収束半径の改良と解析接続
5. 第１種の特異点型常微分方程式の形式解の収束性
6. 第１種の特異点型常微分方程式の標準形への変換と基本解
7. 不確定特異点と発散形式解の発散指数（ジュブレイ指数）の決定問題
8. コーシー・コワレフスキの定理
9. 特異一階偏微分方程式とポアンカレ条件下での形式階の収束性
10. 特異ベクトル場の標準形への変換問題

講義の感想

出席している学生は学習態度も真面目で，合格した学生は出席率も高く，レポートも殆ど提出していた．

科目名　　**確率論 I ／確率論概論 I**　　**担当教官　長田 博文**

サブタイトル　確率過程論入門-random walk，martingale からブラウン運動へ

対象学年　　**４年／大学院**　　**２単位　選択**

教科書　なし
参考書　R. Durrett,「Probability: Theory and Examples」
西尾真喜子,「確率論」
小谷眞一,「測度と確率，１，２」

予備知識

測度論

講義内容

確率論の授業としては３年後期に引き続き２回目であり，授業が始まる前は，確率論の基礎から中心極限定理までの知識を学生諸君が持っていることを期待していた．しかし，最初の授業で念のためアンケート代わりの試験をしこれらの点に確認したところ，ほとんどの学生が中心極限定理はおろか大数の法則，独立性，確率変数など全く理解していないことに気がついた．よく考えてみると，確率論以外を専攻する学生も多くいたので次回以降３回は復習に当てた．具体的な講義内容は以下の通り：

1. 序（１回）　4/16
   - 序 – Simple Random Walk とブラウン運動．Dirichlet 問題との関係　確率論とは何か，そして，何を知りたいのか.
   - アンケート代わりの試験
2. 確率論の基礎から中心極限定理までの復習（３回）　4/23, 5/7, 5/14
   - 確率空間, 確率測度. 確率空間の例. 確率変数, 確率過程. 平均, 分散そして Chebyshev's inequality．像測度．変数変換．直積測度．確率変数の独立．convolution．確率空間の可算直積.（可算無限個，或いはそれ以上の濃度の）独立同分布確率変数列，大数の法則．応用.
3. Kolmogorov の拡張定理（１回）　5/21
4. Kolmogorov の連続変形定理（１回）　5/28
5. ブラウン運動（４回）　6/4, 6/11, 6/18, 6/25
   - ブラウン運動の構成
   - ブラウン運動の不変性
   - ブラウン運動の sample path の性質　（ヘルダー連続性，微分不可能性，二次変分など）
6. Ito の公式（序）（１回）7/2
7. 条件付き平均と Radon-Nikodym の定理（1 回）7/9
8. martingale 理論（1 回）7/16

9. quasi-martingale に対する Ito の公式，Lévy の定理（１回）7/23

講義の感想

多元で確率論を学んで卒業する人は，確率論における専門が何であれ，学部生ならブラウン運動，修士学生なら伊藤解析を理解している，という状況を造りたいと思う.

参考資料

1　始めに、アンケート代わりの試験　2001.04.16

問題 1.1.　確率変数の定義を述べよ。

問題 1.2.　測度空間 $(S_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)$, $(S_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$ が２つあたえられたとする。μ_1 と μ_2 の直積測度の定義を述べよ。

問題 1.3.　２つの確率変数　X と Y が「独立」とはどういうことか。定義を述べよ。

問題 1.4.　大数の法則とは何か。その主張を述べよ。

問題 1.5.　中心極限定理とは何か。その主張を述べよ。

問題 1.6.　距離空間がコンパクトである、と言うことの定義を述べよ。

問題 1.7.　$C([0,1];\mathbb{R})$ に距離を一つ入れよ。また、その距離の下で「有界閉集合」はコンパクトになっているか？

問題 1.8.　測度論における Hopf の拡張定理とは何か？主張を述べよ。

2　期末試験　2001.09.10

問題 2.1.　の上で定義された確率変数とする。
(1) 確率変数 X と Y が「独立」とはどういうことか。定義を述べよ。
(2) f, g を可測関数とする。X と Y が独立ならば、$f(X)$ と $g(Y)$ が独立になると言うことを証明せよ。

問題 2.2.　p, q は自然数で $p \leq q$ を満たすとする。

$$I_n = \int_1^\infty \cdots \int_1^\infty \left\{ \frac{x_1^p + \cdots + x_n^p}{x_1^q + \cdots + x_n^q} \right\} e^{-\sum_{i=1}^n x_i} dx_1 \cdots dx_n$$

とおく。α を実数とするとき、次の極限を計算せよ。

$$\lim_{n\to\infty} e^{\alpha n} I_n.$$

問題 2.3. $B = B_t$ を時刻 0 で原点を出発する 1 次元ブラウン運動とする。この時次の平均を計算せよ。

$$E[B_t^2] \tag{1}$$

$$E[\int_0^t \{B_s^2 + B_s^3\} ds] \tag{2}$$

問題 2.4. $B = B_t$ を時刻 0 で原点を出発する 1 次元ブラウン運動とする。今、

$$\Delta_{m,n} = B_{tm/2^n} - B_{t(m-1)/2^n}$$

とおく。

(1) $E[\Delta_{m,n}^2]$ を計算せよ。

(2) 次を証明せよ。

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{2^n} \Delta_{m,n}^2 = t \quad \text{for a.s.}$$

(3) 一般に f を $[0,1]$ 上の Lipschitz 連続な関数とする。

$$\Delta_{m,n}(f) = f(tm/2^n) - f(t(m-1)/2^n)$$

とおくとき、極限

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{2^n} \Delta_{m,n}(f)^2$$

を計算せよ。

科目名　**数理物理学 III ／数理物理学概論 III**　　**担当教官**　**服部 哲弥**

サブタイトル　Random walk と self-avoiding walk

対象学年　**４年／大学院**　　**２単位**　**選択**

教科書
参考書　http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hattori に掲載の講義ノート.

予備知識

測度論の基礎事項（ルベーグ積分論・確率論）

講義内容

前半は，d 次元正方格子上の walk (格子に値をとる関数の集合上の確率測度) の入門的な講義を行った．後半は，フラクタル格子上の walk に関する講義担当者の研究に基づいて，くりこみ群と呼ばれるある離散時間力学系の描像の入門的講義を試みた．

前半．

1 **次元 simple random walk (SRW)．** Mean square displacement，Ballot theorem，classical ruin problem など．

d **次元 SRW．** Markov 性，Green 関数，recurrence など．

d **次元 self-avoiding walk (SAW)．** Exponents の定義と予想，結果など．

後半．

1 **次元 self-repelling walk．** １次元 simple random walk の decimation くりこみ群，くりこみ群に suggest された self-repelling walk のくりこみ群．

Sierpiński gakset 上の SAW． Sierpiński gakset 上の SAW の漸近的性質のくりこみ群による分析．

講義の感想

他にない視点を強調した講義だったので，準備が難しかった．くりこみ群は素直な描像のはずだが，説明は決して容易でないことが分かった．今回が初めての試みだったので，学生諸君は迷惑したかも知れない．次の機会に改善したい．

科目名　　　**数理解析・計算機数学 I**　　　　　**担当教官　内藤 久資**
／数理解析・計算機数学概論 I

サブタイトル　コンピュータ・リテラシ, プログラミング, アルゴリズム

対象学年　　**４年／大学院**　　　　　　　　**３／２単位選択**

教科書
参考書　B. Kernighan, D. Richie, プログラム言語C（第２版）, 共立出版
B. Kernighan, R. Pike, プログラミング作法, アスキー出版局
徳田雄洋, 情報ってなんだろう（ジュニア版コンピュータ科学入門３）, 岩波書店

予備知識

特に仮定しない. すべてゼロからの出発である.

講義内容

【授業の目的】（講義シラバスに記載した内容）

世間でいうところのコンピュータ・リテラシではなく, コンピュータやネットワークの基礎を正しく理解し, コンピュータに対する汎用的な理解を持つためのコンピュータ・リテラシを解説する. また, コンピュータ・プログラミングを行うために必要な種々のアルゴリズムに関して解説を行う. これらのアルゴリズムの中で, これまでに学習した数学が生かされていることがわかる形で講義を進めたい.

【授業予定と内容】（講義シラバスに記載した内容）

コンピュータとネットワークの基礎的な話題からはじめる. そのような話題を数回程度扱った後, C言語の基本を解説する. C言語の解説の進度にあわせて, 各種のアルゴリズムに関して解説する.

また, それらのアルゴリズム利用したプログラミングを行うために, C言語によるプログラミング実習も行う. （学部生は情報メディア教育センター理学部サテライトラボを利用する. 大学院生以上に関しては場所は未定.）**大学院後期課程の学生・教官の聴講も歓迎する**[1]が, プログラミング実習は機材の関係上, 学部生・大学院前期課程の学生を優先する.

【上記の補足】

世間では「コンピュータの授業」というと, 「ホームページの書き方」とか, 「Microsoft Excel の使い方」といった, 極めて実用的な授業が行われているらしい. しかし, 本来「コンピュータを使う」とは, 単に特定のアプリケーションを利用することではなく, コンピュータの動作やコンピュータネットワークの仕組みを基礎から理解し, どのような環境であっても「それなりに」使いこなせる能力を指すと考える. また, コンピュータを動作させるプログラムは, 「アルゴリズム」という概念が基礎にあり, その中では数学が極めて重要な役割を果たしていることを理解する必要がある.

実際にコンピュータを動作させるためには, アルゴリズムをプログラム言語によって「実装」する必要が

[1] こんなことを書いたが, 後期課程の学生の出席者は１名（ＴＡを除く）, 教官の出席者は０名であった.

あるが,「正しい実装」を行うためには言語仕様の正確な理解が必要不可欠である. 昨今, 単に「動作すれば良い」という安易なソフトウェアが増える中で,「マトモなプログラミング」とは何かを考える機会を持つことが重要である.

このような考え方の下に, コンピュータとコンピュータネットワークとは何か, コンピュータの中で数学がどのようにいかされているか,「数学的な思考方法」と「コンピュータを使う上での思考方法」の共通点とは何かなどを探る授業を目標とした.

ついで（といってはいけないのだが）に, 近年コンピュータネットワークで重要な位置を占めるようになった,「ネットワークセキュリティ」に関しても言及することを考えた.

【具体的な講義内容は以下の通り】

● **４月１８日**（第１回）

- 講義の趣旨･受講における注意事項の説明
- コンピュータとネットワークのリテラシ（その１）
  - コンピュータの歴史
  - コンピュータ・ハードウェア

【実習内容】
- 情報メディア教育センターでの電子メールの利用法

【配布物】
- 講義に関する注意事項
- 講義ノート（パート１）

● **４月２５日**（第２回）

- コンピュータとネットワークのリテラシ（その２）
  - コンピュータ・ハードウェア（続き）
  - コンピュータ・ソフトウェア

● **５月　２日**（第３回）

- コンピュータとネットワークのリテラシ（その３）
  - コンピュータ・ソフトウェア（続き）
  - コンピュータ・ネットワーク

● **５月　９日**（第４回）

- コンピュータとネットワークのリテラシ（その４）
  - コンピュータ・ネットワーク（続き）
  - コンピュータとネットワークに関する社会的側面

● **５月１６日**（第５回）

- ＵＮＩＸ
  - ＵＮＩＸとは？
  - ＵＮＩＸの基本概念と基本操作
    - ∗ ファイルシステムとディレクトリ
    - ∗ シェル
    - ∗ 基本コマンド
  - EMACS の利用法

【実習内容】
- ＵＮＩＸの利用法

● **５月２３日**（第６回）

- Ｃ言語（その１）
  - Ｃ言語とは？
  - 処理系の利用法
  - プログラムの実際
    - ∗ Hello World
  - 変数
  - 式・演算子・算術変換

【実習内容】
- プログラミング実習

【配布物】
- 講義ノート（パート２）
- 実習資料

● **５月３０日**（第７回）

- Ｃ言語（その２）
  - 制御の流れ
    - ∗ 条件文と繰り返し文
    - ∗ その他
- アルゴリズム（その１）
  - 位取り記数法

【実習内容】
- プログラミング実習

● **６月　６日**（第８回）

- アルゴリズム（その２）

  - 互除法
- Ｃ言語（その３）
  - 関数よびだし
  - 再帰

【実習内容】

- プログラミング実習

● **６月１３日**（第９回）

- Ｃ言語（その４）
  - 関数と変数のスコープ
  - 配列とポインタ
- アルゴリズム（その３）
  - エラトステネスのふるい

【実習内容】

- プログラミング実習

● **６月２０日**（第１０回）

- Ｃ言語（その５）
  - 配列・ポインタ・文字列
- アルゴリズム（その４）
  - 浮動小数点演算とその誤差

【実習内容】

- プログラミング実習

● **６月２７日**（第１１回）

- アルゴリズム（その５）
  - 浮動小数点演算とその誤差
  - 区間分割法・ニュートン法
  - 数値的不安定性
  - 多項式計算
    - ホーナ法による値の計算

【配布物】

- gnuplot の利用法

● **７月　４日**（第１２回）

- アルゴリズム（その６）
  - １変数多項式環での互除法
  - 数値積分（その１・補間）
    - Langrange 補間
    - Chebyshev 多項式による補間
    - Hermite 補間
    - スプライン補間

● **７月１１日**（第１３回）

- アルゴリズム（その７）
  - 数値積分（その２・Newton-Cotes 法）
    - 台形公式
    - Simpson の公式
    - Euler-Maclaurin formula と誤差

● **７月１８日**（第１４回）

- アルゴリズム（その８）
  - 数値積分（その３・ガウスの積分法）
    - 直交多項式
    - ガウスの積分法

【夏休みのレポート問題の配布】

【講義時に出したレポート問題】

▼ 第１回レポート

- `report_A_01_01`

  ２本の定規を用いて掛け算と割り算を行う方法を考えなさい．この場合，定規に与えられた「関数目盛」はどのような関数かも説明しなさい．

- `report_A_01_02`

  面積計で面積が計測できる理由を数学を用いて説明しなさい．

▼ 第２回レポート

- `report_A_02_01`

  n ビットの情報 $\{a_i\}_{i=1}^n$ のすべての XOR を取った値を a_0 とおく．この時，いずれか一つの a_k $(k = 1, \cdots, n)$ の値が失われた時，a_0 と失われていない $\{a_i\}$ たちの値を用いて，a_k の値を復元する方法を述べよ．

- `report_A_02_02`

  正の整数 b の１の補数を $\overline{b}$ とする．この時，$-b$ の２の補数による表現は $-b = \overline{b} + 1$ であることを示せ．

▼ 第３回レポート

- `report_A_03_01`

正の整数 a, b に対して, $a - b$ を計算する回路を加算回路を用いて実現せよ.

- `report_A_03_02`

日本語で書かれた新聞１ページが１５段からなり, １段は８２行, １行は１２文字からなると仮定する. さらに, １日の新聞は２０ページからなると仮定する. この時, 新聞１年分（３６５日分）のデータ量を求めよ.

- `report_A_03_03`

１０進数の 0.1 を２進数で表せ.

▼ 第５回レポート

- `report_A_05_01`

先頭が `-` で始まるファイルを消去する方法を考えよ.

- `report_A_05_02`

２つのファイルを連結して, 新しいファイルを作成する方法を考えよ.

▼ 第６回レポート

- `report_A_06_01`

Exercise 6.9.2, Exercise 6.9.3, Exercise 6.9.4, Exercise 6.9.5 に答えよ.

- `report_B_06_01`

`printf` 関数は出力した文字数を返す. “Hello World” を書換えて, プログラムの戻り値が出力した文字数となるようにせよ.

- `report_B_06_02`

次のプログラムは期待した結果を表示しない. その理由を考え, 期待した結果を表示するように書換えよ. （プログラム略）

- `report_B_06_03`

１バイトが８ビット, `int` 型, `unsigned int` 型が４バイトであると仮定する. さらに, 負の数は２の補数で表現されていると仮定する. この時, `unsigned int` 型で表すことが出来る最大の数 (`UINT_MAX` に等しい), `int` 型で表すことが出来る最大の数 (`INT_MAX` に等しい), `int` 型で表すことが出来る最小の数 (`INT_MIN` に等しい) を値 1 からはじめて, ビット演算のみで作成せよ.

▼ 第７回レポート

- `report_A_07_01`

正の整数 x に対して, x の b 進表示に関する $b-1$ の補数を $\overline{x}$, b の補数を $\tilde{x}$ とするとき, $\tilde{x} = \overline{x} + 1$ を示せ.

- `report_A_07_02`

有理数は有限小数または循環小数で表される. この事実は b の取り方によらないことを示せ. また, n と b が互いに素の時, 既約分数 m/n の b 進小数表示の循環節の長さは $b^e \equiv 1 \pmod{n}$ をみたす最小の e に等しいことを示せ.

- `report_A_07_03`

ある物体の質量を天秤で測定する. その重さは整数値で, M 以下とする. この時, 必要な分銅の最小の数（種類）と測定方法を述べよ. ただし, 分銅は物体と異なる側にしかのせれない場合と, 両方にのせれる場合を考えよ.

- `report_B_07_01`

`for` 文を利用して, 1 から 20 までの偶数の和を計算するプログラムを書け.

- `report_B_07_02`

`while` 文を利用して, 1 から 20 までの偶数の和を計算するプログラムを書け.

- report_B_07_03

摂氏で表現された温度を 0 度から 100 度まで, 10 度刻みで, 華氏で表現するプログラムを書け. その際, 華氏の温度は小数点以下第２桁目を四捨五入すること.

- report_B_07_04

標準入力から１文字を入力して, それが数字であるとき, 偶数か奇数かを判定し, 数字でないときには, 再び入力を求めるプログラムを書け.

- report_B_07_05

正の有理数を１０進で小数点以下１００桁まで求めるプログラムを書け.

- report_B_07_06

１０進数で表現された０以上１未満の有限小数を２進数で表示するプログラムを書け. ただし, 有限小数にならないときには, 小数点以下第１０桁まで表示すればよい.

- report_B_07_07

与えられた正の整数の -1 倍をビット演算とインクリメントのみで計算するプログラムを書け.

- report_B_07_08

加算・減算のみで乗算と除算を行うプログラムを書け.

- report_B_07_09

加算・減算・ビット演算のみで乗算と除算を行うプログラムを書け.

- report_B_07_10

W 週間 D 日 H 時間 M 分 S 秒という表現で与えられた２つの数値の加算を行うプログラムを書け.

- report_B_07_11

W 週間 D 日 H 時間 M 分 S 秒という表現で与えられた２つの数値の減算を行うプログラムを書け. ただし, 結果は「非負」と仮定して良く, $0 \leq W < 100$ と仮定する.

▼ 第８回レポート

- report_A_08_01

２つの正の整数 a, b の最大公約数を求めるために必要な除算の回数を, a, b を用いて出来る限り精密に評価せよ. （ヒント：フィボナッチ数列との比較をおこなえ.）

- report_A_08_02

３つの正の整数 a, b, c に対して, $ax+by+cz = \gcd(a,b,c)$ をみたす x, y, z を１組求めるアルゴリズムを示し, その計算回数の評価を行え.

- report_A_08_03

既約分数 n/m, $0 < n < m$ を相異なる単位分数の和に分解するアルゴリズムを示せ.

- report_A_08_04

a, b を互いに素な正の整数とする. この時,

$$\chi(a,b) = \inf\left\{ n \in \mathbb{N} : \begin{array}{l} \text{全ての } m \geq n \text{ に対して} \\ ax+by=m \\ \text{をみたす自然数の組} \\ (x,y) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^2 \\ \text{が存在する.} \end{array} \right\}$$

とおく. この時,

$$\chi(a,b) = (a-1)(b-1)$$

であることを示せ.

- report_A_08_05

フィボナッチ数列

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n \geq 1, \quad F_2 = F_1 = 1$$

の第 n 項 F_n を再帰的関数呼出しを用いて求めようとするとき, 関数呼出しの回数を n を用いて評価せよ.

- `report_A_08_06`

  任意の正の整数 a, b, k に対して,

  $$\gcd(a, b) = \gcd(b, b - ka)$$

  が成り立つことを証明せよ.

- `report_B_08_01`

  ２つの正の整数の最大公約数を求めるプログラムを書け.

- `report_B_08_02`

  ２つの正の整数の最大公約数を求めるプログラムを再帰的関数呼出しを用いて書け.

- `report_B_08_03`

  ２つの正の整数の最大公約数を求めるプログラムを, ２進ＧＣＤアルゴリズムを用いて書け.

- `report_B_08_04`

  ３つの正の整数の最大公約数を求めるプログラムを書け.

- `report_B_08_05`

  ２つの正の整数 a, b に対して, $ax + by = \gcd(a, b)$ をみたす x, y を１組求めるプログラムを書け.

- `report_B_08_06`

  ３つの正の整数 a, b, c に対して, $ax+by+cz = \gcd(a, b, c)$ をみたす x, y, z を１組求めるプログラムを書け.

- `report_B_08_07`

  正の整数 n の最小の約数を求めるプログラムを書け.

- `report_B_08_08`

  正の整数 n が完全数であるとは, n のすべての約数（1 と n を含む）の和が $2n$ に等しいことをいう. 10000 までのすべての完全数を求めるプログラムを書け.

- `report_B_08_09`

  帰納的に定義された数列, $a_n = 2a_{n-1} + n$, $(n \geq 1)$, $a_0 = 0$ の第 10 項までを順に表示するプログラムを, 再帰的関数呼出しを用いて書け.

- `report_B_08_10`

  a, b を互いに素な正の整数とする. a 円, b 円の切手を用いて, n 円の組合わせを作成したいとする. 実現出来ない n の値をすべて求めるプログラムを書け.

- `report_B_08_11`

  正の整数 n に対して, 関数 μ を

  $$\mu(n) = \begin{cases} 1 & n = 1, \\ 0 & \left\{ \begin{array}{l} n > 1, \\ n \text{ は素数の 2 乗で} \\ \text{割りきれる}, \end{array} \right\} \\ (-1)^k & \left\{ \begin{array}{l} n > 1, \\ n \text{ は } k \text{ 個の} \\ \text{相異なる素数の積}, \end{array} \right\} \end{cases}$$

  と定義する. 与えられた正の整数 n に対して, $\mu(n)$ を求めるプログラムを書け.

- `report_B_08_12`

  0 より大きく 1 未満の有理数を分母が相異なる単位分数の和に分解するプログラムを書け.

- `report_B_08_13`

  0 より大きく 1 未満の有理数を, 可能なときには, ２つまたは３つの分母が相異なる単位分数の和に分解し, それが不可能なときには, そのことを出力するプログラムを書け.

▼ 第９回レポート

- report_B_09_01

  西暦Ｙ年Ｍ月Ｎ日がその年の１月１日から数えて何日目になるかを与える関数を書け．

- report_B_09_02

  エラトステネスのふるいを用いて，１００００までの素数を全て求めるプログラムを書け．

▼ 第１０回レポート

- report_B_10_01

  正の１０進整数を b 進整数に変換するプログラムを書け．ただし，$2 \leq b \leq 36$ とし，「数字」は

  `0123456789ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ`

  を用いる．

- report_B_10_02

  １０進整数を平衡３進整数に変換するプログラムを書け．ただし，平衡３進整数の「数字」は `p`, `z`, `n` とし，それぞれ $1, 0, -1$ に対応する数字とする．

- report_B_10_03

  １０進整数を $-b$ 進整数に変換するプログラムを書け．ただし，$2 \leq b \leq 36$ とし，「数字」は

  `0123456789ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ`

  を用いる．

- report_B_10_04

  ２つの平衡３進整数を与えたとき，それらの加算・減算・乗算・整除を行うプログラムを書け．ただし，整除に関しては，除数は０でないとし，剰余は正の最小剰余をとること．

- report_B_10_05

  ２つの同じ型のオブジェクトを入れ替える関数を書け．

- report_B_10_06

  標準関数 `atoi` を実現せよ．

- report_B_10_07

  標準関数 `strncmp` を実現せよ．

- report_B_10_08

  標準関数 `strncat` を実現せよ．

- report_B_10_09

  次の仕様をみたす関数を書け．

  ```
  int str2int(char *s, int *d)
  ```

  文字列 `s` には一つ以上の「空白文字」で区切られた，`int` 型の整数値を表す数値が入っているとき，`int` 型の配列にその数値を代入する．

  全ての数値が正しく `int` 型の数値に変換できたときには，配列 `d` に入っている有効な要素数を返し，一つでも正しく変換できなかったときには，値 `0` を返す．

  ただし，「空白文字」とは，標準関数 `isspace` で区別できる文字のことをいう．

▼ 第１１回レポート

- report_A_11_01

  IEEE 浮動小数点規格で演算を行う計算機上で，

  $$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

  に従う数列 $\{a_n\}$ を，この帰納的定義（漸化式）によって計算したとき，その結果は期待したものと異なる挙動を示す．この事実を説明せよ．

- `report_A_11_02`

  $f(x)=0$ の解 α が m 重根 $(m\geq 2)$ である時, ニュートン法による近似解の誤差 ϵ_n は,

  $$\epsilon_n = \frac{m-1}{m}\epsilon_{n-1}$$

  を満たすことを証明せよ.（ヒント： $f(x)=(x-\alpha)^{m-1}g(x)$ と書け, $x=\alpha$ は $g(x)=0$ の単根であることを利用する.）

- `report_A_11_03`

  １変数のニュートン法の収束に関する定理（講義中に述べたもの）を証明せよ.

- `report_A_11_04`

  ニュートン法を用いて

  $$\begin{aligned} f_1(x) &= (x-1)(x+1), \\ f_2(x) &= (x-1)^2(x+1), \\ f_3(x) &= (x-1)^3(x+1), \\ f_4(x) &= (x-1)^4(x+1) \end{aligned}$$

  の解 $x=1$ への近似解の収束の様子を出力し, その誤差の収束について論ぜよ.

  すなわち,（例えば） $x=2.0$ を初期値としたニュートン法の近似解の真の解との相対誤差を出力し, それが 0 に収束する様子をプロットしなさい. さらに, `report_A_11_02` の結果を合わせて, 収束の様子について論ぜよ.

- `report_A_11_05`

  $f(x)$ を n 次多項式とする. $f(x+c)$ を c についての多項式とみたとき, その k 次の係数は $f^{(k)}(z)/k!$ に等しいことを証明せよ.

- `report_B_11_01`

  区間縮小法を用いて $\sqrt{2}$ の値を相対誤差 10^{-7} で求めよ.

- `report_B_11_02`

  ニュートン法を用いて $\sqrt{2}$ の値を相対誤差 10^{-7} で求めよ.

- `report_B_11_03`

  １変数多項式 f を $z-a$ で割った商, $f(a)$ を求めるプログラムを書け.

▼ 第１２回レポート

- `report_A_12_01`

  Chebyshev 多項式 $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$, $n\leq 1$ に対して,

  $$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

  を満たすことを証明せよ.

- `report_A_12_02`

  Hermite 補間の定理で用いた行列 $V^{(2)}(x_1,\cdots,x_n)$ は

  $$\det V^{(2)}(x_1,\cdots,x_n) = \prod_{j>i}(x_j-x_i)^2$$

  を満たすことを証明せよ.

- `report_A_12_03`

  $(-2,0)$, $(-1,1)$, $(0,0)$, $(1,-1)$, $(2,0)$ をサンプル点とする, Lagrange 補間多項式を求めよ.

- `report_B_12_01`

  ２つの１変数多項式 f, g を与えたとき, その最大公約多項式を求めるプログラムを書け.

- `report_B_12_02`

  $\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^n$ を与えて, その Lagrange 補間多項式 $P(x)$ を求めるプログラムを書け.

【夏休みのレポート問題・その他の配布資料など】

これらは, 講義の WEB ページ

http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~naito/lecture/2001_SS/

から取得可能.

講義の感想

「コンピュータリテラシ」の部分に関しては, 通常, 世間で言われている「コンピュータリテラシ」と異なる内容のせいか, 一部の学生にはウケが良かったが, 全体には不評であったと思う. この部分で「ウケ」た学生は, それなりに「オタク」なんでしょう.

Ｃ言語のパートでは, はじめてプログラムを書くという学生が多く, プログラムを書く考え方が出来ていないと感じた. 「プログラムを書く」とは, 多くの単純で平易な例を理解し, プログラムの全体像を理解しながら, それを積み重ねていくという, 数学と共通する考え方が重要であるが, この考え方が出来ていないことを強く感じた. 特に, 単純なプログラム（例えば, 1 から 10 までの和をいろいろな書き方で書く）を書かせると, 「そんな簡単なものつまらない」という意見が出てきたが, そのようなものを組み合わせる必要がある複雑なものになると, とたんに手が止ってしまうという場面を多く見ることとなった. また, 実習時間以外にはプログラムを書かないという学生が多いように思われた.

具体的なアルゴリズムに言及すると, 「難しすぎる」という意見が多く見られた. しかし, 内容は１年生の微積分か初等整数論の範囲を越えるものは無く, これで難しいと言い出しては何もできないと思われる.

ここ以下は昨年も書いたことだが... 情報メディア教育センターのワークステーションを利用して実習を行ったが, システムが極めて不安定であり, 学生の環境にトラブルが多発した. それらの解決のためにＳＥに連絡を取るなどの手間が非常に多かった. やはり, この手の講義は担当者が完全に理解しているシステムでないと, このような手間が多すぎて非常に大変である. 研究科のシステムを講義に利用できる環境を構築することが, （少なくとも担当者にとって）効率のよい講義・実習を行うために必要なことと思われる.

科目名　**トポロジー特論 I**　　**担当教官**　**菅野 浩明**

サブタイトル　モノポールと直線束の幾何学とその一般化

対象学年　**大学院**　　**２単位**　**選択**

教科書

参考書　森田茂之，微分形式の幾何学１・２，岩波書店

R. Bott and L.W. Tu, Differential Forms in Algebraic Topology, Springer-Verlag

J.-L. Brylinski, Loop Spaces, Characterestic Classes and Geometric Quantization, Birkhäuser

予備知識

多様体と微分形式に関する基礎的事柄

講義内容

電磁気学における電磁双対性に深く関係するモノポールの量子論が直線束の幾何学を用いて記述できることを解説し，合わせて直線束の幾何学において重要な概念であるコホモロジーや接続について講義した．また，最後に最近の超弦理論の双対性の議論に現れる gerbe の幾何学がモノポールと直線束の幾何学の自然な拡張と見なされることを紹介した．

具体的な講義内容は以下の通り：

1. 電磁気学と微分形式（２回）
   - Maxwell 方程式の微分形式による記述
   - $*$- 作用素と電磁双対性
   - モノポールとそのポテンシャル
2. Čech Cohomology（３回）
   - 多様体の good covering と Čech Cohomology
   - 微分形式と de Rham Cohomology
   - Čech Cohomology と de Rham Cohomology の等価性
3. 直線束と接続（３回）
   - 複素直線束の変換関数と局所切断
   - 直線束の接続と曲率
   - 同伴主束と接続形式
   - 計量とエルミート接続
4. Gerbe の幾何学（２回）
   - 定義と直線束による局所自明化

- Gerbe の接続とホロノミー

講義の感想

講義の依頼を受けた際に，内容は全く自由と聞いたので，その時点で最も興味があった gerbe の幾何学を理解する（＝人に説明できること）ことを最終目標に講義を始めた．受講者の多様体と微分形式に関する予備知識にはかなりバラツキがあり，予備知識のほとんどなかった方には迷惑をかけたと思う．モノポールの幾何学として S^2 上の Hopf 束を折に触れて具体例として取り上げたことを除くと，あまり系統立てた講義とは言えなかったが，提出されたレポートを見る限り基本的な内容は，ある程度伝わったのではないかと考えている．自分自身の目標とした gerbe の幾何学の理解についても，講義の準備をしていて思わぬ発見があり有益だった．

科目名　基礎数学 I　**担当教官**　長田 博文

サブタイトル　解析入門

対象学年　大学院（昼夜開講コース）　**２単位**　**選択**

教科書　なし
参考書　微分と積分１，２，３（岩波講座現在数学への入門）

予備知識

なし

講義内容

受講者全員がすでに学部段階で解析入門について勉強した経験があるわけだが，必ずしも大学院でより進んだ講義を受講するに十分な段階であったとは限らない．この講義ではそれを数学科のレベルで行い，本大学院で研究を行うに相応しい数学上の技術と見識を養う事を目的とした．まず，イプシロン-デルタ論法を用いた解析になれるために,（複素）巾級数の話を岩波講座現代数学入門の「複素関数入門」（神保道夫著）に従い講義した．つぎに，多変数の関数の（全）微分，極値問題，陰関数定理，条件付き極値問題さいごに，変分法を講義した．適宜，時間を見つけては，距離空間の概念を取得してもらうために，$C([0,1])$ を題材に,「完備性」,「可分性」,「開集合」,「相対コンパクト性」などについて説明しかつ演習問題を解いてもらった．

1. アンケート代わりの試験と解答（１回）
2. （複素）巾級数（５回）
   - 複素数
   - 巾級数
   - 巾級数の微分
   - 微分方程式
3. 極値問題（５回）
   - 多変数関数（実）の微分，極値と微分，Hessian
   - 陰関数定理
   - 条件付き極値問題，アダマールの不等式
   - 変分
4. $C([0,1])$ の距離空間としての性質（適宜）
   - 完備性，可分性，コンパクト，etc.
5. 学期末試験（１回）

講義の感想

計算については一定の合格点だが，たとえば，多変数の関数の微分や距離空間の諸概念については，十分授業の成果が上がらなかった．もっとレポートと言う形で普段から課題を出すべきであった．

参考資料

1　始めに　2001.04.19

問題 1.1. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$、$\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を実数列とする。
(1) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ を ϵ-δ 論法を用いて表現せよ。
(2) $\sup\{a_n + b_n\} \le \sup a_n + \sup b_n$ を証明せよ。

問題 1.2. $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を関数とする。
(1) f が点 x_0 で連続であるという事の定義を述べよ。
(2) f が一様連続とはどういうことか。定義を述べよ。また「一様連続」の概念はリーマン積分を連続関数に対し定義するときどのように用いられるか。説明せよ。

問題 1.3. (1) 距離空間もしくは位相空間の部分集合がコンパクトとは何か？　定義を述べよ。
(2) 有界閉集合であってコンパクトでないものの例を挙げよ。

問題 1.4. 関数 $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を考える。
(1)f が点 (x_0, y_0) で（全）微分可能と言うことの定義を述べよ。
(2)f が点 (x_0, y_0) で偏微分可能と言うことの定義を述べよ。
(3) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ $((x,y)\neq(0,0))$、$f(x,y)=0$ $((x,y)=(0,0))$ とする。f が微分可能な点、および偏微分可能な点を決定せよ。
(4) すべての点で連続かつ偏微分可能な関数であり、かつ、微分可能でない点をもつものの例を挙げよ。

問題 1.5. (1) 関数 $f(x) = \log(1+x)$ を原点のまわりでテーラー展開せよ。
(2) $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\cdots$ をしめせ。

2　期末試験　2001.07.18

問題 2.1. 関数 $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を考える。
(1)f が点 (x_0, y_0) で（全）微分可能と言うことの定義を述べよ。
(2) すべての点で連続かつ偏微分可能な関数であり、かつ、ある点で微分可能でない関数の例を挙げよ。

問題 2.2. $f(x,y) = (x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ の極値点及び極大、極小を判定せよ。

問題 2.3. 複素関数 $y(z)$ の微分方程式

$$(1+z)\frac{dy}{dz} = \alpha y$$

の巾級数解 $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ を求めよ。

問題 2.4. 区間 $I = [0,1]$ 上の連続関数の空間 $C(I;\mathbb{R})$ に距離 $\rho(f,g) = \sup_{t\in I}|f(t)-g(t)|$ をいれ距離空間と見なす。

(1) 距離空間 $C(I;\mathbb{R})$ が完備であることを示せ。

(2) $K = \{f\,;\,\rho(f,0) \leq 1\}$ は有界閉集合であることを示せ。

(3) K はコンパクトか？ 解答と共に理由も述べよ。

問題 2.5. $C^1([1,2];\mathbb{R})$ 上の写像

$$J[y] := \int_1^2 \frac{\sqrt{1+(y'(x))^2}}{x}dx$$

の条件 $y(1) = 0$, $y(2) = 1$ の下での極値を求めよ。

科目名　基礎数学 II　　**担当教官**　林 孝宏

サブタイトル　線形代数の基礎

対象学年　大学院（昼夜開講コース）　　**２単位**　**選択**

教科書　江尻典雄，理系の基礎数学　線形代数学，学術図書出版
佐竹一郎，線形代数学，裳華房

参考書

予備知識

特に仮定しない

講義内容

1. 行列の定義と演算（１回）
2. 面積，体積と行列式（１回）
3. 置換と行列式（２回）
4. 数ベクトル空間上の外積空間と行列式（２回）
5. 抽象線形空間と部分空間（１回）
6. 一次独立性，基底，次元（２回）
7. 線形写像と行列（１回）
8. 像，核と一次方程式（1 回）

この他に，中間試験と期末試験を各１回行った．また，夏休み期間中を含め計７回を演習に費やした．なお，計量線形空間については全く触れることができなかった．また，行列の標準形についても結果に簡単に触れるだけにとどまった．

講義の感想

通常の講義に比較して，話したことが実際にどれだけ理解されているかが理解しやすく，貴重な体験をすることができたと思う．

２００１年度 後期講義内容要約

２００１年度後期時間割表（数理学科）

<table>
<tr><th></th><th></th><th>１年生</th><th>２年生</th><th>３年生</th><th>４年生</th></tr>
<tr><td rowspan="4">月</td><td>1</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td><td rowspan="2">代数系と表現
（岡田）</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>解析学 IV
（中西敏）</td></tr>
<tr><td>3</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="4">火</td><td>1</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">多様体と微分型式
（佐藤肇）</td><td>代数学 IV
（中西知）</td></tr>
<tr><td>2</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>3</td><td rowspan="2">ベクトル解析
（服部）</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="4">水</td><td>1</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="2">関数論
（青本）</td><td rowspan="2">確率論
（市原）</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>幾何学 IV
（大沢健）</td></tr>
<tr><td>3</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="4">木</td><td>1</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">代数学序論
（金銅）</td><td rowspan="2">関数解析
（名和）</td><td rowspan="2">数理解析
・計算機数学 II
（内藤）</td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>数学展望 II
（原）</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">数学演習 V・VI
（斎藤秀）</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>4</td><td>数学演習 II
（木村・谷川
・佐藤猛・千代延）</td></tr>
<tr><td rowspan="4">金</td><td>1</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="2">解析学要論
（石毛）</td><td rowspan="2">基本群と被覆空間
（太田）</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td><td rowspan="2">数学演習 V・VI
（梅村・鍜島・笹原
・佐野・坂内）</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>4</td></tr>
</table>

２００１年度後期時間割表（大学院）

		４年生と共通	大学院のみ
月	1		
	2	解析学概論 IV（中西敏）	
	3		特殊関数論特論 I（青本）
	4		
火	1	代数学概論 IV（中西知）	
	2		数理物理学特論 I （原）
	3		代数学特論 I（行者）
	4		
水	1		
	2	幾何学概論 IV（大沢健）	
	3		
	4		
木	1	数理解析・計算機数学概論 II（内藤）	
	2		
	3		
	4		
金	1		
	2		大域解析特論 I（ウエン）
	3		
	4		

２００１年度後期時間割表（大学院昼夜開講コース）

月	5	
	6	基礎数学 III 担当：鈴木 浩志
火	5	
	6	
水	5	
	6	基礎数学 IV 担当：南 和彦
木	5	
	6	
金	5	
	6	

科目名　数学基礎 III　　**担当教官**　松本 耕二

サブタイトル

対象学年　１年　　**1.5 単位**　必修

教科書　三宅正武–市原完治，微分積分学，学術図書
参考書

予備知識

特に仮定しない．

講義内容

やったのは偏微分と多変数の積分である．偏微分については高次の導関数，多変数の Taylor の定理，極値問題への応用まで．陰関数定理，Lagrange の未定乗数法はやっていない．積分の方は殆んど常に二変数の場合に限って，変数変換公式，広義積分あたりまでやった．Green の定理などはやっていない．定理の証明は，微分可能性とか積分の存在とかいった細かい点はすべて省略し，基本的な考え方のみを伝える説明法をとった．具体的な例の計算演習を重視し，授業時間中にもかなりの数の例題を説明したり各自で計算する時間をとり，また何回かレポートを出してさらに問題練習をさせた．

講義の感想

上にも述べたように，定理の証明は数学者的な厳密なものではなく本質のアイデアが分かる程度の説明にとどめたのだが，年度末試験の時に感想を書かせたところ,「定理を証明することに驚いた」という反応が多く，こちらも驚いた．高校までは定理は与えられて覚えるものでしかなかったので，定理に対してもなぜ成り立つのか考えようとする態度にびっくりした，という感想がかなりあった．しかしこのことに対する学生の意見は概して好意的で，学問としての数学を感じることができた，といった感想が結構あった．そういう意味では大学数学の味わいを伝えることが出来たかもしれない．一方では，実際の講義では計算中心にしたので，共通教育アンケートでも「それほど難しくはなかった」との回答がかなりあり，最優秀な学生はひょっとすると退屈したかもしれないが，落ちこぼれた学生は少なかったのではないかと思う．あまり多くの内容を講義することが出来ず，数理学科以外の学生にとっては，重要ないくつかの定理を聞き損なう結果を招いたかもしれない．

参考資料

中間試験　2001.11.30

問 1.　関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

は原点で偏微分可能であるが連続ではないことを，定義にもとづいて示せ．

問 2.　次の関数の 1 階と 2 階の偏導関数をすべて求めよ．

(1) $f(x,y) = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{x}{y}$　　(2) $f(x,y) = \dfrac{2x+3y}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$

問 3.　$g(t)$ を C^2 級の関数，$f(x,y) = g(x+ay)$ とおくとき，

(1) $f_{xx} = f_{yy}$ となるような定数 a の値をもとめよ．

(2) $f_{xx} = -f_{yy}$ となるような実数 a は存在しないことを示せ．

問 4.　関数 $f(x,y) = xy(1+x+y)$ の極値を調べよ．

試験問題　2002.02.08

問 1.　次の重積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\iint_{\substack{0\le y\le 1/x \\ 1\le x\le 2}} e^{xy}\ dxdy$

(2) $\displaystyle\iint_{\substack{0\le x\le 1 \\ 0\le y\le \mathrm{Sin}^{-1} x}} x^2\ dxdy$

問 2.　指定された変数変換を用いて次の重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_{\substack{\frac{1}{\sqrt{3}}\le x+y\le 1 \\ x,\ y\ge 0}} \frac{y\ dxdy}{(x+y)^2+1}$　　$\begin{pmatrix} x+y=s \\ y=st \end{pmatrix}$

(2) $\displaystyle\iint_{\substack{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1 \\ x,\ y\ge 0}} xy\ dxdy$　　$\begin{pmatrix} x=ar\cos\theta \\ y=br\sin\theta \end{pmatrix}$　　(但し a, b は正の定数)

(3) $\displaystyle\iint_{\substack{x^{2/3}+y^{2/3}\le 1 \\ x,\ y\ge 0}} (xy)^{-2/3}\ dxdy$　　$\begin{pmatrix} x^{1/3}=r\cos\theta \\ y^{1/3}=r\sin\theta \end{pmatrix}$

問 3.　（配点にはたぶん影響しない）大学入学時と現在とで，数学という学問に対するイメージはどのように変化したか（またはしなかったか）．この講義に対する感想をまじえつつ述べよ．

科目名 **数学基礎 III** **担当教官** **浪川 幸彦**

サブタイトル 多変数微分積分学

対象学年 **１年** **1.5 単位** **必修**

教科書 吹田・新保，理工系の微分積分学，学術図書出版社
参考書

予備知識

高校までの数学・数学基礎 I の内容

講義内容

微分積分学の入門として，通年講義の後半にあたる．多変数の場合を扱う．
具体的な講義内容は以下の通り：

1. 前期の補い（３回）
   - 前期中間・期末試験の返却・講評
   - 広義積分の復習
   - 収束・極限の厳密な定義
2. 偏微分とその応用（６回）
   - ２変数の収束・連続
   - 偏微分の定義と基本性質
   - 全微分の定義と基本性質
   - 連結公式
   - 陰関数の定理
   - ２変数の極値
3. 重積分とその応用（２回）
   - 重積分の定義と基本性質
   - 面積確定
   - 累次積分
   - 広義重積分
   - 変数変換

講義の感想

後期は予定した以上に説明の部分が多くなってしまって，演習の時間が取れなかった．また微分の方に時間が取られ，重積分の話が２回しか出来ず，バランスを欠いた．これは講義担当者の責任である．

収束の厳密な定義は全く理解されなかったようだ．

それにしても，結局前期の内容が十分理解できていないために，後期の内容が分からなくなっている者が少なからずあった．その多くは明らかに自宅での問題演習不足である．

参考資料

中間試験　2001.12.21

問 1.　次の関数 $f(x,y)$ の $\partial^{m+n}f/\partial x^m\partial y^n$ を求めよ.（各１０点）

(1)　$f(x,y)=e^{ax}\cos by$　;　　(2)　$f(x,y)=\sin(x-y)$　;

(3)　$f(x,y)=(1+x+y)^\alpha$

問 2.　次の関数 $f(x,y)$ の原点における全微分可能性を調べよ.（各１０点）

(1)　$f(x,y)=|xy|$　;　　(2)　$f(x,y)=\sqrt{x^4+y^4}$　;

問 3.　$r=\sqrt{x^2+y^2}$,　$\varphi(r)$ は r の C^2 級関数とするとき，$f(x,y)=\varphi(r)$ として，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を φ であらわせ.（２０点）

問 4.　周の長さが一定（$=2s$）の三角形のうち，面積最大のものはなにか.（２０点）

問 5.　次の関数の極値を求めよ.（１０点）

$$x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$$

問 6.　（チャレンジ問題）関数 $z=z(x,y)$ が $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ なる変数変換によって r だけの関数となるための条件を求めよ.

[出来具合によりボーナス点]

冬期休暇レポート課題

数学，特に多変数微分積分学の他分野（物理学その他）での具体的応用例について.

A4 で１ページ程度．ワープロ可.

冬期休暇明けの最初の授業で提出のこと.

同一内容のレポートがあった場合には減点する.

期末試験　2002.02.01

問 1.　次の関数 $f(x,y)$ の $\partial^{m+n}f/\partial x^m\partial y^n$ を求めよ.（各１０点）

(1)　$f(x,y)=e^{ax}\sin by$　;　　(2)　$f(x,y)=(1+ax+by)^\alpha$　$(ab\neq 0)$　;

問 2.　次の関数の極値を求めよ.（２０点）

$$x^4 + y^4 + a(x+y)^2$$

問 3.　次の重積分の値を求めよ（括弧内は積分範囲 D を表す）.（各１０点）

(1) $\displaystyle \iint_D (x+y)^a dxdy \quad (0 \leq y \leq x \leq 1)$　（ただし $a > 0$）　;

(2) $\displaystyle \iint_D \left|\cos(x+y)\right| dxdy \quad (0 \leq x,\ y \leq \pi)$　;

(3) $\displaystyle \iint_D (x^2+y^2) dxdy \quad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right)$　;

(4) $\displaystyle \iint_D \frac{dxdy}{(1+x+y)^a} \quad (0 \leq x,\ y < \infty)$　（ただし $a > 2$）

問 4.　$\displaystyle f(t) = t\int_0^{t^2} \cos(1-x)^2 dx$ のとき，$\displaystyle \int_0^1 f(t)dt$ の値を求めよ.（２０点）

問 5.　（チャレンジ問題）

$\displaystyle I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ を求めよ.

[出来具合によりボーナス点]

科目名　**数学基礎 III**　　**担当教官**　**谷川 好男**

サブタイトル

対象学年　**１年**　　**1.5 単位**　**必修**

教科書　岸 政倫著　微分積分学　（学術図書出版社）
参考書　杉浦 光夫　解析入門，東大出版

予備知識

特に仮定しない．

講義内容

第１回: 前期試験の解説をしました．

第２回: テーラー展開の積分形をやりました．これによって $e^x, \sin x, \cos x, \log(1+x), (1+x)^a$ など基本的な関数のテーラー展開が出そろいました．前期試験で計算力の不足を感じましたので，そのためのテストを行いました．

第３回: 偏微分に入りました．定義と基本的な性質，及び合成関数の微分を少しやりました．

第４回: 合成関数の微分法，特に極座標に変換したときをやりました．また多変数のテーラー展開を解説しました．残りの時間で演習をやりましたが，時間が足りなっかたのでレポートとしました．

第５回: 陰関数定理を解説しました．

第６回: ２変数関数の極値問題を，例を交えてやりました．また条件付き極値問題，ラグランジュの未定乗数法を少しやりました．

第７回: 中間テスト

第８回: 重積分に入りました．２重積分を中心に１変数との対比を行い，累次積分で求めることなどをやりました．

第９回: 累次積分の続きと，２変数のときの変数変換をやりました．

第１０回: ３辺数以上のときを話し，例として一般次元の単位球の体積を求めました．ついでにベータ関数とガンマ関数の関係も話しました．残った時間で累次積分の練習を行いました．

第１１回: グリーンの定理を解説しました．数理物理での使われ方まではできないので，むしろ微積分の基本定理の２次元版として説明した．

第１２回: 期末試験

講義の感想

数学では習ったことを演習で実際やってみることによって理解が深まる．計算練習を各自もっとやっておいてほしかった．

科目名　　数学基礎 III　　**担当教官**　納谷 信

サブタイトル

対象学年　　**１年**　　**1.5 単位　必修**

教科書　州之内 治男／和田 淳蔵 「改訂 微分積分」(サイエンス社)
参考書　一松 信 「解析学序説（上・下)」 （裳華房）
岡本 和夫 「微分積分読本」 （朝倉書店）
Ｅ．ハイラー／Ｇ．ワナー 「解析教程（上・下)」(シュプリンガー・フェアラーク東京)
高木 貞治 「解析概論」 （岩波書店）

予備知識

数学基礎 I の内容

講義内容

1. 数列の収束と関数の連続性 (3 回)
   数列の収束の定義，収束列の有界性，収束列の積の収束性，関数の連続性の定義，否定命題
2. 2 変数関数の微分法 (5 回)
   連続性，偏微分，方向微分，微分可能性，合成関数の微分，２階偏導関数，極値とその判定条件
3. 2 変数関数の積分法 (2 回)
   重積分，累次積分，変数変換の公式

講義の感想

できるだけ分かり易く丁寧に講義することを心がけたが，学生の反応，試験の結果をみる限りでは，学生によって理解のレベルに相当差があったようである．

参考資料

授業中に扱った演習問題

演習問題 $\boxed{1}$

(1)　数列 $a_n = \dfrac{3n-1}{n+4}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ の極限を α とする．$\varepsilon > 0$ が与えられたときに, $n \geq N$ に対して $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つためには, 自然数 N をどのようにとればよいか？　また, $\varepsilon = 10^{-2}$, $\varepsilon = 10^{-4}$ のときに, N を具体的に求めよ.

(2)　数列 $\{a_n\}$ が実数 α に収束しないとはどういうことか？　言い換えると, 以下の命題の否定命題はどのようになるか？

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある自然数 N が存在して, $n \geq N$ をみたす
すべての自然数 n に対して, $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ.

演習問題 $\boxed{2}$ $\{a_n\}$ を数列とし, 実数 α に収束するとする. このとき, β を α と異なる実数とすると, $\{a_n\}$ は β には収束しないことを示せ.

すなわち, 数列の極限は, 存在するとすれば一意的である.

演習問題 $\boxed{3}$

(1) 関数 $f(x) = x^2$ は, すべての $a \in \mathbf{R}$ に対して, $x = a$ で連続であることを示せ.

(2) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ は, すべての $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ に対して, $x = a$ で連続であることを示せ.

(3) 関数

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

が, $x = 0$ で連続であること, および $x = 0$ で微分可能でないことを示せ.
ただし, 関数 $F(x)$ について, $x \to a$ のとき $F(x) \to \alpha$ であるとは,

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して,
$0 < |x - a| < \delta$ をみたすすべての x に対して, $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ

ことをいう.

演習問題 $\boxed{9}$ 関数

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

は, $(x, y) = (0, 0)$ で連続でないことを示せ.

演習問題 $\boxed{10}$ 次の関数の偏導関数を求めよ.

(1) $\sin^{-1} \dfrac{y}{x}$　(2) $\log(x^2 + xy + y^2)$　(3) $\dfrac{xy}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

(4) $x^3 + y^3 - 3xy$　(5) $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$　(6) $\tan^{-1} \dfrac{y}{x}$

(7) $e^{x^2 + y}$

演習問題 $\boxed{11}$ 関数 $f(x, y)$ は全微分可能であるとし, (u, v) を長さ 1 のベクトルとする. $f(x, y)$ の (u, v) 方向への方向微分を計算せよ.

演習問題 $\boxed{12}$ 関数 $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ について以下の問に答えよ.

(1) f の 1 次, 2 次の偏導関数を求めよ.

(2) $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ をみたす (a, b) を求めよ.

(3) (2) で求めた (a,b) に対して, $\det H(a,b)$ を求めよ.

演習問題 $\boxed{18}$ 関数 $f(x,y) = ax^2 + y^2$（a は定数）の概形を描け. また, 原点 $(0,0)$ が $f(x,y)$ の唯一の停留点であることを確かめ, そこでのヘッセ行列を計算せよ.

自習用に配布した演習問題

演習問題 $\boxed{4}$ $\{a_n\}$ を数列とし, すべての $n \in \mathbf{N}$ に対して $a_n \neq 0$ であるとする. このとき, 次を示せ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{a_n}\right| = \infty$

演習問題 $\boxed{5}$ $\{a_n\}$ を数列とし, $\{a_n\}$ は実数 α に収束するとする. このとき, 数列 $\{{a_n}^2\}$ は α^2 に収束することを示せ. すなわち,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} {a_n}^2 = \alpha^2$$

を示せ.

演習問題 $\boxed{6}$ $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を数列とし, すべての $n \in \mathbf{N}$ に対して $a_n \leq b_n$ であるとする. このとき, $\{a_n\}$ が実数 α に収束し, $\{b_n\}$ が実数 β に収束するならば, $\alpha \leq \beta$ となることを示せ. すなわち,

$$\text{すべての } n \in \mathbf{N} \text{ に対して } a_n \leq b_n, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha \leq \beta$$

を示せ.

演習問題 $\boxed{7}$ $f(x)$ を $\mathbf{R}$ 上の連続関数とし, すべての $x \in \mathbf{R}$ に対して $f(x) \neq 0$ であるとする. このとき, $\dfrac{1}{f(x)}$ が $\mathbf{R}$ 上の連続関数であることを示せ.

演習問題 $\boxed{8}$ $f(x)$ を $\mathbf{R}$ 上の連続関数とし, $f(a) > 0$ であるとする. このとき, ある $\delta > 0$ が存在して, $a - \delta < x < a + \delta$ をみたすすべての x に対して $f(x) > 0$ となることを示せ.

演習問題 $\boxed{13}$

(1) $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ を x, y の関数とみなすとき, $\dfrac{\partial r}{\partial x}$, $\dfrac{\partial r}{\partial y}$, $\dfrac{\partial \theta}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \theta}{\partial y}$ を計算せよ. また, 計算結果を r, θ の関数として表せ.

(2) 関数 $z = g(r,\theta)$ に $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ を代入して, z を x, y の関数とみなすとき, z の x, y に関する 1 階偏導関数を, z の r, θ に関する 1 階偏導関数および r, θ を使って表せ.

演習問題 $\boxed{14}$ $h(t)$ を微分可能な関数とする. 以下の問に答えよ.

(1) 関数 $f(x,y) = h(xy)$ が関係式 $x\dfrac{\partial f}{\partial x} - y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ をみたすことを示せ.

(2) 関数 $g(x,y) = x^m h\left(\dfrac{y}{x}\right)$ が関係式 $x\dfrac{\partial g}{\partial x} + y\dfrac{\partial g}{\partial y} = mg$ をみたすことを示せ.

演習問題 $\boxed{15}$　次の関数の 1 次および 2 次の偏導関数を求めよ．

(1) $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f$

(2) $x^3 + y^3 - 3axy$

(3) $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

(4) $\sin^{-1} \dfrac{x}{y}$

(5) $e^{ax}(\cos by + \sin by)$

演習問題 $\boxed{16}$　次の関数が $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ をみたすことを確かめよ．

(1) $\dfrac{x}{x^2 + y^2}$

(2) $\log \sqrt{x^2 + y^2}$

(3) $\tan^{-1} \dfrac{y}{x}$

演習問題 $\boxed{17}$　次の関数の極大値・極小値を, それらを与える点の座標とともに求めよ．

(1) $x^3 + y^3 - 3x - 3y$

(2) $x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

(3) $x^3 + y^2 + 2xy + y$

(4) $x^3 - x^2 - x + 2xy^2 - xy^3$

(5) $e^{-x^2-y^2}(ax + by)$　$((a, b) \neq (0, 0))$

(6) $xy\, e^{-x^2-y^2}$

(7) $e^{-x-y}(ax^2 + by^2)$　$(a, b > 0)$

演習問題 $\boxed{19}$　次の積分を計算せよ．ただし, $0 < a < b$, $p \neq 0$, $q \neq 0$ とする．

(1) $\displaystyle\iint_D x^2\, dxdy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$

(2) $\displaystyle\iint_D (x + y)^2\, dxdy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$

(3) $\displaystyle\iint_D e^{px+qy}\, dxdy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq a\}$

(4) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{(x + y + 1)^2}, \quad D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$

(5) $\displaystyle\iint_D \frac{y^2}{x^2y^2 + 1}\, dxdy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$

(6) $\displaystyle\iint_D x^2y\, dxdy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x - a)^2 + y^2 \leq a^2,\ y \geq 0\}$

(7) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x}\, dxdy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2x\}$

(8) $\displaystyle\iint_D x\sqrt{y}\, dxdy$,　D は $y = 2x$, $y = -x + 3$, x 軸で囲まれた三角形

(9) $\displaystyle\iint_D \sqrt{xy}\,dxdy,\quad D$ は $y=x^2$ と $x=y^2$ で囲まれる部分

(10) $\displaystyle\iint_D y\,dxdy,\quad D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1, y\ge a\}$

(11) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy,\quad D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid \sqrt{x}+\sqrt{y}\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$

演習問題 $\boxed{20}$　$f(x,y)$ が積分域で連続なとき, 次の累次積分の順序交換の公式を確かめよ. ただし, $0<a<b$ とする. （積分域を図示してみよ.）

(1) $\displaystyle\int_a^b\left[\int_a^x f(x,y)\,dy\right]dx=\int_a^b\left[\int_y^b f(x,y)\,dx\right]dy$

(2) $\displaystyle\int_0^a\left[\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\,dy\right]dx=\int_0^a\left[\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx\right]dy$

(3) $\displaystyle\int_0^a\left[\int_{-x}^x f(x,y)\,dy\right]dx=\int_0^a\left[\int_y^a f(x,y)\,dx\right]dy+\int_{-a}^0\left[\int_{-y}^a f(x,y)\,dx\right]dy$

演習問題 $\boxed{21}$　変数変換の公式を用いて, 次の積分を計算せよ. ただし, $0<a<b$ とする.

(1) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy,\quad D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2\le a^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$

(2) $\displaystyle\iint_D xy^3\,dxdy,\quad D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2\le a^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$

(3) $\displaystyle\iint_D (px^2+qy^2)\,dxdy,\quad D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2\le a^2\}$

(4) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy,\quad D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\}$

(5) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid a^2\le x^2+y^2\le b^2\}$

演習問題 $\boxed{22}$　次の図形の重心を求めよ. ただし, 密度は一様, $a,b,c>0$ とする.

(1) 半円板 $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2\le a^2,\ y\ge 0\}$

(2) $(a,0)$, $(-b,0)$, $(0,c)$ を頂点とする三角形

(3) 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x$ で囲まれた図形

レポート問題 $\boxed{1}$（１０月２６日提出）

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ が $a_n\le c_n\le b_n$ $(n=1,2,\ldots)$ をみたし, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がともに α に収束するとき, $\{c_n\}$ も α に収束することを証明せよ.

レポート問題 $\boxed{2}$（１０月２６日提出）

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=\sqrt{a_n+1}\quad (n=1,2,\ldots)$$

によって定義する. 次の問に答えよ.

(1) $\{a_n\}$ は上に有界であること, すなわち, ある実数 M が存在して, すべての $n \in \mathbf{N}$ に対して $a_n \leq M$ であることを示せ.
（ヒント　例えば $a_n \leq 2$ を数学的帰納法によって示せ.）

(2) $\{a_n\}$ は単調増加数列であること, すなわち, $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$ であることを示せ.

(3) 「上に有界な単調増加数列は収束する」という事実により, $\{a_n\}$ は収束する. 極限値を求めよ.

レポート問題 $\boxed{3}$（１１月９日提出）
$f(x)$, $g(x)$ を $\mathbf{R}$ 上の連続関数とする. このとき, 次の関数が $\mathbf{R}$ 上の連続関数であることを示せ.

(1) $f(x)+g(x)$

(2) $f(x)\,g(x)$

レポート問題 $\boxed{4}$（１１月９日提出）

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^m y^n}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

(m, n は自然数) とするとき, 関数 $f(x,y)$ が $(x,y)=(0,0)$ で連続であるための必要十分条件は, $m+n \geq 3$ であることを示せ.

レポート問題 $\boxed{5}$（１２月１４日提出）

(1) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を r, θ の関数とみなすとき, $\dfrac{\partial x}{\partial r}, \dfrac{\partial x}{\partial \theta}, \dfrac{\partial y}{\partial r}, \dfrac{\partial y}{\partial \theta}$, を計算せよ. また, 計算結果を x, y の関数として表せ.

(2) 関数 $z=f(x,y)$ に $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を代入して, z を r, θ の関数とみなすとき, z の r, θ に関する 1 階偏導関数を, z の x, y に関する 1 階偏導関数および x, y を使って表せ.

レポート問題 $\boxed{6}$（１２月１４日提出）

関数 $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}(x^2+2y^2)$ の極大極小を求めよ.

レポート問題 $\boxed{7}$（１月１８日提出）関数 $z=g(r,\theta)$ に $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ を代入して, z を x, y の関数とみなすとき, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を z の r, θ に関する偏導関数および r, θ を使って表せ.

レポート問題 $\boxed{8}$（１月１８日提出）
$f(x,y)$ を連続関数とするとき, 累次積分

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\int_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy\right]dx$$

を重積分

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy$$

戻したときの積分域 D を図示せよ. また, 累次積分の順序交換を行え. （つまり, まず x について積分してから, 次に y について積分する形に書き換える. 演習問題 $\boxed{20}$ でウォーミングアップするとよい.）

チャレンジ問題 $\boxed{1}$　数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとき,

$$b_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

とおけば, 数列 $\{b_n\}$ も α に収束することを証明せよ.

チャレンジ問題 $\boxed{2}$　上限の存在定理（または公理）

「$\mathbf{R}$ の空でない部分集合 A が上に有界ならば, A の上限が存在する」

を用いて,

「上に有界な単調増加数列 $\{a_n\}$ は収束する」

を証明せよ.

チャレンジ問題 $\boxed{3}$　中間値の定理

$f(x)$ を閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数とし, $f(a) < f(b)$ であるとする. このとき, $f(a) < \mu < f(b)$ なる任意の実数 μ に対して, $a < c < b$ である実数 c が存在して, $f(c) = \mu$ となる

を証明してみよう.

ヒント

$$S = \{x \in [a, b] \mid f(x) < \mu\}$$

とおいて, S の上限を c とする. このとき $f(c) = \mu$ となることを証明すればよい. 演習問題 $\boxed{8}$ を用いよ.

チャレンジ問題 $\boxed{4}$　$D = \{\,(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \neq y\}$ を定義域とする関数

$$f(x, y) = \frac{\cos x - \cos y}{x - y}$$

を考える. $x = y$ なる点 (x, y) において $f(x, y)$ をどのように定義すれば, $f(x, y)$ を $\mathbf{R}^2$ 全体を定義域とする連続関数に拡張できるか？

チャレンジ問題 $\boxed{5}$　$\mathbf{R}^2$ で定義された全微分可能な関数 $f(x, y)$ が以下の条件をみたすとき, $f(x, y)$ はそれぞれどのような関数か？

(1)　$f_x = 0$

(2)　$f_x - f_y = 0$

(3)　$xf_x - yf_y = 0$

チャレンジ問題 $\boxed{6}$　次の関数は, 原点 $(0, 0)$ において, すべての長さ 1 のベクトル (u, v) 方向への方向微分をもつが, そこで全微分可能ではないことを示せ.

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^4 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

チャレンジ問題 $\boxed{7}$　$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0\}$ （第１象限）とする．広義積分

$$\iint_D e^{-x-y} x^{p-1} y^{q-1}\, dxdy \quad (p, q > 0)$$

に変数変換 $u = x + y,\ v = \dfrac{x}{x+y}$ を施して, 変数変換の公式を用いることにより, ベータ関数

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx \quad (p, q > 0)$$

とガンマ関数

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}(1-x)^{s-1}\, dx \quad (s > 0)$$

を結び付ける公式

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

を証明せよ．（多変数関数の広義積分については, 教科書第５章３節を参照のこと.）

小テスト問題　2001.11.16

以下の問題を解くにあたっては, 数列の収束, 関数の連続性の定義は, コーシーによるものを用いることとする.

$\boxed{1}$ (４０点)　$\{a_n\}$ を数列とし, すべての自然数 n に対して $a_n \leq 1$ であるとする．このとき, $\{a_n\}$ が実数 α に収束するならば, $\alpha \leq 1$ となることを示せ.
（ヒント　例えば背理法を用いよ.）

$\boxed{2}$ (６０点)　以下の問に答えよ.

(1)　$x,\ a$ を実数とする．次の不等式を示せ.

$$\left|x^2 - a^2\right| \leq |x-a|\,(\,|x-a| + 2|a|\,)$$

(2)　関数 $f(x) = x^2$ は, すべての実数 a に対して, $x = a$ で連続であることを示せ.

小テスト問題　2001.12.21

$\boxed{1}$ (３５点)　関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

について以下の問に答えよ.

(1)　$f(x,y)$ が原点 $(0,0)$ で x に関して偏微分可能であることを示し, 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ を求めよ．（原点以外の点での偏微分可能性について議論する必要はない.）

(2)　$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ が原点 $(0,0)$ で連続であるか否かを調べよ.

$\boxed{2}$ (３０点)　関数 $z = g(r, \theta)$ に $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ を代入して, z を x, y の関数とみなす. このとき, $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2$ を $\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$, r, θ を用いて, できるだけ簡単な形に表せ.

$\boxed{3}$ (３５点)　関数 $f(x, y) = x^2 + y^3 + 3xy - x$ が極大あるいは極小になる点, および鞍点を求めよ. （それらの点での関数の値を求める必要はない.）

期末試験問題　2002.02.01

$\boxed{1}$ (２５点)　関数 $z = g(u, v)$ に $u = \sqrt{x^2-y^2}$, $v = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{x+y}{x-y}$ を代入して, z を x, y の関数とみなす. このとき, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を z の u, v に関する偏導関数および u, v を用いて, できるだけ簡単な形に表せ.

$\boxed{2}$ (２５点)　関数 $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(x^2 - y^2)$ が極大あるいは極小になる点, および鞍点を求めよ. （それらの点での関数の値を求める必要はない.）

$\boxed{3}$ (２５点)　$0 < \varepsilon < 1$ に対し,

$$D_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \varepsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$$

とおく.

(1)　積分

$$\iint_{D_\varepsilon} \log\sqrt{x^2+y^2}\; dxdy$$

を計算せよ.

(2)　(1) で求めた積分の値を $I(\varepsilon)$ とおくとき, 極限値 $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} I(\varepsilon)$ を求めよ.

$\boxed{4}$ (２５点)　$(2, 0)$, $(1, 2)$, $(0, 2)$, $(-2, 0)$ を 4 頂点とする台形（密度一様）の重心を求めよ.

科目名　数学基礎 IV　　**担当教官**　梅村 浩

サブタイトル

対象学年　１年　　**1.5 単位**　必修

教科書　江尻 典雄　線形代数，学術出版
参考書

予備知識

特に仮定しない.

講義内容

1. 1 次従属，1 次独立.
2. 基底．基底と座標.
3. 基底変換と座標変換.
4. 部分空間.
5. $W_1 + W_2$, $W_1 \oplus W_2$. 生成される部分空間.
6. Ker, Im. 次元定理.
7. 連立 1 次方程式の解の次元.
8. 基底の取換えと線形写像の行列表示．基本変形との関係.
9. 正方行列の場合.
10. 対角化の問題．固有値，固有ベクトル.

講義の感想

内容も出来る限り少なくした.

科目名　　数学基礎 IV　　**担当教官**　木村 芳文

サブタイトル

対象学年　　１年　　**1.5 単位**　**必修**

教科書
参考書　線形代数，江尻典雄著　（教科書として指定してあったが参考書の意味合いが強いと授業の最初に説明した.）

予備知識

特に仮定しない.

講義内容

前期の中心的な課題であった連立方程式の理論の理解をもとにその復習をしつつ後期は行列の固有値，固有ベクトルの話と線形空間，線形写像の導入を行った.

具体的な講義内容は以下の通りである.：(「　」 内は簡単に触れただけの項目)

1. ２階定数係数線形常微分方程式の解
   - バネ-質量-抵抗系の運動方程式
   - 特性多項式と解の分類
   - 基本解の構成
2. 行列の固有値と固有ベクトル
   - ２階線形常微分方程式のベクトル・行列系（力学系）への変換
   - 行列の固有値・固有ベクトルの定義
   - 固有多項式（斉次方程式の非自明解，行列式）
   - 固有値・固有ベクトルによる力学系の解の構成
3. 行列の標準化
   - 行列の対角化（相似変換）
   - 対角化可能性（固有ベクトルの１次独立性）
   - 「ジョルダンの標準形の紹介 」
4. 固有値・固有ベクトルのその他の応用
   - 線形漸化式の解法（フィボナッチ数列）
   - 「２次形式の紹介」
5. 線形空間と線形写像
   - 線形空間，線形部分空間の定義，例

- 線形空間の基底と次元（復習）
- 線形写像の定義，例
- 線形写像の核と像
- 線形写像の表現行列
- 基底の変換

講義の感想

なるべく具体的に問題と問題意識を伝え，またその解法の過程で前期の基礎的な内容の復習に努めたので学生の反応は非常によかった．以下の期末試験を課した.（参考資料に記述）

参考資料

期末試験

$\boxed{1}$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ c & 3 \end{pmatrix}$$

が与えられたとき次の問いに答えよ.

(1) A が対角化不可能であるとき定数 c の値を求めよ.

(2) c が (1) で求めた値の時，力学系 $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ と等価な 2 階線形常微分方程式をもとめよ.

(3) (2) の方程式の基本解の組を求めよ.

$\boxed{2}$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

が与えられたとき次の問いに答えよ.

(1) A の固有値，固有ベクトルの組をすべて求めよ.

(2) A が正則な行列 P によって対角行列 D に相似変換されるとき，すなわち

$$P^{-1}AP = D$$

であるとき，行列 P と D を具体的に求めよ.

$\boxed{3}$ フィボナッチ数列をあたえる漸化式

$$\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, \cdots) \\ a_1 = 1, \quad a_2 = 1 \end{cases}$$

について次の問いに答えよ.

(1) $\mathbf{b_n} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$ を導入するとき上の漸化式と等価なベクトル-行列表現

$$\mathbf{b_{n+1}} = A\mathbf{b_n}$$

を求めよ.

(2) (1) の A に対して A^m 　(m は自然数) の表現を求めよ.

(3)

$$\lim_{m\to\infty} \frac{a_{m+1}}{a_m}$$

の値を求めよ.

$\boxed{4}$ 線形空間 V から W への線形写像 F が

$$F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 - x_2 \\ x_1 - 3x_2 \end{pmatrix}$$

と与えられ V, W の基底がそれぞれ

$$\alpha = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}\right\}, \quad \beta = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

であるとき F の α, β についての表現行列を求めよ.

$\boxed{5}$ 今期の授業に対する感想，意見を述べよ.

科目名　**数学基礎 IV**　　**担当教官**　**粟田 英資**

サブタイトル　線形代数

対象学年　**１年**　　**1.5 単位**　**必修**

教科書　斉藤正彦著，“基礎数学１，線形代数入門” 東京大学出版会
参考書　斉藤正彦著，“基礎数学４，線形代数演習” 東京大学出版会

予備知識

特に仮定しない．

講義内容

前半は行列式，後半は固有値問題を扱った．具体的な講義内容は以下の通り：

1. 行列式（3 行 3 列）の幾何的意味
2. 行列式の定義
   - 順列，差積，互換，一般の行列式の定義
3. 行列式の基本的な性質
   - 行列式の線形性と交代性による定義と基本変形に対する応答
4. 行列式の展開
   - 小行列，余因子行列，クラメルの公式，逆行列の存在条件
5. 固有値問題
   - 特性方程式，固有値と固有ベクトルの具体的な求め方
6. 行列の対角化と座標変換
   - 連成振動，落ち葉の慣性主軸，固有空間
7. 一次独立性と基底
   - 対角化可能性
8. 定数係数の差分方程式と微分方程式
   - Fibonacci 数

講義の感想

講義を通じて，できる限り平易に解説を心がけた．

参考資料

期末試験

教科書と参考書の問題から出題した.

1. 次の行列

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

が対角化可能かどうか判定せよ. 又, 対角化可能ならば, 正則行列 P を求めて $P^{-1}AP$ を対角行列にせよ.

2. 次の漸化式

$$x_{n+3} = 4\,x_{n+2} - x_{n+1} - 6\,x_n, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

の一般項を求めよ.

3. 平面上の n 個の点 (x_i, y_i), $i = 1, 2, \cdots, n$ の x 座標が全て異なれば, これら個の点を通る $n-1$ 次式

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$$

が唯一つ存在する事を示せ.

4. 3 次元空間上の 4 点 (x_i, y_i, z_i), $i = 1, 2, 3, 4$ が同一平面上にあるための必要十分条件は

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{pmatrix} = 0$$

である事を示せ.

科目名　数学基礎 IV　　**担当教官**　斎藤 秀司

サブタイトル　線型代数

対象学年　**1年**　　**1.5 単位　必修**

教科書　特になし.
参考書　線型代数入門, 東京大学出版会

予備知識

特に仮定しない.

講義内容

1．線型写像の与えられた基底に関する表現行列を解説する．２．固有値と行列の対角化：行列の固有値と固有ベクトルについて述べ，それと行列の対角化との関連を説明する．行列の対角化可能性についての基本的な十分条件を与える．３．計量ベクトル空間と直交性：内積を説明し，直交性を考察する．正規直交基底を論じ，直交行列を定義する．さらにグラム・シュミットの直交化を解説し，実対称行列の直交行列による対角化を解説する．応用として実 2 次形式の標準形及びその条件付での最大，最小問題を解説する．

講義の感想

学生の受講態度は熱心であったので気持ちよく講義ができた.

科目名 **数学展望 II** **担当教官 原 隆**

サブタイトル 確率論で見る自然（社会）現象

対象学年 **１年** **２単位 選択**

教科書 指定しなかった．
参考書 小針あき宏（「あき」は「日」の右に「見」）：確率・統計入門（岩波書店，1973）
楠岡成雄：確率・統計（森北出版，新数学入門シリーズ７，1995）

予備知識

微分積分学 I 程度以上は仮定しなかった．高校で確率を履修しなかった学生もいるであろう事は考慮し，確率論に関してはゼロから始めた．

講義内容

この講義は「数学展望」ということなので,「確率」を軸にして数学の一側面を紹介しようと考えた．確率論の基礎（高校程度）を示した後，高校ではやらなかったであろう題材として「条件付き確率」,「中心極限定理などの極限定理」,「ランダムウォーク」の３つの題材を提示した．堅苦しい確率論の講義にはせず，出来るだけ具体的な問題を考えていく上でこのような話題が自然にカバーされるように持って行くよう，努力はした．ただ，これらの題材をまともにやると一年生のレベルを超えてしまう場合もあるので，所々，数学的厳密さを犠牲にした部分もある．

具体的な講義内容は以下の通り（回数は大体の目安で，実際には ± 0.5 回の誤差あり）：

1. 確率論の基礎（３回）
   - 確率論の舞台 — 事象と標本空間
   - 数学における確率
   - 数の数え方の復習
2. 条件付き確率とベイズ推定（３回）
   - 条件付き確率
   - ベイズの公式と推定
3. 確率変数（２回）
   - 確率変数とは
   - 期待値と分散
   - チェビシェフの不等式とその仲間
4. 大数の法則と中心極限定理（３回）
   - 問題設定
   - （弱）大数の法則

- 中心極限定理
- 大数の強法則（講義では扱えず）

5. ランダムウォーク（３回）
   - 背景説明
   - １次元のランダムウォーク
   - ２次元のランダムウォーク
   - ３次元のランダムウォーク

講義の感想

題材選びなど，かなり苦労し，労力も使ったが，そのぶん楽しんで講義が出来た．学生さんのレポートの中には非常に良くやっているものもあり，こちらの励みにもなった．ただ，ちょっと時間配分を間違った面があったかもしれない．初めからとばしすぎて大半の人がわからなくなるのは避けようと思い，割合ゆっくりとスタートしたため，少なくとも前半は大抵の人がついてきてくれたのではないかと思う．ただ，そのために後半の時間が足りなくなり，少し駆け足になってしまった．今から思えば，前半をもう少し速く行って，後半に力を入れるべきだったかも知れない．また，年が明けてからは私の他の校務と何重にも重なったため，レポート返却が大幅に遅れた．深くお詫びする．

参考資料

数学展望 II で考える問題の例（講義開始時に配ったもの）

問 1. 表と裏が出る確率がそれぞれ 1/2 の硬貨を何回も投げています．今まで１０回投げて，すべて表でした．次（１１回目）は裏の方が出やすいでしょうか？

問 2. この部屋に n 人の人がいます．この内，どの二人をとっても誕生日が同じでない確率はいくらでしょう？特に，この「同じでない」確率が 1/2 より大きくなるには n はどのくらい大きければ良いでしょう？(閏年に生まれた人は無いものとします.)

問 3. n 人の人が,（１つずつ）ケータイを持っています．これをみんな集めて，完全に混ぜ，どれが誰のものか気にせずに配り直しました．このとき

1. 誰も自分のケータイを受け取れない確率は？
2. 丁度 k 人だけ，自分のケータイを受け取る確率は？

問 4. 普段あまり起こらないこと（事故）が立て続けに起こると，週刊誌などに「呪われた年だ！」と言うような記述が載ります．これについてはどう思いますか？勿論，犠牲になられた方には心からの哀悼の意を表しますが，ここで問題にしているのは「事故がまとまって起こる」のはそんなに不自然か，と言うことです．

問 5. 駅での行列の問題．例えば，駅の切符売り場を考えます（銀行のキャッシュコーナーでも良い）．窓口（ATM）は３つで，この窓口にに人がぽつぽつやって来て切符を買っていきます．このとき，お客さんを並ばせるのに以下のどちらが良い（お客さんの不満が少ない）でしょうか？

1. 各窓口の後ろに１つずつ，合計３つの行列を作らせて，並んだ窓口でしか受け付けない．
2. 長い行列を一つ作って，３つの窓口のうち開いたところへ一人ずつ送り込む．

問 6. ある病気をテストする血液検査を考えます．大抵の血液検査には誤差がつきもので，このテストも

- 病気の人をテストすると 95% の確率で「病気だ」と正しく判定するが，残りの 5% は見逃してしまう
- 健康な人をテストすると 99% の確率で「健康だ」と正しく判定するが，残りの 1% では（健康なのに）「病気だ」と言ってしまう

となっています．さて，独立な疫学的調査からこの町の人口の 0.5% の人が病気を持っているだろう事がわかっています．このとき，僕のテスト結果は陽性でした．僕が本当にこの病気にかかっている確率はいくらでしょうか？

問 7. 硬貨を投げ，表なら $+1$ 点，裏なら -1 点もらえるとします．N 回投げた時，僕の点数はどんな感じで分布しているでしょうか？（大数の法則，中心極限定理）

問 8. 酔っぱらったおじさんがふらふら歩いています．彼は家にたどり着けるでしょうか?（ランダムウォーク）

上ではわざと問題を曖昧に書いた部分もあります．その曖昧な部分も含め，問題をどのように定式化すれば数学になるか，その結果をどのように解釈して元々の問題の答を引き出すか，と言うことは決して自明ではありません．講義ではこのような，少し数学の外に出ている部分も含めて解説していこうと考えています．

レポート問題

以下はレポート問題である．レポートには毎回，以下のような「お約束」をつけた．学生によっては，「〇〇さんと相談しました」と書いてくる人達もいた．

レポートのお約束：

- 友達と相談しても，本を調べても，何をやっても良いから，自分で理解した範囲を書くこと．その際，参考文献や議論した友達の名前も明記すること．(友達と議論したり，本を見たからと言って悪い点をつける，などと言うことはしない．一番大事なのは自分でわかったところを表現することだから，それまでの過程で何をやっても問題ない.)
- なお，問題の番外編として，今までの講義内容・講義形態についての感想，不満，文句，このように改善すべしとの意見などもできるだけ書いてください．お願いします．

第０回ボランティアレポート問題

以下のゲームを実際に友人や家族の人と何回か（５回〜１０回）やってみて，その結果を以下に指定するようにレポートしてください．結果を集計して来週の講義で使いたいので，最後に載せる締め切りなどを守ってくださると助かります．ゲームのやり方と要点は以下の通りです．

1. ２人一組になって，紙コップを３つと「お宝」（何でもよい，コップの下に隠れるもの）を一つ用意します．
2. A さんは３つの紙コップをテーブルに伏せ，その一つにお宝を（B さんに見られないように）隠します．
3. B さんはお宝が隠されていると思う紙コップを一つ，指定します．
4. B さんからコップの 指定があった後で A さんは「お宝が隠れていず，かつ B さんも指定しなかった」コップをひっくり返してみせます．当然，お宝は入っていません．
5. （ここが一番重要）さて，上の結果を踏まえて，B さんにはもう一度チャンスが与えられます．(残りのコップ２つのどちらかにはお宝が隠れているはずですが)「B さんは先ほど指定したコップから，残されたもう一方のコップに乗り換えてもよい」とするのです．
6. 問題は 乗り換えた方が得（お宝ゲットの確率が大きくなる）か，乗り換えても確率は変わらないか，と言うことです．
7. 「このまま乗り換えない場合」「やっぱり乗り換える場合」をそれぞれ１０回程度（もっとたくさんやりたければ１００回でも歓迎！）やってみて，その結果を「このまま乗り換えなかった場合のお宝ゲットは○○回中××回」「やっぱり乗り換えた場合のお宝ゲットは□□回中△△回」とレポートしてください．
8. 勿論，このゲームを理論的に考えて,「結果はこうなるはずだからこっちが得！」と言う解析があれば，それも大歓迎です．

第１回レポート問題

（以下から２問以上選択）

問 9. ある工場ではカメラのフラッシュライト（と言ってわかるかな...）を作っている．通常の工程では不良品（光らない）が出る割合は p であるが，今日のだけ，担当者の居眠りのために不良品が q の割合で混じってしまったようである（$0 < p \le q \ll 1$ とする）．さて，ここにフラッシュライトが N 個づつ入った箱が k 個ある．k 個の箱のうち $(k-1)$ 個には昨日までに正常に製造されたものが入っており，残りの一つには今日（不良率 q で）製造されたものが入っていることまではわかっているが，どの箱に今日の製品が入っているかはわからない．本来ならばこれら k 個の箱を全て廃棄処分にすべきであるが，それは余りにもったいないと考え,「抜き取り検査」を行うことにした．以下の a, b のそれぞれの場合について，問に答えよ．

a.
- 今，一つの箱を選び，その中からフラッシュライトを一つ取り出して点火したところ，光らなかった（不良品）．この箱に入っているのは今日製造された製品である確率を求めよ．
- 同じ箱からもう一つ取り出して点火すると，またもや不良品であった．この箱に入っているのは今日製造された製品である確率を求めよ．

b. （a とは無関係）全ての箱からフラッシュライトを一つずつ取り出して点火したところ，箱 A から取り出したもののみ不良品，残りは正常であった．箱 A に入っているのは今日製造された製品である確率を求めよ．

言うまでもないことであるが，こんな時はあくまで k 箱全てを捨てるべきであり，上のような計算に基づいて「最も不良品の多そうな箱以外を全て売ってしまおう」などと言うのは非常にマズイ！(なお，わざわざ「フラッシュ」などというものを持ち出したのは，一回テストしたら使い物にならなくなるものを例にしたかったため — 非破壊検査ができない場合の推定法)

問 10. ○○科目の期末試験は（数学ではあり得ないことに）○×式の問題で，各問は m 個の選択肢から一つ正解を選ぶ形になっています．A 君はかなり怠けていたので，実力で（つまり，まぐれ無しで）正しく答えられる確率は各問毎に p であると思われます（$P < 1/2$）．答を正しく知っているときは勿論，A 君はその正解を答えますが，答がわからないときはヤケクソで m 個の答から等確率で 1 個を選びます．さて，

1. ある一問に対して（まぐれであれ何であれ）A 君が正解を答える確率はいくらでしょう？
2. ある一問をテストしてみたところ，A 君は正解を答えました．このとき，A 君が実際に答を知っていた（まぐれ当たりではない）確率はいくらでしょう？
3. 以上の結果を解釈せよ． どのような p, m の値の場合に「マグレ当たり」が多くなるか，考えてみよう．

問 11 (Laplace). $i = 0, 1, 2, \dots, k$ と（非常に小さな）印が付けられた $(k+1)$ 個のコインが壺に入っている．これらは非常にいびつなコインで，i 番目のコインを投げたときに表が出る確率は i/k となるように調節されている．目隠しをしたままこの壺から一枚のコインを選んで実験をする．以下の問いに答えよ．

1. 取り出したコインを一回投げたところ，表が出た．このコインが i 番目のコインである確率はいくらか？$(i = 0, 1, 2, \dots, k)$
2. 取り出したコインを更に投げ続け，合計 n 回投げた．結果は全て表だった．このコインが i 番目のコインである確率はいくらか？$(i = 0, 1, 2, \dots, k)$
3. 取り出したコインを更にもう一回（つまり通算で $(n+1)$ 回目）投げる事にした．このとき，やはり表が出る確率はいくらか？
4. 上の小問 2, 3 の答はそれほど簡単にならなかったかも知れない．そこでこれらの確率が $k \to \infty$ の極限でどうなるか，求めてみよう．結果は直感と合うだろうか？

（注）この問では，コインは最初に一枚取り出したら，同じ物を使い続ける．コインを何回か投げるとき，一回ごとの結果は独立だとする．また，コインについている印は大変小さいので，取り出したコインがどれかは見ただけではわからないものとする．(そうでないと，小問 2, 3 が面白くない．)

問 12. 3 人の射撃手（$1, 2, 3$）が 200m 離れた，同じ的を狙う．今までの練習成績から，射撃手 i が一発で的に当てる確率はそれぞれ p_i と考えられる（$i = 1, 2, 3$）．さて，3 人が一発ずつ撃ったところ，的には<u>丁度一発だけ</u>当たっていた．この当たった一発が射撃手 i のものである（つまり，他の二人ははずした）確率について，以下の問いに答えよ．

1. まず，計算を始める前に，直感的に答を推定してみよう．
2. では，講義での説明に基づき,「正しく」計算してみよう．
3. 2 の結果は直感とあっているか？例えば，$p_1 = 0.2, p_2 = 0.4, p_3 = 0.6$ として，射撃手 1 が当てた確率はいくらになっているか？(勿論，1, 2 の答が一緒になった人は立派なものである．僕にはこの結果は意外だったけどね.）

第２回レポート問題

以下の問を考える：

問 13. さいころを何回も投げることを考えよう．一回投げる毎に以下の要領で点数をもらえるものとする．

- 出た目が 1 または 2 の時は +2 点

- 出た目が 3 から 6 の時は -1 点

毎回出た点数を加算していくとして，さいころを N 回投げたときの得点 S_N はどのように分布しているだろうか？（ここでもさいころの６つの面が出る確率は全て $\frac{1}{6}$ であり，かつ一回ごとのさいころ投げは独立と仮定する.）

上について，以下を行い，弱大数の法則の証明を納得しよう．同時にこのレポートは期待値や分散の扱いの練習も兼ねている.

1. i-番目にもらう点数を表す確率変数を X_i として，$E[X_i], \mathrm{Var}[X_i]$ を計算せよ.
2. 更に $S_N \equiv \sum_{i=1}^{N} X_i$ を定義し，$E[S_N] = \langle S_N \rangle$，$\mathrm{Var}[S_N]$ を計算せよ.
3. 上の結果とチェビシェフの不等式を組み合わせて,
$$f(\alpha) \equiv P\big[\,|S_N - \langle S_N \rangle\,| > \alpha\sqrt{N}\,\big] \le \frac{\text{定数}}{\alpha^2}$$
の形の表式を作れ（要するに弱大数の定理を今の場合に証明しなさい，と言うこと）.
4. （難しいかも．有志のみでよい）．上の式は,
$\alpha \to \infty$ の時，$f(\alpha)$ は（定数）$\times\,\alpha^{-2}$ よりは速くゼロに行く
ことを主張している．しかし，$f(\alpha)$ は，$\alpha \to \infty$ で，実際にはもっと速くゼロに行っていることがわかっている[2]そこで $f(\alpha)$ のより良い評価を考えたい．$|S_N - \langle S_N \rangle\,|^4$ などの期待値を考えることにより，$f(\alpha)$ の評価を改良することを試みよ．$\alpha \to \infty$ で，$f(\alpha)$ はどのくらいの速さでゼロに行くだろうか？（分母の α^2 を α^4 などにする事は可能だろうか？）
5. （できればやってみよう）実際にさいころを何回か（４０回とか１００回とか）投げて，S_N がどうなるか，やってみよう！

第３回レポート問題

（以下の２問とも解答せよ）

問１． A さんのところには子供が二人いることはわかっている．でも，子供が男の子か女の子かは良く知らない．以下のそれぞれの状況の下で,「A さんの子供は二人とも女」である確率を考えよ.（それぞれの状況は別々に起こるものとする．つまり，状況 1 を経験した後で状況 2 を経験する，などということではない.）

1. 道でばったり A さんにあったら，女の子一人を連れて歩いていた.
2. A さんの家を訪ねたら，女の子が一人，顔を出した.
3. どうしても A さんの家庭事情を知りたいので，私立探偵に依頼した（良い子はマネしないように）．すると，少なくとも一人，女の子がいることだけはわかった.

もう察しが付いていると思うが,「条件付き確率」「独立性」などについてもう一度考えてもらうため，わざと曖昧な訊き方をしている．一応の「正解」は用意してあるが，できるだけ自由に論じて欲しい.（ただし，余り変なところまで気を回さないように，女の子が産まれる確率は 50% で，また A さんの二人の子供は双子ではない，とでもしておこう．これ以外にも自分が自然と思う仮定を加えてくれて良い.）

問２． 何かの物理量を測定する実験を想定しよう．実験結果は色々な原因のために誤差を含むので，通常,「何回も測定して平均する」ことを行う — 平均した結果が真の値に近いだろうと期待して．この点を中心

[2]実際，この問題では S_N が色々な値をとる確率を計算することができるから，より詳しく調べることができる．ただし，このレポートではそこまで要求しない

極限定理などを用いて考えてみよう．全部で N 回の測定を行うこととし，i-回目の測定値を X_i とする．各測定値 X_i は互いに独立で，その分散は σ^2 であると仮定しよう（$\sigma > 0$）．この N 回の平均は

$$Y_N \equiv \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \tag{1}$$

で，これが $N \to \infty$ で真の値に近づくことは大数の法則によって保証されている．そこで，Y_N と真の値 T の誤差を ϵ 以下にするには，どのくらいの回数 N だけ測定したらよいか，考えよう．勿論，いくら N を大きくしても，測定値の全てが T から大きくずれる確率もゼロではない．そこで，95% の信頼度で真の値からの誤差が ϵ 以下になるような，つまり

$$P[|Y_N - T| \le \epsilon] \ge 0.95 \qquad (T \text{ は真の値}) \tag{2}$$

となるような N の値を求めたい．

1. まず，チェビシェフの不等式によって，そのような N がどれくらい大きければ十分か，求めてみよ．
2. 次に中心極限定理を近似的に使って，そのような N がどれくらい大きければ十分か，求めてみよ．
3. （実際の数値を入れてみよう）$\sigma = 1$ の時に N はどのくらいか，$\epsilon = 0.1$ と $\epsilon = 1.0$ の場合について，それぞれ求めてみよ．

あんまり進んでないことや僕の風邪のせいで，面白い問題にならなかった．申し訳なし．

第４回レポート問題

（以下から一問以上選択：でも大抵の学生は２問以上解答した.）

問１． A 君は空手の昇段試験に挑戦することにした．この昇段試験は「続けて２回 勝てば合格」と言うルールで行われるが,（通常とは異なり），以下のように変な規則がある．

- A 君の相手は B, C の二人と決まっていて，A 君は合計３回，試合をすることができる
- ただし，その試合順は BCB（まず B と戦い，次に C と戦い，最後にまた B と戦う）か，CBC（まず C と戦い，次に B と戦い，最後にまた C と戦う）のどちらかしか選べない．

さて，対戦相手 B は A 君よりかなり弱いが，逆に C は A 君よりも非常に強い有段者である．この場合,「続けて２回 勝てば合格」の確率を少しでも上げるためには，A 君は BCB または CBC のどちらを選ぶべきであろうか？

> 実際に試合をすると疲れたり，負けたことで落ち込んだり，逆に勝って勢いに乗ったりなどする．でもここは簡単のため，どの順で戦っても A 君が B 君に勝つ確率はいつでも p，A 君が C 君に勝つ確率はいつでも q として良い（$1 \approx p > q \approx 0$）．C 君がいる限り，どっちにしろ A 君の昇段は望み薄だが，少しでも昇段の確率を大きくするにはどうすべきか，と言う問題.

問２．（警告：この問題は面白いが，非常に難しいと思う．色々考えたが，良いヒントが思いつかない．場合によっては，一週間位してからヒントを僕の部屋の前や web page に掲示するかも知れない.）

数字が一つだけ書いてあるカードが N 枚ある．N 個の数字は全て異なることはわかっている（例：1 から N）が，どのような順番に並んでいるかはわからない．この N 枚のカードで，以下のゲームを行う．

1. ゲームの目的は，N 枚のカードの内，最大の数字の書いてある物 を選ぶことである．

2. しかし，君は N 枚のカードを一度に見るわけにはいかない.（見ることができるなら苦労はせん.）
3. 君に許されるのは，まず，１枚目のカードの数字を見て，ここでやめるか否かを決めることである.
   - ここでやめれば１枚目を選んだことになる.
   - やめない場合は１枚目は選ばなかったことになり，２枚目以降に進む.
4. ２枚目に進んだ場合，また２枚目の数字をみて，ここでやめるか（２枚目を選ぶ），３枚目以降に進むか（２枚目も選ばなかったので３枚目以降から選ぶ）を決める.
5. 以下，同様に続けて適当なところでやめ，そのときのカードを選ぶ.
6. この場合，例えば４枚までカードをめくってみた段階で「やっぱり２枚目のを選びたい」と思っても，後戻りはできない．２枚目のカードは既に選ばなかったのだから，ここは４枚目以降のカードから選ぶしかない.

闇雲に一枚選べば，N 枚のカードから最大のものをたまたま選ぶ確率は $1/N$ である．この確率を $1/N$ より大きくするため，以下のような作戦を考えた.

> カードを初めから s 枚めくってみて，その中の最大数を記録する（この最大数を $\max(s)$ と書く）．この s 枚は捨て石にして，$s+1$ 枚目以降を順にめくり，$\max(s)$ より大きい数が初めて出たカードを選ぶ.（最後まで $\max(s)$ より大きい数が出なければ，最後のカードを選ぶ.）

s を N の関数としてどのようにとれば，一番効率が良い（つまり，最大のカードを選ぶ確率が大きくなる）だろうか？また，そのように s を選んだとき，最大のカードを選べる確率はどのくらいだろうか？

> 上の問は昔は「良い結婚相手の探し方，持参金の問題，またはお見合いの問題」と言われていたが，ちょっと生々しいので数を使って設問した．人生には色々な決断を迫られる局面があるが，大抵の場合,「これからもっと良くなるのか悪くなるのか」がわからない場面で決断しなければならない．そのような場合の一つのモデル化がこの問題である．なお，この問題は株価の変動などにも応用できる（可能性がある；応用して損をしても責任はとらんで）.

問３. ランダムウォークの問題の一例を解いてみよう（背景については問題の最後を）．今，$0, 1, 2, 3, ..., \dots, N$ の点の上を動く粒子（ランダムウォーク）があり，その法則は以下のようになっている

- 時刻ゼロで粒子は点 n （$1 \le n < N$）にいる.
- 各時刻で粒子は，確率 p で左隣の点へ，確率 $1-p=q$ で右隣の点へ跳ぶ（普通の一次元ランダムウォークの跳び方．$0<p<1$）.
- （ここが普通と違う）ただし，点 0 と点 N は例外で，点 0 や 点 N へやってきたランダムウォークは，ここに捕まってしまって未来永劫，動けなくなる.

点 n から出発した粒子は最終的には 0 または N のどちらかの点に捕まると思われるので，点 0 と点 N に捕まる確率をそれぞれ求めよ．更に n を固定したままで $N \to \infty$ を考えるとどうなるか？

ヒント： n から出発した粒子が最終的に 0 に捕まる確率を a_n とすると，$a_n = pa_{n-1} + qa_{n+1}$ が成立することをまず示せ（$1 \le n < N$）．その後で，この漸化式を境界条件 $a_0 = 1, a_N = 0$ の下で解いて a_n を求めよ.

> （背景）この問題の背景は少なくとも２つある.（１）一次元上を動く酔っぱらいのおっさんの問題で，このおっさんは確率 p で左へ，確率 $q = 1-p$ で右へ動く．それで，0 と N には崖が

あって，おっさんがどっちの崖から落ちるか，と言う問題である（最後で $N \to \infty$ とするのは，左側だけに崖がある場合に大体相当）.（２）賭け事で破産するかどうか，の問題．この問題では，A と B がそれぞれ n 円と $N-n$ 円を持って勝負を始める．勝負はサイコロを振るなどして行い，A が勝てば B が A へ一円払い，B が勝てば A が B に一円払う．一回ごとの勝負で A の勝つ確率が p の時，A や B が最終的に破産する確率はいくつか？と言うこと.

問４． （結局触れられなかった「事故の発生頻度」の問題）大きな事故が立て続けに起こるのが不自然かどうか，以下のモデルで考える．まず，一年を N 等分し（$N \gg 1$），N 等分されたそれぞれの区間に事故が起こる確率は他の区間とは独立に $1/N$ だとする.（つまり，平均すれば一年に一回，事故が起こる）．このとき，

1. 一年間に事故が k 回起こる確率を求めよ（$k = 0, 1, 2, ...$）.（要するに N 個の区間の内，k 個の区間で事故が起こる確率を求めよ）．この確率を $P_N(k)$ と書く.
2. k を固定したままで $N \to \infty$ を考え，$P_\infty(k) \equiv \lim_{N\to\infty} P_N(k)$ を計算せよ.
3. 上の $P_N(k)$ または $P_\infty(k)$ に対して具体的に $k = 0, 1, 2$ くらいの値を計算してみよ（$N = 365$ など）．更に，一年に３つ以上の事故の起こる確率 $\sum_{k=3}^{\infty} P_N(k)$ または $\sum_{k=3}^{\infty} P_\infty(k)$ を求めてみよう.（$\sum_{k=0}^{\infty} P_N(k) = \sum_{k=0}^{\infty} P_\infty(k) = 1$ に注意すればよい.）一年に３回以上の事故が起こるのは，そんなに珍しいことだろうか？

問５． A と B の壺があり，A には白玉が２個と黒玉が１個，B には白玉が１個と黒玉が４個，入っている．このとき，まず A から玉を一個取り出して B へ入れ（玉の色は見ていない），その後，B から一個の玉を取り出したら白玉だった.

以上の情報をもとにして,「初めに A から B へ移された玉が白玉であった」確率を計算せよ.（勿論，白玉と黒玉の大きさや手触りは同じ，など適当に仮定して良い.）

科目名　数学演習 II　　**担当教官**　木村 芳文

サブタイトル

対象学年　１年　　**２単位**　**選択**

教科書　特になし.
参考書　特になし.

予備知識

特に仮定しない.

講義内容

前期に引き続き１年生に対する少人数クラスの演習を今期も担当した．１年生の講義を考えた場合，微積分は無限の考え方をどのように教えるかが難しく，多変数を含めるとサブジェクトも多い．そこで，講義の様子，理解度を学生からモニターしつつ多変数の微積分の内容について，ある時は講義のの補足，またある時は別の角度からの考察となるように問題を作成した．多変数関数は２変数関数で代表させ，それを $z = f(x, y)$ と陽関数として定義し，その幾何学的な意味を丹念に説明した後，その拡張として陰関数の説明に入った．

具体的な演習内容は以下の通りである．：

1. ２変数関数の連続性
   - ２変数関数の幾何学的意味
   - ２変数関数の連続性（一変数関数との違い）
2. ２変数関数の微分
   - 偏導関数の幾何学的意味
   - 偏微分可能性と全微分
   - 勾配ベクトル
3. ２変数関数の Taylor 展開
   - 接平面の導入（平面の方程式，法線ベクトル，ベクトル積，行列式で表される図形）
   - 方向微分と勾配ベクトルの幾何学的意味
4. ２変数関数の極大，極小
   - 臨界点の分類
   - 条件付き極値の問題（Lagrange の未定乗数法）
5. 多重積分
   - 面積，体積

- 曲面上の領域の面積
- ガウス積分

このうち接平面の導入に関してベクトルの１次独立性の問題を小森 靖助手に２回担当して頂いた.

講義の感想

演習の開始時に非常に畏縮し数学に対して恐怖心さえ感じている学生が何人かいた．その恐怖心を取り除くことから始め，自由な雰囲気をつくるよう努めた．彼等は物を考える能力はある程度あると思う．問題なのは考えるくせを取り除いてしまったり，ガチガチに固定した無理な考えを押し付けている教育だと思う．この点を早急に改善しないと我々の教育の負担はすぐさま無限大に発散してしまうであろう.

科目名　数学演習 II　　**担当教官**　谷川 好男

サブタイトル

対象学年　**１年**　　**２単位**　**選択**

教科書　なし
参考書　なし

予備知識

特に仮定しない.

講義内容

１年生の線形代数と微積分の演習をおおむね講義に沿って行った. 毎回問題を用意し, それを解くことで授業の助けとなるようにした. 主な内容は以下の通り：

線形代数では

1. ベクトル空間や部分空間の概念
2. 次元公式
3. 固有値, 固有ベクトル
4. 対角化可能性

微積分では

1. １変数の微積分の復習
2. 偏微分, 合成関数の偏微分
3. ２変数関数の極値問題
4. 重積分, 累次積分
5. 重積分の変数変換

等である.

講義の感想

出席している学生はたいへん意欲的で, 出されている問題及びそれ以外の問題についても多くの質問があった. こういった小人数の, セミナーのような授業は意味のあることだとおもう. 私自身の反省点としてもう少しじっくり対応できればよかったと思っている.

科目名　数学演習 II　　**担当教官**　佐藤 猛

サブタイトル

対象学年　１年　　**2 単位**　選択

教科書
参考書

予備知識

なし

講義内容

合計で 37 問出題した．ただし小問に分かれた問題があるので実際は 37 問より多い．

配布した問題プリントの表題は以下の通り：

行列の階数，テイラーの定理

論理の初歩，とくに否定の作り方

ϵ-δ 論法の復習，逆行列

偏微分，行列式

偏微分の続き，基底の変換

極値，行列の固有値

極値，行列の固有値 その 2

重積分，計量ベクトル空間

変数変換と重積分，行列についての雑問

講義の感想

科目名　　数学演習 II　　　　**担当教官**　千代延 大造

サブタイトル

対象学年　　１年　　　　**２単位**　　選択

教科書　特になし.
参考書　特になし.

予備知識

特に仮定しない.

講義内容

数学基礎 III（担当 納谷先生）および数学基礎 IV（担当 梅村先生）の講義の内容を確実に取得することを助ける目的で演習を行った．したがって，両先生から講義の内容を毎週知らせていただき，それに基づいて問題を作成した．数学基礎 III のほうは多変数（実際には２変数）の微分法，数学基礎 IV のほうは部分空間，Ker, Im. 次元定理が話題の中心になった．実際には 1 回の演習で解く問題は多くて２問，たいていは１問で，基本的，典型的かつ最重要と思われる問題を選び，皆で解くという形で演習をすすめた.

講義の感想

数学基礎 III，数学基礎 IV において多くの演習問題が提出されており，しかも TA を使ってきめ細かい教育が行われていたため，この演習を意義あるものたらしめるためには何かより新しい発想，工夫が必要か，と終わってから反省した.

科目名　ベクトル解析　　**担当教官**　服部 哲弥

サブタイトル

対象学年　２年　　**４単位**　**必修**

教科書
参考書　http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hattori に掲載の講義ノート.

予備知識

２年前期までの必修科目を既知とする．特に以下の基礎事項を用いる．リーマン積分（１変数，多変数），多変数関数の微分（連続性，偏微分，テーラーの定理），関数列の収束（各点収束，一様収束），線型代数（線型空間，行列のランク），集合と位相（開集合，閉集合，連結，コンパクト）．

講義内容

- 平面上のベクトル解析（平面ベクトル場，線積分，grad とポテンシャル，rot とグリーンの定理，div とガウスの定理，座標変換）
- 空間上のベクトル解析（空間における grad, div, rot，曲面と面積分，ガウスの定理，グリーンの定理，ストークスの定理）

講義の感想

1. 88 名中 6 名とはいえ，数理学科学部生以外の多様な方々(多元 (昼夜)，聴講生，物理学科，工学部，工学系研究科，他大学 (多元進学予定)) が聴講希望してくれたことが印象的だった．成績は多様だったが，全員合格点であり，数理学科過年度生より成績良好であった．なお，２年生は概ね成績良好であった．
2. 講義に関しては線積分や面積分も過去に習ってきた積分であるということを強調して，１年生の数学基礎とのつながりを重視した．実際，学生から，１年の物理学科の類似科目の「ノリ」で理解した気になっている学生が多いと指摘があったので，あやふやな直感的意味を追うよりも堅実に微分積分学に戻ることを強調したのは正しかったと思う．
3. 多元所有のプラニメータを実際に学生諸君に使ってもらった．当日前半の講義の時間に理論を説明して，後半演習時間に皆にやってもらったが，３割くらいの学生が関心を示してくれただろうか．面白い図形を測ったケースは殆どなかったが，８の字状に測って０になった，おかしい，と言う人がいて，間違ってないことを説明して納得してもらうなど，熱心な人にはよいきっかけになったと思う．

参考資料

期末試験　2002.01.22

1．　次の式で定義される $\mathbb{R}^2$ 上の (2 次元) ベクトル場 $\vec{V}$ が勾配ベクトル場であることを証明せよ.

$$\vec{V}(x,y) = (2f(x,y), f(x,y)),\quad \text{ただし}\quad f(x,y) = \frac{e^{2x+y}}{e^{4x+2y}+1}.$$

2．　放物線 $y = x^2 - 3x + 2$ に沿って点 $(1,0)$ から点 $(0,2)$ までの曲線を C とおくとき，問 1 のベクトル場 $\vec{V}$ に対して線積分 $\displaystyle\int_C \vec{V}(\vec{u})\cdot d\vec{u}$ を計算せよ.

3．　対応

$$(s,t) \mapsto ((2 + t\cos\frac{s}{2})\ \sin s,\ (2 + t\cos\frac{s}{2})\ \cos s,\ t\sin\frac{s}{2})$$

を定義域 $U_1 = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < s < \pi,\ |t| < 1\}$ で考えたものを $\varphi_1 :\ U_1 \to \mathbb{R}^3$，定義域 $U_2 = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2}\pi < s < \frac{5}{2}\pi,\ |t| < 1\}$ で考えたものを $\varphi_2 :\ U_2 \to \mathbb{R}^3$，とし，パラメータ系 $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ が定める 3 次元空間内の曲面 (メビウスの帯) を S とおく．S は向き付け可能か？即ち，$\vec{n} :\ S \to \mathbb{R}^3$ なる連続写像で,

$$|\vec{n}(\varphi_i(s,t))| = \left| \frac{\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial s} \times \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial t}}{\left\| \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial s} \times \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial t} \right\|}(s,t) \right|,\quad (s,t) \in U_i,\quad i = 1, 2,$$

を満たすものはあるか？理由をつけて答えよ.

4．　3 次元空間内の曲面 $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + y^2 + z = 1,\ z > -3\}$ と 3 次元ベクトル場 $\vec{V}(x,y,z) = (3yz + 7y + x, y, z + 3)$ に対して面積分 $\displaystyle\int_S \vec{V}\cdot\vec{n}dS$ を計算せよ. ($\vec{n}$ は単位法ベクトル.)

科目名　　**関数論**　　**担当教官**　**青本 和彦**

サブタイトル

対象学年　　**２年**　　**４単位**　　**必修**

教科書
参考書

予備知識

講義内容

前期関数論の復習をかねて基礎的なところから始めた.

- 正則（解析）関数の定義，その基本性質，Cauchy-Riemann の関係式，陰関数の定理
- 解析関数の構成法 (1)：　Taylor（ベキ）級数，収束半径，収束域，Cauchy-Hadamard の公式，ベキ級数と正則関数，ベキ級数で表される初等関数，正則でない複素関数
- 連結集合と領域の定義，弧状連結性
- 解析関数の構成法 (2)：　複素積分の定義と基本性質，Gauss-Green の公式，正則関数の原始関数，Cauchy の積分定理，Morera の定理，初等正則関数（多項式，有理関数，指数関数，対数関数，２項関数，３角関数など），正則関数の四則演算，正則関数の合成関数，正則関数の逆関数
- 偏角の公式と曲線の回転数
- 初等関数の解析接続と Riemann 面
- １次分数変換：　鏡映，直線と円，等角写像の定義，１次分数変換の一般形
- 有理系関数：　Laurent 展開，極，有理形関数の定義，零点と極の位数，有理関数でない有理形関数の例

講義の感想

参考資料

問題　2002.01.09

問 1.

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

(iii) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}=\frac{\pi}{2}$

(iv) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\cos x^2=\int_{-\infty}^{\infty}\sin x^2=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

(v) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\sin ax}{e^{2\pi x}-1}dx=\frac{1}{4}\frac{e^a+1}{e^a-1}-\frac{1}{2a}\qquad a>0$

(vi) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}=\pi\csc a\pi$

問 2.
$z\in\mathbf{C}-(-\infty,0]$ のとき，$\displaystyle\log z=\int_1^z\frac{d\zeta}{\zeta}$ と書けることを示せ．

問 3. 関数 $\sqrt{1-z^2}$ は 領域 $\mathbf{C}-[-1,1]$ で正則であることを示せ．$\displaystyle\sqrt{\frac{z+1}{1-z}}$ はどうか？

問 4. $f(w),g(z)$ が正則で，かつ合成関数 $f(g(z))$ が正則のとき，置換積分の公式

$$\int_a^b f(g(z))g'(z)dz=\int_{g(a)}^{g(b)}f(w)dw$$

が成り立つことを示せ．

問 5. 問 2，問 4 より $\log(z_1z_2)=\log z_1+\log z_2$ を示せ．この等式はどのような範囲の z_1,z_2 で成り立つと思うか？

問 6. $w=\tan z$ より $\displaystyle z=\frac{1}{2i}\log\left(\frac{1+iw}{1-iw}\right)$ が成り立つことを示せ．またこれらの関数はどこで定義されているか？

問 7. $w=\sin z$ より $\displaystyle z=\int_0^w\frac{1}{\sqrt{1-w^2}}dw$ が成り立つことを示せ．またこれらの関数はどこで定義されているか？

問 8. $w=\cos z$ より $\displaystyle z=-\int_0^w\frac{1}{\sqrt{1-w^2}}dw+\frac{\pi}{2}$ が成り立つことを示せ．またこれらの関数はどこで定義されているか？

問 9. $ze^w=w$ より w を z の原点でのベキ級数として表せ．まず始めの 4 ないし 5 項まで求めて一般項を予想せよ．

問 10. $(a)_n=a(a+1)\cdots(a+n-1)$ とおくとき，ベキ級数

$$F(z)=\sum_0^\infty\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}z^n$$

の収束半径は 1 であることを示せ．ただし $a,b,c\neq 0,-1,-2,\cdots$ とする．$y=F(z)$ は微分方程式

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2}+\{c-(a+b+1)z\}\frac{dy}{dz}-aby=0$$

を満たす．これを示せ．($F(z)$ をオイラー・ガウスの超幾何関数と言う）

テスト　2002.01.22

問 1.　複素数平面に次のパラメータ表示を持つ折れ線 L を考える．

$$z = \begin{cases} 2t & 0 \le t \le \dfrac{1}{2}, \\ 1 + 2(t - \dfrac{1}{2})i & \dfrac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \tag{1.1}$$

この折れ線を図示せよ．

問 2.　w をそれぞれ

(i) $w = e^{\frac{\pi i}{4}} z$,　(ii) $w = z^2$,　(iii) $w = \dfrac{1}{2-z}$

とおくとき，折れ線 L の w 平面での像曲線を求め，それを図示せよ．

問 3.　次の積分をそれぞれ計算せよ．

(i) $\displaystyle\int_L z dz$,　(ii) $\displaystyle\int_L \frac{1}{2-z} dz$,　(iii) $\displaystyle\int_L \bar{z} dz$

問 4.　複素数平面の 2 点 $A : z = -2 - i$ と $B : z = 2 + i$ が与えられているとき，

(i) $\angle APB$ が $\dfrac{\pi}{3}$ または $\dfrac{2\pi}{3}$ に等しい円 Γ の複素数表示による方程式を求めよ．

(ii) Γ を実軸に写す１次分数変換を求めよ．

問 5.

２次方程式 $2z^2 + z + 1 = 0$ の２根を α, β $(Im(\alpha) < Im(\beta))$ とする．

(i) $\displaystyle\lim_{z \to \alpha} \frac{2z^2 + z + 1}{z - \alpha}$ を求めよ．

σ_1 と σ_2 をそれぞれ等式 $|z - \alpha| = 1$, $|z - \alpha| = 2$ で定義される円とする．

(ii) 積分 $\displaystyle\int_{\sigma_1} \frac{z dz}{2z^2 + z + 1}$ を求めよ．

(iii) 積分 $\displaystyle\int_{\sigma_2} \frac{z dz}{2z^2 + z + 1}$ を求めよ．

科目名　**代数学序論**　　**担当教官**　**金銅 誠之**

サブタイトル　群論

対象学年　**２年**　　**４単位**　**必修**

教科書
参考書　松坂和夫，代数系入門，岩波

予備知識

線形代数の初歩

講義内容

具体的な講義内容は以下の通り：

1. 群の概念（３回）
   - 例（$\mathbf{Z}, \mathbf{R}^*, GL(n, \mathbf{R})$, ベクトル空間）
   - 群の定義
   - 簡単な群の性質
   - 部分群
   - 巡回部分群
   - 生成元
   - 対象群（互換の積への分解の偶奇性等）
   - その他の例（二面体群，正多面体群）
   - 群の誕生（ガロア）
2. 剰余類と剰余群（３回）
   - 同値関係
   - 剰余類
   - Lagrange の定理
   - 正規部分群
   - 準同型定理
   - 巡回群再考
3. 共役類（１回）
   - 共役類とその例（Jordan 標準形）
   - 類等式

- 対称群の共役類

4. 直積（１回）
    - 有限個の群の直積
    - 部分群の直積
5. 群の集合への作用（１．５回）
    - 作用，軌道，固定部分群とそれらの例
6. シローの定理とその応用（２回）
7. 交代群の単純性（０．５回）

講義の感想

試験の答案に感想，要望を書いてもらったので参考までにそれを列挙する（全てではない）:

- 講義の内容，程度は丁度良い.
- 板書は読みやすいが，早い.
- 黒板を消す順番を考慮してほしい.
- 演習があったのはよかった.
- 演習は解答を写すのが精一杯だった.
- 演習で確認問題のような問題を多く出してほしかった.
- 初めて解く問題はどうやれば解けるか分からない.
- 群は，線形代数や解析系の講義とくらべ，新しい概念であり最初とまどった.

講義ノート，演習問題，試験問題は研究交流室にファイルしてあります.

参考資料

中間試験　2001.12.06

[1]　G, G' を群とし $f: G \to G'$ を準同型写像とする。もし $Ker(f) = \{e\}$ ならば f は単射であることを示せ。ただし e は G の単位元とする。

[2]　(1)　３次対称群 S_3 の部分群を列挙し、列挙したものが全てであることの理由を述べよ。

(2)　(1) で求めた部分群のうち正規部分群であるものはどれか、理由をつけて答えよ。

[3]　(1) θ を実数とし $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ と置く。このとき

$$G = \{A^m : m \in \mathbf{Z}\}$$

は行列の積に関して $GL(2, \mathbf{R})$ の部分群となることを示せ。

(2)　n を自然数とする。　(1) において、$\theta = \dfrac{2\pi}{n}$ とする。このとき (1) で定義した群 G は位数 n の巡回群であることを示せ。

[4] 加法群 $\mathbf{Q}$ とその部分群 $\mathbf{Z}$ を考える。剰余群 $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ のすべての元の位数は有限であることを示せ。

最後に、講義に関する感想（何を話しているかわからない、板書が早すぎる、やさしすぎる、演習問題が難しすぎる、やさしすぎる、演習のやり方等...) をできるだけ具体的に書いてください。今後の授業の参考にします。

期末試験　2002.02.07

[1] 二つの群 $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ は共に位数４のアーベル群であるが、同型ではない。同型でない理由を述べよ。

[2] ３次対称群 S_3 の共役類について知っていることを述べよ。

[3] （い）写像 $f : \mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ を

$$f(n + 6\mathbf{Z}) = n + 2\mathbf{Z}$$

で定めるとき、well-defined であることを示せ。

（ろ）f は準同型写像であることを示せ。

（は）f の核 (Kernel) を求めよ。

（に）f に準同型定理を適応すると何が結論されるか述べよ。

[4] 次の２題 (A), (B) のうち１題を選んで答えよ。

（A）有限群 G が有限集合 X に作用しているとする。 $|G| = p^a$（ p: 素数、$a \geq 1$ ）、$(|X|, p) = 1$（X の位数と p は互いに素）とする。このとき任意の G の元 g にたいし $g \cdot x = x$ となる X の元 x が存在することを示せ。

（B）S^1 を単位円とする：$S^1 = \{e^{2\pi i\theta} | \theta \in \mathbf{R}\}$. 加法群 $\mathbf{R}$ の S^1 への作用 $\mathbf{R} \times S^1 \to S^1$ を

$$(r, e^{2\pi i\theta}) \to e^{2\pi i(\theta + r)}$$

で定義する。

(i) この写像は作用になっていることを示せ。

(ii) S^1 の点 $1 = e^0$ の固定部分群を求めよ。

(iii) 全単射

$$\mathbf{R}/\mathbf{Z} \to S^1$$

が存在することを示せ。

最後に、講義に関する率直な感想（何を話しているかわからない、板書が早すぎる、やさしすぎる、演習問題が難しすぎる、やさしすぎる、演習のやり方等...) をできるだけ具体的に書いてください。今後の授業の参考にします。

合否結果は２月１２日（火）の正午に掲示予定（理１－３階、研究室 A ４４９）であるので必ず見ること。また２月１２日、１２時－１３時の間、答案を返却するので研究室（A ４４９）まで取りに来ること。

演習問題１　2001.10.11

[1] $\mathbf{Q}$ が乗法に関して群とならない理由を述べよ。

[2] $\mathbf{Z} - \{0\}$ が乗法に関して群とならない理由を述べよ。

[3] G を群とし, $a, b \in G$ とする。
 (i) $aa = a$ ならば $a = e$ を示せ。
 (ii) $ab = e$ ならば $a = b^{-1}, b = a^{-1}$ を示せ。

[4] G を群とし、G の全ての元 a が $a^2 = e$ を満たすとする。このとき G はアーベル群であることを示せ。

[5] G を群とし $a \in G$ を一つ固定する。G から G への次の３つの写像は全て全単射であることを示せ：
 (i) $f(x) = x^{-1}$;　(ii) $g(x) = ax$;　(iii) $h(x) = axa^{-1}$.

[6] 群 G の部分集合 H に対し次は同値であることを示せ：
 (i) H は G の部分群.
 (ii) 任意の $a, b \in H$ に対し、$ab^{-1} \in H$.

[7] 群 G の部分群 H, K に対し、$H \cap K$ も G の 部分群となることを示せ。

[8] $\mathbf{Z}$ の部分群 $m\mathbf{Z}$, $n\mathbf{Z}$ (m, n は正の整数) に対し $m\mathbf{Z} \cap n\mathbf{Z}$ はどのような集合か？

[9] (i) $U(n) = \{A \in GL(n, \mathbf{C}) : A^*A = AA^*\}$ は $GL(n, \mathbf{C})$ の部分群であることを示せ。
 (ii) $O(n) = \{A \in GL(n, \mathbf{R}) : AA = A^tA\}$ は $GL(n, \mathbf{R})$ の部分群であることを示せ。
($U(n)$ をユニタリ群、$O(n)$ を直行群と呼ぶ)

[10] G を群、H をその部分群とし、 $a \in G$ とする。このとき $aHa^{-1} = \{aha^{-1} : h \in H\}$ と置くと aHa^{-1} は G の部分群となることを示せ（ aHa^{-1} を H の共役 (conjugate) と呼ぶ)。

[11] G を群とし $Z(G) = \{a \in G : ax = xa \quad \text{for} \quad \text{any} \quad x \in G\}$ と置く（$Z(G)$ を G の中心 (center) という)。
 (i) $Z(G)$ は G の部分群であることを示せ。
 (ii) G が可換であることと $Z(G) = G$ は同値であることを示せ。

[12] G を群、$a, b \in G$ が $ab = ba$ を満たすとする。もし $\mid a \mid = m, \mid b \mid = n$ で $(m, n) = 1$ とする。このとき $\mid ab \mid = mn$ を示せ。

[13] 次の置換を互換の積で表せ：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 1 & 3 & 2 & 8 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

[13] 巡回置換 $(i_1 i_2 ... i_{n-1} i_n)$ の逆元は $(i_n i_{n-1} ... i_2 i_1)$ であることを示せ。

[14] $(ij) = (1i)(1j)(1i)$, $(ijk) = (kj)(ki)$ を確かめよ。ただし $i \neq j, k$, $j \neq k$ とする。

[15] n 次対称群 S_n は $n-1$ 個の互換 $(12), (13), ..., (1n)$ で生成されることを示せ。

[16] n 次交代群 A_n は長さ３の巡回置換によって生成されることを示せ。

演習問題２　2001.10.18

[1] G ($\neq \{e\}$) を自明な部分群しか持たない群とする。このとき G は素数位数の巡回群であることを示せ。

[2] S_3 の元を列挙し偶置換、奇置換に分類せよ。

[3] S_3 の乗積表を作れ。

[4] n 次正方行列の基本変形と $GL(n, \mathbf{R})$ の生成元の関係を論ぜよ。

[5] G をアーベル群とする。$H = \{x \in G : | x | < \infty\}$ は G の部分群であることを示せ。

[6] （正方形でない）長方形の対称の群の元を列挙せよ。また頂点の集合を $\{1, 2, 3, 4\}$ と同一視し S_4 の部分群として実現せよ。

[7] 次の集合 X 上の関係 $\sim$ は同値関係かどうか理由をつけて答えよ：

(i) $X = M(n, \mathbf{R})$、$x, y \in X$, $x \sim y \iff y$ は x に基本変形を施して得られる

(ii) $X = \mathbf{Z}$, $x \sim y \iff x$ は y の倍数

(iii) $X = \mathbf{R}$, $x \sim y \iff x = -y$

(iv) $X = \mathbf{R}$, $x \sim y \iff x < y$

(v) X は名古屋大学の学生全体、$x \sim y \iff x$ と y は知り合い

[8] 有限群 G の部分群 H, K で、$H \subset K$ とするとき

$$[G : H] = [G : K][K : H]$$

を示せ。

[9] S_3 の部分群 $H = \{1, (12)\}$ に関する左剰余類分解を求めよ。

[10] G を群、S を G の部分集合とする。

$$N_G(S) = \{x \in G : xSx^{-1} = S\}$$

と置くとき、 $N_G(S)$ は G の部分群であることを示せ（$N_G(S)$ を S の正規化群と呼ぶ)。

[11] 次の対応は $G/N_G(S)$ と S の共役全体との間の１対１対応であることを示せ：

$$xN_G(S) \longleftrightarrow xSx^{-1}$$

演習問題３　2001.11.08

[1] G を群、H をその部分群とし、

$$G = \sum_{x \in T} xH$$

を左剰余類分解とする。このとき
$$G = \sum_{x \in T} Hx^{-1}$$
は右剰余類分解であることを示せ。

[2] $SL(n, \mathbf{C})$ は $GL(n, \mathbf{C})$ の正規部分群であることを示せ。

[3] A_n は S_n の正規部分群であることを示せ。

[4] $Z_n = \{aE_n : a \in \mathbf{C}\}$ は $GL(n, \mathbf{R})$ の正規部分群であることを示せ。ここで E_n は単位行列とする。（剰余群 $GL(n, \mathbf{C})/Z_n$ を $PGL(n, \mathbf{C})$ と表し、$(n-1)$ 次射影線形群と呼ぶ）

[5] G を群、H をその部分群とする。このとき
$$\bigcap_{x \in G} xHx^{-1}$$
は G の正規部分群であることを示せ。

[6] 置換の符合
$$sign : S_n \to \{\pm 1\}$$
は準同型写像を与えることを確かめよ。ここで $\{\pm 1\}$ は乗法に関する位数２の群であることに注意せよ。これより同型 $S_n/A_n \cong \{\pm 1\}$ が得られることを示せ。

[7] 加法群 $\mathbf{R}$ は乗法群 $\mathbf{R}_{>0} = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$ と同型であることを示せ。

[8] 加法群 $\mathbf{R}$ とその部分群 $\mathbf{Z}$ にたいし
$$\mathbf{R}/\mathbf{Z} \cong T = \{z \in \mathbf{C} : \mid z \mid = 1\}$$
を示せ。ただし T は乗法群 $\mathbf{C} - \{0\}$ の部分群と考える。

[9] （１）群 G に対し
$$Aut(G) = \{f \mid f : G \to G \quad \text{は同型写像}\}$$
と置く。このとき $Aut(G)$ は写像の合成により群となることを示せ。

（２）$a \in G$ に対し
$$f_a : G \to G, \quad f_a(x) = axa^{-1}$$
は同型写像であることを示せ。また
$$Inn(G) = \{f_a : a \in G\}$$
は $Aut(G)$ の正規部分群となることを示せ。

（３）$Inn(G) \cong G/Z(G)$ を示せ。ただし $Z(G)$ は G の中心とする（演習問題１を見よ）。
$Aut(G), Inn(G)$ はそれぞれ G の自己同型群、内部自己同型群と呼ばれる。

演習問題４　2001.11.22

[1] (i) G を群、H, N をその部分群とし、$N \subset H$ で, N は G の正規部分群とする。このとき N は H の正規部分群であることを示せ。

(ii) G を群、H, N をその部分群とし、N は G の正規部分群とする。このとき $N \cap H$ は H の正規部分群であることを示せ。

[2] G を群、H, N をその有限部分群で $(\mid H \mid, \mid N \mid) = 1$ とする（H と N の位数は互いに素)。このとき $H \cap N = \{e\}$ を示せ。

[3] $Aut(\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ を示せ。

[4] $n > 1$ を整数とし

$$(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^* = \{\bar{x} \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} : (x, n) = 1\}$$

と置く。今、$\bar{x}\bar{y} = \bar{xy}$ で乗法を定義することで、$(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$ は位数 $\varphi(n)$ のアーベル群となることを示せ。ただし $\varphi(n)$ は n と互いに素な n 以下の正の整数の個数とする（φ はオイラー関数と呼ばれる)。

[5] $n > 0$ を整数、a を n と互いに素な整数とする。このとき

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

を示せ。特に $n = p$ (素数）ならば

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

が成り立つことに注意せよ（これを Fermat の小定理という)。

[6] G を群、H をその部分群とする。このとき次は同値であることを示せ：

(i) H は G の正規部分群である。

(ii) H は G のいくつかの共役類の和集合である。

[7] S_4 の類等式を求めよ。

[8] S_4 の正規部分群を全て求めよ。

[9] G を群とする。 $x, y \in G$ に対し

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$$

と置き、$[x, y]$ を交換子と呼ぶ。交換子全体で生成される G の部分群を $[G, G]$ と表す:

$$[G, G] =< \{[x, y] : x, y \in G\} >$$

(i) x と y が可換であることと $[x, y] = e$ は同値であることを示せ。特に G がアーベル群であることと $[G, G] = \{e\}$ は同値であることを示せ。

(ii) $[G, G]$ は G の正規部分群であることを示せ。

(iii) 剰余群 $G/[G, G]$ はアーベル群であることを示せ。

演習問題５　2001.12.13

[1] (1) S_n において長さ r の巡回置換の個数を求めよ。

(2) S_n において長さ r の巡回置換 $(12...r)$ の中心化群は

$$\{(12...r)^i\sigma : i = 0, 1, ..., r-1, \quad \sigma \in S_{n-r}\}$$

であることを示せ。ここで S_{n-r} は文字 $\{r-1,...,n\}$ 上の置換群とする。

(3) S_n において、$1^{a_1}2^{a_2}\cdots n^{a_n}$ 型の共役類の元の個数は

$$\frac{n!}{1^{a_1}a_1!2^{a_2}a_2!\cdots n^{a_n}a_n!}$$

で与えられることを示せ。

[2] 正二面体群 D_8 の共役類を求めよ。

[3] 3 次対称群 S_3 は $<(12)>$ と $<(123)>$ の直積か？

[4] 演習問題２の [6] の群は $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ に同型であることを示せ。

[5] $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ の部分群を列挙せよ。

[6] p,q を互いに素な素数とする。このとき $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$ の部分群を列挙せよ。

[7] $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ は $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ と同型か？

[8] m,n を互いに素な正の整数とする。このとき

$$\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}\cong\mathbf{Z}/mn\mathbf{Z}$$

を示せ。

[9] $\mathbf{R}_{>0}=\{x\in\mathbf{R}:x>0\}$ とする。このとき乗法群の間の同型写像

$$\mathbf{R}^*\cong\mathbf{R}_{>0}\times\{\pm1\}$$

を与え、同型であることを示せ。

[10] $T=\{z\in\mathbf{C}:\mid z\mid=1\}$ とする。このとき乗法群の間の同型写像

$$\mathbf{C}^*\cong\mathbf{R}_{>0}\times T$$

を与え、同型であることを示せ。

演習問題６　2001.12.20

[1] 対称群 S_n は $\Omega=\{1,...,n\}$ に置換として作用していることを確かめよ。この作用は transitive であることも確かめよ。文字１の固定部分群は何か、求めよ。

[2]　正二面体群 D_n は正 n 角形の頂点の集合に作用することを確かめよ。この作用は transitive か？一つの頂点の固定部分群は何か？

[3] G を群とする。G は G に左からの積で作用することを確かめよ。この作用は transitive か？また一点 $x\in G$ の固定部分群は何か？

[4] G は G に $g\cdot x=gxg^{-1}$ （共役）で作用することを確かめよ。この作用は transitive か？一点 $x\in G$ の固定部分群は何か？

[5] 群 G が集合 X に左から作用しているとする。$g\in G,\,x\in X$ に対し、

$$gG_xg^{-1}=G_{g\cdot x}$$

を示せ。

[6] $GL(n,\mathbf{R})$ の $\mathbf{R}^n$ への作用を $A\cdot x = Ax$ ($A \in GL(n,\mathbf{R})$, $x \in \mathbf{R}^n$ (列ヴェクトル)）で定める。この作用は transitive か？

[7] [6] と同様に $GL(n,\mathbf{R})$ は $\mathbf{R}^n - \{0\}$ に作用する。この作用は transitive か？

[8]　加法群 $\mathbf{R}^n$ は $\mathbf{R}^n$ に平行移動

$$g\cdot x = x+g, \quad g \in \mathbf{R}^n$$

で作用することを確かめよ。この作用は transitive か？

[9] 直行群 $O(n) = \{A \in GL(n,\mathbf{R}) : AA = AA = E_n\}$ は [6] の作用を用いることで $n-1$ 次球面 $S^{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n :< x, x >= 1\}$ に作用することを示せ。この作用は transitive か？　ただし２つの列ベクトル $x, y \in \mathbf{R}^n$ に対し、$< x, y >= {}^t xy$ (標準的内積）とする。

[10] $\mathbf{P}^1 = \{l \subset \mathbf{R}^2 : l$ は原点を通る直線 $\}$ とする。$GL(2,\mathbf{R})$ は

$$A\cdot l = \{Ax : x \in l\},\ (A \in GL(2,\mathbf{R}))$$

により $\mathbf{P}^1$ に作用することを確かめよ。この作用は transitive か？　その核は何か？

注）$\mathbf{P}^1$ を実射影直線と呼ぶ。一般に、n 次元実（複素）ベクトル空間の１次元部分空間の全体から成る集合を $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ ($\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$) と表し $n-1$ 次元実（複素）射影空間と呼ぶ。

[11] $H^+ = \{z \in \mathbf{C} : Im(z) > 0\}$, $SL(2,\mathbf{R}) = \{A \in GL(n,\mathbf{R}) : det(A) = 1\}$ とする。$SL(2,\mathbf{R})$ の H^+ への作用を

$$A\cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$$

($A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbf{R})$) で定めるとき、作用になっていることを確かめよ。この作用は transitive か？ $\sqrt{-1}$ の固定部分群はなにか？　(H^+ を上半平面と呼ぶ)

[12] S_4 の部分群 $K = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ は正規部分群であった（演習 No.4, 8)。また K はアーベル群でもある。

(i) S_4 は K に $g\cdot x = gxg^{-1}$, $g \in G$, $x \in K$ によって作用することを示せ。

(ii) 剰余群 S_4/K は S_3 に同型であることを示せ。

演習問題７　2002.01.10

[1] G を群、H をその部分群とする。$x \in G$ に対し、xH は G の部分群か？

[2] [1] と同じ仮定の下で、xHx^{-1} は G の部分群であることを示せ。

[3] (i) G を群、H をその部分群とする。$g \in G$, $xH \in G/H$ にたいし、$g\cdot xH = gxH$ と定義することで、G は G/H に可移に作用することを確かめよ。

(ii) xH の固定部分群は何か？ 作用の核は何か答えよ。

[4] 位数８の正二面体群 D_4 を考える。a を正方形の重心を中心とする位数４の回転、b を一つの対称軸に関する折り返しとすると D_4 は a, b で生成されており、

$$a^4 = b^2 = 1, bab = a^3$$

が成り立った。

(i) a^2 は D_4 の中心に含まれ、従って $< a^2 >$ は D_4 の正規部分群であることを確かめよ。

(ii) 剰余群 $D_4 / < a^2 >$ を求めよ。

[5] (i)

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix},$$

$$j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

と置く。行列の積に関して

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, k = ij = -ji, j = ki = -ik, i = jk = -kj$$

が成り立ち、$\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ は乗法に関して位数８の非可換群となることを確かめよ。この群を Q_8 と表し、四元数群と呼ぶ。

(ii) Q_8 は 正二面体群 D_4 とは同型でないことを示せ。

(iii) 剰余群 $Q_8 / < -1 >$ を求めよ。

[6] 位数１５の群は巡回群であることを示せ。

[7] 位数９９の群はアーベル群であることを示せ。

科目名　　　**解析学要論**　　　　　　　　　　　**担当教官**　**石毛 和弘**

サブタイトル　微分積分学の基本的性質

対象学年　　　**２年**　　　　　　　　　　　　　**４単位**　　**必修**

教科書　なし
参考書　高木貞治，解析概論，岩波書店
J. ヨスト，小谷元子訳，ポストモダン解析学，シュプリンガー・フェアラーク東京
吹田信之・新保経彦，理工系の微積分学，学術図書
溝畑茂，解析学小景，岩波全書

予備知識

1 年次の必修科目（微分積分学，線形代数学）の基本的事項（数学基礎 I〜 IV）及び 2 年次前期の解析学序論

講義内容

講義の大半は，級数の収束・発散，関数列の収束，特に一様収束について理解することに費やされた．また，一様収束を通して，極限と積分の交換など様々な極限操作について講義した．また，陰関数定理，ラグランジュの未定乗数法等を説明し，多変数関数の性質について講義した．

具体的な講義内容は以下の通り：

1. 級数と関数列
    - 級数.
    - 正項級数.
    - 絶対収束と条件収束.
    - 関数列と一様収束.
    - 整級数.
    - 関数列と一様収束 II (もっと勉強したい人のために)
2. 距離空間の完備性と完備化
3. 偏微分とその応用
    - 陰関数定理.
    - 逆写像定理.
    - 極値と条件付き極値.

「関数列と一様収束 II」においては，広義一様収束，一様収束を通して連続関数からなる距離空間が完備になること（それまでの講義の復習も兼ねる），さらにはアスコリ・アルツェラの定理について説明した．また,「距離空間の完備性と完備化」は，他の講義で扱うのが適当である可能性もあったが，他の２年生担当教官との話合いの末，本講義で急遽，扱うことにした．

講義の感想

今回用いた単位取得の基準は，理解度の高い学生からそうでない学生に対して，全般的に教育効果が高いことを感じた.（アンケートにもそのような反応が多かった.）しかしながら，教官の負担は多く，これらに対応するには TA をつけることが必要と思われる．確認テストの内容を毎回変えるなどして，丸暗記による試験の合格を避けたほうが良いのではないか，という学生の意見も幾つかあったが，これに対処するには TA などの援助が必要であることを痛感した．実際，テスト，採点に追われている日々が続くこともしばしばであったり，長い時間，口頭試問に費やされることもあった．ただし，試験内容を変えないことによって，問題がはっきりし,（他の方法ではがんばれないが）理解しようと努力することができた，という意見も多くあった．講義内容から考えると，極値に関する確認テストを行ったほうが良かったとは思うが，それに対する負担を考えると，複雑な気持ちになってしまう．講義としては，最低限理解すべきことを確認テストで示し，内容としては，そこそこのレベルまでは講義できたと思っている．ただし，講義の最後のほうは，確認テストにとらわれ，講義内容の演習時間が少なくなってしまったのは大きな反省点となってしまった．ただ，わかりやすかったという意見もあったのはうれしかったし，板書が見やすかったという意見が幾つかあったのは，昔に一年生の講義で字が薄かったりして見難いと言われたのを考えると驚いた．最後に，ある学生の意見で，大学生にもなってこんな過保護な教育をしてても良いのでしょうか？というものがあったことも付け加えておく.

参考資料

第一回確認テスト

問１．実数 p をパラメータに持つ正項級数
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$
の収束，発散について調べ，それを証明しなさい.

問２．実数 p, a に対して級数
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^p}$$
を考える.

(1)　絶対収束するための a, p の範囲を求めよ.

(2)　条件収束するための a, p の範囲を求めよ.

問３．区間 $I=[a,b]$ $(a<b)$ 上の関数列 $\{f_n\}$ と関数 f を考える．このとき，

関数列 $\{f_n\}$ が関数 f に I 上一様収束する

ということの定義を述べよ.

問４．区間 $I=[0,1)$ 上の関数列 $\{f_n\}$ と関数 f を考える．ただし
$$f_n(x)=x^n \quad (x\in I), \qquad f(x)=0 \quad (x\in I)$$
とする．このとき，関数列 $\{f_n\}$ は 関数 f に I 上一様収束しないことを，問３で与えた定義に従って証明しなさい.

第二回確認テスト

問１．次の関数列はどのような閉区間 $[a,b]$ $(a,b \in \mathbf{R}, a < b)$ 上で一様収束するのかしないのか，調べなさい．

$$(1) \quad \frac{1}{(1+x^2)^n} \qquad\qquad (2) \quad \sum_{k=1}^{n} xe^{-kx} \quad (0 \le x \le 1)$$

問２．区間 $I = [0,1]$ 上の連続関数の列 $\{f_n\}$ が I 上 f に一様収束するならば，f は I 上の連続関数であることを示しなさい．

期末テスト

問１．区間 $I(\subset \mathbf{R})$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が関数 f に I 上一様収束するとは，

$$(*) \qquad {}^{\forall}\epsilon > 0,\ {}^{\exists}N \in \mathbf{N} \quad \text{s.t.} \quad |f(x) - f_n(x)| < \epsilon \quad ({}^{\forall}x \in I, {}^{\forall}n \ge N)$$

ということである．

(1)　(*) の否定命題を述べよ．

(2)　${}^{\forall}\epsilon > 0,\ {}^{\exists}N \in \mathbf{N}$ s.t.

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon \qquad ({}^{\forall}x \in I, {}^{\forall}m,n \in \mathbf{N},\ m,n \ge N)$$

ならば，区間 I 上のある関数 f に一様収束することを示しなさい．

問２．級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を考える．

(1)　級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束するならば，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ は収束することを示しなさい．

(2)　級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する (絶対収束とは限らない) とする．このとき，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ が必ず収束するならばその証明を，収束しない例があるならばその例をあげなさい．

問３．$\alpha > 0$ に対して，区間 $I = [0,1]$ 上の関数項級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{\alpha} e^{-nx}$$

を考える．この関数項級数はどのような閉区間 $[a,b]$ $(0 \le a < b \le 1)$ において一様収束するのか調べなさい．

問４．円周 $x^2 + y^2 = 6$ 上の関数 $f(x,y) = x^2y^2 - 2xy$ を考える．

(1)　最大値，最小値が存在する理由について述べよ．

(2)　ラグランジュの未定乗数法を用いて，最大値及び最小値を求めなさい．

解答のヒント

(問３のヒント)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{\alpha} e^{-nx}, \qquad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{\alpha} e^{-nx}$$

とおくと，$g(x) \le f(x) \le 2g(x)$ が成立することに注意する．また，g について詳しく一様収束性を調べれば，答えは見えてくるはずである．また，すでに確認テストにおいて，$\alpha = 1$ の場合は調べたはずである．

最後にこの講義について意見があれば遠慮なく述べてください．特に，この講義は単位の認定において，２回の確認テストがパスすれば自動的に単位が取得できることになっています．このようなやり方をとったことによって，理解が深まったのかどうか, 率直な意見を聞かせてください．また，逆に時間がとられ，勉強のさまたげになった，などの意見も貴重と思われますので，遠慮なく言ってください．また，この他，この講義全般に関すること，何でも言って下さっても結構です．今後の参考にさせていただきます．

科目名　数学演習 V・VI　　**担当教官**　梅村 浩

サブタイトル

対象学年　２年　　**計 4 単位　必修**

教科書　特になし
参考書

予備知識

特に仮定しない.

講義内容

各学生の能力に応じて個人指導をおこなった.

具体的には，各学生がどこに自分の問題点があるのか，それを改善するためにはどうしたら良いか，3 週間ごとに計画をたてる．毎週その計画を実行した成果，うまく行かなかった点を報告する．毎週５題程度の問題を解いてくる．その内，一題を黒板で説明し，あと一題を紙面にて提出してもらい文章の書方も含めて添削して返却する．それを清書したものをファイルとして共有する.

具体的には学生たちは，一年生のときに学んだ線形代数の問題，微積分の問題，現在聴講している講義から生ずる演習問題を解いてきた．また，講義の試験問題で解けなかったもの，試験の準備のための問題なども教材とした．大学院入試の基礎問題を解かせた.

論理的な文章を書かせる指導を丁寧におこなった．証明のなかには，不要な文章はないこと．全体の論理構成のなかで，ひとつの文章のしめる位置役割をはっきりと把握させるようにつとめた．また出来上がった証明に推敲を加え，可能な限り簡明にするように指導した.

冬休み期間もこれに沿った勉強を続けるように約束した．この演習が少人数であること，また講義がこれまでと違って非常に丁寧に，手間をかけて行われたれたこともあってかなりの成果があがったものと思われるが．しばらく時間がたって見ないと正確な評価はできないであろう.

講義の感想

レベル分けされていたこともあってか，前期に比べて学生の活気がなかったような気がする．試験の成績が目立たない学生でも実力のある者がいた.

科目名 **数学演習 V・VI** **担当教官** **斎藤 秀司**

サブタイトル

対象学年 **２年** **計 4 単位 必修**

教科書 特になし．
参考書 特になし．

予備知識

特に仮定しない．

講義内容

2 年生向けの数学演習であるが私の受け持ったのは 3,4 年生の未履修者を９人受け持った．数学の知識や能力にかなりのばらつきがあるので，個人別に演習の内容を異なるものにした．おもに線型代数と微積分の初歩を行ったグループと，2 年生の微積分および関数論を重点的に行ったグループに分かれる．

講義の感想

学生の受講態度は熱心であったので気持ちよく講義ができた．

科目名　**数学演習 V・VI**　**担当教官**　**鍜島 康裕**

サブタイトル

対象学年　**２年**　**計 4 単位**　**必修**

教科書
参考書

予備知識

特に仮定しない.

講義内容

１年・２年で学習した（する）数学の復習と，幾つかのトピックをとりあげ，セミナーの様な事を行った.
具体的な講義内容は以下の通り：

1. 線形空間の復習（２回）
    - 基礎的な定義の復習
    - 絶対忘れてはいけない幾つかの概念
    - 有限体について
2. ケーリーハミルトンの定理とジョルダンの標準形（１回程度）
3. 関数論の復習（１回程度）
    - 正則関数
    - べき級数
4. 線形代数（１回）
    - 内積空間
    - 二次形式と直交群について
5. 解析の復習（２回程度）
    - 多変数関数の微積分
    - 留数定理を使った積分
6. 関数論（特に有理型関数）の幾つかの定理（１．５回）
    - ローラン展開
    - ルーシェの定理，代数学の基本定理等
7. 代数（１．５回）
    - 加法群の準同型

- 有理整数環のイデアル

8. 関数論おまけ（１回）

    - 冪級数の収束円の円周上での振る舞い
    - 楕円関数について

講義の感想

全体に少しおとなしかったように感じます．また，分かっていない事を「いいです」と言って逃げない方が良いと思います．分からない所が重要なのだから....

科目名　数学演習 V・VI　　**担当教官**　笹原 康浩

サブタイトル

対象学年　２年　　**計 4 単位**　必修

教科書
参考書

予備知識

特に仮定しない.

講義内容

いままで学んだことを題材にした問題を自分の手で解くことで，理解を深めるとともに解答記述の作法を身につける．開講当初はつぎのような方法で演習をおこなった．問題をプリントにして配布し，全員に一斉に解いてもらう．そのあいだ教官は様子を見ながら巡回し，手が完全にとまっている学生にはどこがわからないのか尋ねながら，適切なアドバイスを与える．この方法で 6 回行なったあと，つぎの方法に切り替えた．学生に興味のある問題や，講義や教科書でわからない問題を持ち寄ってもらう．その問題を解くために必要なことを簡単に復習し，おおまかな筋道を示し，必要ならば簡単になるように問題に変更を加えた上で，全員に解いてもらう．そのあいだ巡回しながら適宜アドバイスを与えるのはいままでと同様である．最初の 6 回に出題した問題は集合論から題材をとり，基本的な集合演算や実数体の部分集合などをあつかった．演習方法の変更後に学生が持ってきた問題は，大半が複素関数論を題材にしたものだった．

講義の感想

変更後の演習の方法では，学生に持ち寄ってもらった問題の解説をその場でおこなうため，十分に練った説明をすることができなかった．つぎの機会があれば改善するつもりである．

科目名　数学演習 V・VI　　**担当教官**　佐野 武

サブタイトル

対象学年　２年　　**計 4 単位　必修**

教科書　指定なし.
参考書　指定なし.

予備知識

特に仮定しない.

講義内容

内容は学生に決めてもらった．網羅的に演習をするのではなく，毎回テーマを絞った．結果，講義の補習というかたちになった.

講義の感想

自分の学習スタイルを確立している人とそうでない人との差が出来てきているようです．特に，講義や演習の進度と自分とのペースが合わないと思う人は家庭学習をしてほしい.

科目名　数学演習 V・VI　　**担当教官**　坂内 健一

サブタイトル

対象学年　２年　　**計4単位　必修**

教科書　なし
参考書　なし

予備知識

特に仮定しない.

講義内容

主に前期の複素解析の復習を目的とした．最後の数回は群論の演習を行った．毎回基本的な定義の確認から証明問題まで，難易度の異なる１０問程度の問題を配り時間内に解かせた．演習時間中は教室を巡回し，進行度の確認と個別指導を行った．答案のより詳しい添削を希望する学生には解いた問題をレポートとして提出してもらい，それを添削した.

具体的な演習内容は以下の通り：

1. 複素解析
    - 正則関数
    - 整級数，関数列
    - 線積分，コーシーの積分定理，コーシーの積分公式
    - 級数展開
    - 留数公式，実積分への応用
2. 群論
    - 群，部分群，正規部分群，剰余群，共役類
    - 巡回群，対称群，交代群，２面体群，四元数群
    - 準同型定理

講義の感想

人数が少ないこともあり，学生の進行状況が個別に確認できたので，非常にやりやすかった.

科目名　**代数系と表現**　**担当教官**　**岡田 聡一**

サブタイトル　有限群の線型表現

対象学年　**３年**　**６単位**　**選択**

教科書
参考書　近藤 武，群論（第 8 章，§8.1 〜 §8.5），岩波基礎数学選書，岩波書店
J.-P. Serre，Représentations linéaires des groupes finis，Hermann
服部 昭，群とその表現，共立数学講座，共立出版
堀田 良之，加群十話，朝倉書店

予備知識

数学基礎 II，IV，抽象ベクトル空間，代数学序論，代数学要論で学習した内容（線型代数，群論など）を仮定する．

講義内容

有限群の複素数体上の線型表現を中心に，表現論の基本的な概念，手法について解説することを目的とした．具体的な講義内容は以下の通り：

1. 群の表現の基礎（5 回）

   §1 群の表現（定義，例，正則表現）

   §2 表現の同値（行列表示，G-intertwiner）

   §3 部分表現（不変部分空間，商表現）

   §4 既約表現

   §5 Schur の補題

   §6 表現の直和，双対（線型空間の直和，双対空間の復習）

   §7 表現のテンソル積（線型空間，線型写像のテンソル積）

   §8 既約分解（線型空間の直和分解の復習）

   §9 Maschke の定理

   §10 ユニタリ表現

2. アーベル群の表現（2 回）

   §11 1 次元表現（交換子群，アーベル化）

   §12 有限アーベル群の表現（有限アーベル群の構造定理）

   §13 有限アーベル群の双対性

   §14 S^1, $\mathbb{R}$ の表現（連続なユニタリ表現の決定）

3. 指標（3 回）

§15　指標（共役類，類関数）

§16　群環（群上の関数全体が畳み込みに関してなす環として導入した）

§17　既約指標の直交性（Schur の関係式）

§18　既約指標の直交性の応用（正則表現の指標の既約分解）

§19　既約指標の決定（第二直交関係，直積群の既約表現，指標表）

§20　群環の構造（$G \times G$-加群としての既約分解，行列環の直和への分解）

4. 誘導表現（1 回）

§21　誘導表現（群環上のテンソル積，群上の関数による実現）

§22　誘導表現の性質（誘導表現の普遍性，Frobenius の相互律）

講義の感想

参考資料

試験問題　2002.02.04　10:00–12:00

以下の問題では，複素数体 $\mathbb{C}$ 上の有限次元表現だけを考える．

1.　$G = D_{2n} = \langle a, b \mid a^n = b^2 = e,\ bab = a^{-1} \rangle$ を位数 $2n$ の正二面体群とし，$\rho,\ \pi : G \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ を，

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix}, \qquad \rho(b) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\pi(a) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & \sin(2\pi/n) \\ -\sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix}, \qquad \pi(b) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

によって定まる G の $\mathbb{C}^2$ における表現とする．このとき，次の問に答えよ．

(1)　ρ と π が同値であることを，同値性の定義に基づいて証明せよ．

(2)　$n \geq 3$ のとき，ρ が既約であることを，既約性の定義に基づいて証明せよ．

2.　G を有限群，V を線型空間，$\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ を G の V における表現とし，W を V の G 不変部分空間とする．そして，$P : V \to V$ を $P(w) = w\ (w \in W)$, $\mathrm{Im}P = W$ となる線型写像とし，

$$\widetilde{P} = \frac{1}{\#G} \sum_{x \in G} \rho(x) \circ P \circ \rho(x)^{-1}$$

によって線型写像 $\widetilde{P} : V \to V$ を定義する．このとき，次の問に答えよ．

(1)　$\widetilde{P}$ が G 準同型写像であることを示せ．

(2) $w \in W$ に対して，$\widetilde{P}(w) = w$ となることを示せ．

(3) $\mathrm{Im}\widetilde{P} = W$, $\widetilde{P} \circ \widetilde{P} = \widetilde{P}$ となることを示せ．

(4) $V = W \bigoplus W'$ となる G 不変部分空間 W' が存在することを示せ．

3. 環 $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ の可逆元全体のなす群を G とするとき，次の問に答えよ．

(1) G の元を全て書き上げ，各元の位数を求めよ．

(2) G を巡回群の直積に分解せよ．

(3) G から $\mathbb{C}^{\times}$ への準同型写像を全て求めよ．

4. 2 次正方行列 E, I, J, K を

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

によって定め，G を $\pm E$, $\pm I$, $\pm J$, $\pm K$ の 8 つの行列が行列の積に関してなす群とする．このとき，次の問に答えよ．ただし，次の 2 つの事実

(a) $I^2 = J^2 = K^2 = -E$, $IJ = -JI = K$, $JK = -KJ = I$, $KI = -IK = J$.

(b) G の交換子群を $N = [G, G]$ とすると，$N = \{E, -E\}$ である．

は証明しないで用いてよい．

(1) G を共役類に分割せよ．

(2) G から $\mathbb{C}^{\times}$ への準同型写像を全て求めよ．

(3) G の指標表を作れ．

科目名　　**多様体と微分形式**　　　　**担当教官**　**佐藤 肇**

サブタイトル　微積分の方法による高次元空間の幾何学

対象学年　　**３年**　　　　**６単位**　　**選択**

教科書

参考書　松島与三　「多様体入門」　裳華房数学選書
村上信吾　「多様体」　共立数学講座
石原　繁　「幾何学概論」　共立数学講座

予備知識

特に仮定しない.

講義内容

まず微分可能多様体の定義と，いくつかの大切な例を与えた.

次に多様体の接ベクトル空間の概念を導入した.

続いて多様体の間の可微分写像のその微分についての基本的な結果の説明し，その後，ベクトル場，テンソル場などの理論を展開した.

授業の後半は微分形式の学習であったが，学生に線形代数の基礎学力が不足していることから，線形空間の双対空間，多重線形写像，その対称化，交代化などを，時間をかけて説明をした．その後多様体上の微分形式とその外微分，リー微分，内部積について学び，H. Cartan の公式に至った．さらに，微分形式の積分や de Rham コホモロジーについて述べた.

講義の感想

線形代数の基礎がわかっていないようなので，線形空間の双対空間，テンソル積，交代形式の説明に時間をかけたが，その部分はなんとか理解した学生は多かったようである．数冊の参考書に誤って書いてある公式を私もそのまま引用してしまったが，学生が実際に計算して，間違いを指摘してくれてありがたかった.

参考資料

演習問題　2001.11.20

[1] V を n 次元線形空間とするとき，$\wedge^p V^*$, $p = 0, 1, 2, \ldots$ の定義を書き，その次元を求めよ.

[2] $\alpha = e_1^* \wedge e_2^*$, $\beta = e_3^* + e_4^*$ に対し，$(\alpha \wedge \beta)(v_1, v_2, v_3)$ を求めよ.

[3] R^4 の部分空間 W で，次の $2-$ 形式 α に対し，すべての $v_i \in W$ にたいし，$\alpha(v_1, v_2) = 0$ となるような，W の最大次元はいくつか.

(1) $\alpha = e_1^* \wedge e_2^* + e_1^* \wedge e_3^*$

(2) $\alpha = e_1^* \wedge e_2^* + e_3^* \wedge e_4^*$

(3) $\alpha = e_1^* \wedge e_2^* + 2e_2^* \wedge e_3^* + e_3^* \wedge e_4^*$

[4] 多様体の（なめらかな）微分形式の定義を書け.

試験問題　2002.02.05

[1] （境界のない）位相多様体，境界のある位相多様体，それらの構造が入らない，それぞれの位相空間の例を２つずつ挙げ,（境界のある）位相多様体の場合にはその次元も書け.

[2] V を 4 次元線形空間とし、$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ を V の基底とする．$\wedge^3 V^*$ の次元と基底を求めよ.

[3] $x_1, \ldots, x_p \in V^*$ を１次独立とし，$y_1, \ldots, y_p \in V^*$ が

$$x_1 \wedge y_1 + \cdots + x_p \wedge y_p = 0$$

をみたしているとする．このとき,

$$y_i = \textstyle\sum_{j=1}^p A_{ij} x_j$$

となる $A_{ij} = A_{ji} \in \mathbf{R}$ が存在することを示せ.

[4] 微分可能多様体 M 上の１次微分形式 ω，ベクトル場 $X_1, X_2 \in \chi(M)$ に対して

(1) 外微分の大局的な定義式 $d\omega(X_1, X_2)$ を与え,

(2) その定義が実際２次微分形式 を与えていることを示し,

(3) それが 局所的な外微分の定義と一致していることを示せ.

[5] ベクトル場 $X \in \chi(M)$ に対し，リー微分 L_X および内部積 $\iota(X)$ の大局的な定義を与えて，H.Cartan の公式

$$d\iota(X) + \iota(X)d = L_X$$

を示せ.

[6] 上半平面 $H = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > 0\}$ において，　$X = y\dfrac{\partial}{\partial x} - x\dfrac{\partial}{\partial y}$,　$\omega = \dfrac{1}{y}dx + \sin x dy$ とするとき,

$$d\omega, \quad L_X(\omega), \quad \iota(X)(\omega)$$

を求めよ.

[7] 3 次元微分可能多様体 M 上で各点で消えない１次微分形式 ω が与えられ，ベクトル場 $X_1, X_2 \in \chi(M)$ が，$\omega(X_i) = 0,\ i = 1,\ 2$ を満たすなら，$\omega([X_1, X_2]) = 0$ となっている．このとき，M の各点のある近傍に１次微分形式 η が存在し，そこで $d\omega = \eta \wedge \omega$ となっていることを示せ.

公式集

ベクトル空間上

$\omega \in \Lambda^p(V^*), \quad \eta \in \Lambda^q(V^*)$

$$(\omega\wedge\eta)(X_1,\ldots,X_{p+q}) = \frac{1}{(p+q)!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{p+q}} \mathrm{sgn}(\sigma)\omega(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(p)})\eta(X_{\sigma(p+1)},\ldots,X_{\sigma(p+q)})$$

$\omega\wedge\eta = (-1)^{pq}(\eta\wedge\omega)$

多様体上

$X \in \chi(M), \quad f \in \Lambda^0(T^*(M)) = C^\infty(M) \qquad (df)(X) = X(f)$

LOCAL $\quad X = \sum_j \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j},$

$$(df)(X) = (\sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i)(\sum_j \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}) = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x^j}\xi^j$$

外微分

$d : \Lambda^p(T^*(M)) \to \Lambda^{p+1}(T^*(M))$

GLOBAL $\quad d\omega(X_1,\ldots,X_{p+1})$

$$= \frac{1}{p+1}\left\{\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1}X_i(\omega(X_1,\ldots,\check{X}_i,\ldots,X_{p+1})) + \sum_{1\le i\le j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,..,\check{X}_i,..,\check{X}_j,..,X_{p+1})\right\}$$

LOCAL $\quad \omega = f dx^1\wedge\ldots\wedge dx^p,$

$d\omega = df\wedge dx^1\wedge\ldots\wedge dx^p$

$\omega_1 \in \Lambda^p(T^*(M)),\ \omega_2 \in \Lambda^q(T^*(M))$

$$\Rightarrow d(\omega_1\wedge\omega_2) = d\omega_1\wedge\omega_2 + (-1)^p\omega_1\wedge d\omega_2$$

リー微分

$X \in \chi(M), \quad L_X : \Lambda^p(T^*(M)) \to \Lambda^p(T^*(M))$

$L_X(Y) = [X,Y],\ Y \in \xi(M)$

$L_X(f) = X(f)$

GLOBAL $\quad L_X(\omega)(Y_1,\ldots,Y_p)$

$$= X(\omega(Y_1,\ldots,Y_p)) - \sum_{i=1}^{p}\omega(Y_1,\ldots,[X,Y_i],\ldots,Y_p)$$

$L_{aX+bY} = aL_X + bL_Y, \quad a,\ b \in \mathbb{R}$

$$\omega_1 \in \Lambda^p(T^*(M)),\ \omega_2 \in \Lambda^q(T^*(M))$$
$$\Rightarrow L_X(\omega_1 \wedge \omega_2) = L_X(\omega_1)\wedge\omega_2 + \omega_1 \wedge L_X(\omega_2)$$

$$dL_X = L_X d$$

LOCAL $X = \sum_j \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}$,

$$L_X(dx^i) = d(X(x^i)) = d\xi^i$$

$$L_X(f dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p)$$
$$= X(f) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p + \sum_{i=1}^p f dx^1 \wedge .. \wedge d\xi^i \wedge .. \wedge dx^p$$

内部積

$X \in \chi(M)$, $\quad \iota(X) : \Lambda^p(T^*(M)) \to \Lambda^{p-1}(T^*(M))$

$$\iota(X)(f) = 0$$
$$\iota(X)(df) = X(f)$$

GLOBAL $\iota(X)(\omega)(Y_1, \ldots, Y_{p-1})$

$$= p\ \omega(X, Y_1, \ldots, Y_{p-1})$$

$$\iota(fX + gY) = f\iota(X) + g\iota(Y), \quad f,\ g \in C^\infty(M)$$

$$\omega_1 \in \Lambda^p(T^*(M)),\ \omega_2 \in \Lambda^q(T^*(M))$$
$$\Rightarrow \iota(X)(\omega_1 \wedge \omega_2) = \iota(X)(\omega_1)\wedge\omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge \iota(X)(\omega_2)$$

LOCAL $X = \sum_j \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}$,

$$\iota(X)(dx^i) = \xi^i$$

H.Cartan の公式

$X,\ Y \in \chi(M) \quad \Rightarrow$

$$L_X \iota(Y) - \iota(Y) L_X = \iota([X, Y]) : \Lambda^p(T^*(M)) \to L^{p-1}(T^*(M))$$

$$L_X L_Y - L_Y L_X = L_{[X,Y]} \ : \Lambda^p(T^*(M)) \to L^p(T^*(M))$$

$$d\iota(X) + \iota(X) d = L_X \ : \Lambda^p(T^*(M)) \to L^p(T^*(M))$$

科目名　確率論　　**担当教官**　市原 完治

サブタイトル

対象学年　３年　　**６単位**　**選択**

教科書　西尾真喜子，確率論，実教出版
参考書　伊藤清，確率論（岩波講座基礎数学），岩波書店
国沢清典・羽鳥裕久，現代教養統計学，サイエンス社

予備知識

微分積分学，ルベーグ積分の基礎

講義内容

測度論に基づく確率論における基礎的事柄および数理統計学の基礎概念の解説.
具体的な講義内容は以下の通り：

1. 離散確率空間
   - 可算集合上の確率測度，確率変数とその平均.
   - 離散分布の例（二項分布，ポアソン分布）.
   - 条件付き確率，独立事象系，確率変数の独立性，独立な確率変数の積の平均値の乗法性.
   - 独立な確率変数の和の分布とたたみこみ.
2. 一般の確率空間
   - 一般の可測空間上の確率測度とその性質，確率測度の例（ガウス分布，一様分布，コーシー分布）.
   - 測度の拡張定理とその応用（ Lebesgue-Stieltjes 測度，確率測度の直積）.
3. 確率変数と分布
   - 確率変数とその分布関数，結合分布と周辺分布，例（ n 次元正規分布）.
   - 確率変数の独立，加法族の独立.
   - 概収束，確率収束.
   - ボレルーカンテリ の補題.
4. 平均値
   - 平均値の定義と性質
   - 確率変数の分布と平均値
   - フビニの定理，独立な確率変数の積の平均値の乗法性.
   - ヘルダーの不等式，ミンコフスキーの不等式，チェビシェフの不等式.
5. 独立確率変数の和

- ベルヌーイの大数の法則とその応用（ワイヤストラスの多項式近似定理），大数の強法則.
- 中心極限定理.

6. 推定
   - 母集団，標本.
   - 点推定（一致推定量，不変推定量）.
   - 最尤法，最尤推定量.
7. 検定
   - 仮説検定の概念（帰無仮説，対立仮説），有意水準.
   - 第１種の誤りの確率，第２種の誤りの確率.

講義の感想

講義を通じて，できる限り平易に解説を心がけたつもり.

参考資料

中間試験

1(a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ の値を求めよ。

(b) 確率変数 ξ は１次元正規分布 $\mathrm{N}(0,\sigma^2)(\sigma>0)$ に従っているものとする。このとき分散 $V(\xi)$ を求めよ.

2(a) 確率収束の定義を述べよ。

(b) X_n が X に確率収束し、f が $\mathbf{R}^1$ 上で有界、一様連続ならば

$$\lim_{n\to\infty} Ef(X_n)=Ef(X)$$

であることを証明せよ。

3. 確率変数 $X_n, n\in\mathbf{N}$ は互いに独立で

$$P(X_n=k)=\begin{cases}1-p, & k=0,\\ p, & k=1,\end{cases}$$

$(0<p<1)$ に従うものとし、N は $X_n, n\in\mathbf{N}$ と独立でパラメータ $\lambda(>0)$ のポアソン分布に従う確率変数とする。和 $X_1+\cdots+X_N$ の分布を求めよ。ただし、$N=0$ のときは、和は 0 と定義する。

期末試験

次の４問の中から３問を選び、解答せよ。

1. $X_k, k=1,2$ は独立な確率変数で、その確率密度関数が

$$f_k(x)=\begin{cases}\lambda_k e^{-\lambda_k x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

で与えられているものとする。(i.e. X_k はパラメータ λ_k の指数分布に従う）このとき X_1+X_2 の確率分布を求めよ。

2. $X_1,\cdots,X_n$ を無限母集団から取り出された標本、$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ を $\alpha_1+\cdots+\alpha_n=1$ をみたす実数とする。

$$\bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,$$

$$\bar{Y}_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i$$

とおく。このとき、$\bar{Y}_n$ の分散は $\bar{X}_n$ の分散より大であり、等しくなるのは $\alpha_i=1/n, i=1,2,\cdots,n$ のときに限ることを証明せよ。

3. $p_n\in(0,1), n=1,2,\cdots$ を $\lim_{n\to\infty}np_n=\lambda(>0)$ なる数列とする。X_n を $B(n,p_n)$ に従う確率変数とするとき、$\lim_{n\to\infty}P(X_n=k), k=0,1,2,\cdots$ を求めよ。

4. 確率密度関数が

$$f_\mu(x)=\begin{cases}\mu e^{-\mu x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

(μ は未知の正数）で与えられる指数分布に従う母集団から大きさ１の標本 X_1 を抽出する。

(a) X_1 の平均値を求めよ。

(b) 上の標本の実現値を用いて、

H （帰無仮説）：$\mu=1$

H_1 （対立仮説）：$0<\mu<1$

の検定を行う。検定方式として、

$x_1>2$ のとき、H をすてて H_1 をとる

$x_1\le 2$ のとき、H をすてない、

を採用する。このとき、第１種の誤りの確率（H が正しいのに、すててしまう確率)、第２種の誤りの確率（H が正しくないのに、すてない確率）を求めよ。

科目名　関数解析　**担当教官**　名和 範人

サブタイトル　関数空間論と位相解析の基礎

対象学年　３年　**６単位**　**選択**

教科書
参考書　田辺広城 著，関数解析 上，実教出版
H. Brezis 著 (藤田 宏　小西 芳雄 共訳)，関数解析，産業図書
黒田成俊 著，関数解析，共立出版

予備知識

２年次までの必修科目（微分積分学，線形代数学の基本的事項（数学基礎 I 〜 IV），抽象ベクトル空間，解析学序説，集合と位相，ベクトル解析）及び，３年次の常微分方程式論，ルベーグ積分論.

講義内容

具体的な講義内容は以下の通り：

1. 予備概念（10/11, 18, 25, ）
   - 関数解析とは
   - 位相空間論より：定義と諸概念
   - 積分論より：定義と重要な諸定理
2. 線形位相空間（10/25, 11/1, 14, 22, 29）
   - 線形空間
   - ノルム空間，Banach 空間 (定義と諸例, 重要な不等式)
   - Hilbert 空間 (定義と諸例, ノルムと内積の関係)
   - ノルム空間の位相の話 (距離空間としてのノルム空間，単位球の compact 性と次元)
   - いろいろな線形位相空間と補遺 (凸性，有界性などの諸概念，急減少関数の空間など)
3. 線形作用の基礎理論（11/ 29, 12/13）
   - 線形作用素 (基本的な性質)
   - 閉作用素 (閉拡張，前閉作用素など)
   - Banach 代数 (Neumann 級数).
4. Hilbert 空間の直行射影と正規直交系 (1/10, 17)
   - 直和分解と射影作用素
   - 正規直交系 (完全性，Bessel の h 不等式， Perseval の等式，Fourier 展開)
   - $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(in\theta)\}$ の $L^2(-\pi,\pi)$ における完全性

5. 共役 (双対) 空間（1/24）

- 線形汎関数
- Hahn-Banach の定理
- 弱位相と汎弱 位相，回帰性 (概説)

Baire の定理，一様有界性の定理，開写像定理，閉グラフの定理はレポート課題とした．

講義の感想

講義を通じて，できる限り丁寧な解説を心がけたつもりであったが，前半の部分で関数空間の具体例などに時間をとられて後半の最終部分が駆け足になってしまい，予定していた分量をこなすことはできなかった．この続きは，来年度の４年生科目，近代解析の 1/3 程度をかけて補う予定である．

参考資料

期末試験　2002.02.07

注意事項：ノート、参考書類は持ち込み不可，提出予定のレポートは参照可

問題用紙は 2 枚ある． 試験時間は午前 9:00 から正午 までである．
次の **1** から **5** に答えよ．ただし、**1-1** と **1-2** は選択問題である．どちらか一方を解答すればよいが、両方を解答してもよい．両方解答した場合は加点する．

1-1. $1 \leq p < \infty$ とする．$\mathbb{R}^n$ 上の Lebesgue 測度に関して p 乗可積分な複素数値関数全体のなす空間を $L^p(\mathbb{R}^n)$ (ほとんどいたるところ一致するものは同一視する) とし，その上にノルム $\|\cdot\|_p$ を

$$\|u\|_p \stackrel{def}{=} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

と定める．このとき，$L^p(\mathbb{R}^n)$ はこのノルムに関して Banach 空間となることを示せ．

1-2. $\mathbb{R}^n$ 上の Lebesgue 測度に関して 本質的に有界な複素数値関数全体のなす空間を $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (ほとんどいたるところ一致するものは同一視する) とし，その上に ノルム $\|\cdot\|_\infty$ を

$$\|u\|_\infty \stackrel{def}{=} \inf\left\{\alpha > 0 \;\middle|\; \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; |u(x)| > \alpha\right\}\right| = 0\right\}$$

と定める．このとき，

$$\|u\|_\infty \stackrel{def}{=} \inf_{|N|=0} \sup_{x \in \mathbb{R}^n/N} |u(x)|$$

であることを示せ．ただし，右辺の下限は $\mathbb{R}^n$ の Lebesgue 測度 0 の集合全体に渡ってとることを意味する．また，$L^\infty(\mathbb{R}^n)$ はこのノルムに関して Banach 空間となることを示せ．

2. H を内積 $(\cdot,\cdot)$ を持つ複素数体上の Hilbert 空間と する．$S = \{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ をその正規直交系とするとき、次の (1) (2) が成立することを示せ．

(1) 任意の $x \in H$ に対して Bessel の不等式

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(x, e_j)|^2 \leq \|x\|^2$$

が成立する。ここで $\|x\|^2 = (x, x)$ である.

(2) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 < \infty$ を満たす複素数列 $\{c_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ に対し、級数 $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j$ は H で収束し，$x = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j$ とおけば、$c_j = (x, e_j)$ $(j = 1, 2, \cdots)$ である.

3. H を内積 $(\cdot,\cdot)$ を持つ複素数体上の Hilbert 空間とする．任意の $x \in H$ に対して $\|x\|^2 = (x, x)$ と書く．$S = \{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ をその正規直交系とするとき、次の 4 命題は同値であることを示せ：

(i) S は完全である.

(ii) H の任意の元 x に対して、Perseval の関係式 $\|x\|^2 = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} |(x, e_j)|^2$ が成立する.

(iii) H の任意の元 x に対して，$x = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}(x, e_j)e_j$ が成立する.

(iv) H の元 x のすべての Fourier 係数 (x, e_j) が零であれば、x は零ベクトルである.

4. H を内積 $(\cdot,\cdot)$ を持つ複素数体上の Hilbert 空間とする．任意の $x \in H$ に対して $\|x\|^2 = (x, x)$ と書く．ヒルベルト空間 H の元の列 $\{x_n\}$ が $x \in H$ に弱収束するとは,

$$\lim_{n\to\infty} (\, x_n - x \,,\, y \,) = 0$$

が任意の H の元 y に対して成り立つ事と定義する．このとき，以下の問いに答えよ.

(1)　$\{x_n\}$ が x に弱収束するとき、

$$\lim_{n\to\infty} (\|x_n\|^2 - \|x_n - x\|^2 - \|x\|^2) = 0$$

を示せ.

(2)　$\{x_n\}$ が x に弱収束し、さらに $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$ が成り立っているとき、次の収束が成り立つ事を示せ.

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

(3) l^2 を $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 < \infty$ を満足する実数列 (a_j) の全体とする．l^2 は

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j, \quad x = (a_j),\, y = (b_j) \,\in l^2$$

を内積として実ヒルベルト空間となることが知られている。l^2 の元の列 $\{x_n\}$ で 0 (ゼロ数列) に弱収束するが、$\|x_n\|$ が 0 に収束しないような例を挙げよ。

5. Y、 Z を Bnach 空間 X の閉部分空間とする。任意の $x \in X$ が、$x = y + z$ (ただし $y \in Y$ $z \in Z$) なる形に一意的に現されるものと仮定する。このとき、x に対して y を対応させる X から Y への作用素 P が定まる。

(1) P は線形作用素であることを示せ。

(2) Y には X からの相対位相を入れると、ひとつの Banach 空間になることを示し、 P は Banach 空間 X から Banach 空間 Y への閉作用素であることを示せ。

(3) P は Banach 空間 X から Banach 空間 Y への有界線形作用素であることを閉グラフの定理を用いて示せ。

Excersise in Chapter 0.

Ex.0.1. 測度空間 $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{M}, |\cdot|)$ を考える。ここで $\mathfrak{M}$ は Lebesgue 可測集合族、$|\cdot|$ をその上に定義された Lebesgue 測度とする。
(i) f を $\mathbb{R}^n$ 上の非負可積分関数とし、

$$\nu(A) :\overset{def}{=} \int_A f(x)dx, \quad A \in \mathfrak{M}$$

と定めると、$\nu(\cdot)$ は $|\cdot|$ に関して絶対連続な測度であることを示せ。
(ii) 次のように Dirac 測度 δ_0 を定める：

$$\delta_0(A) :\overset{def}{=} \begin{cases} 1, & 0 \in A, \\ 0, & 0 \notin A, \end{cases} \qquad A \in \mathfrak{M}.$$

$\delta_0(\cdot)$ は $|\cdot|$ に関して絶対連続とはならない (即ち特異な測度である) ことを示せ。

Excersises in Chapter 1.

Ex.1.1. $\mathbb{K}$ を実または複素数体とし、X を $\mathbb{K}$ 上の線形空間 とする。
(i) $0 \in \mathbb{K}$、$x \in X$ に対して、$0x = 0$ (右辺の 0 は X の零ベクトル) となることを示せ。
(ii) $-1 \in \mathbb{K}$、$x \in X$ に対して、$(-1)x = -x$ (右辺の $-x$ は x の加法の逆元) となることを示せ。
(iii) 講議における線形空間の公理群 (Definition 1.1) において、(Ic) は、(Ic') または (Ic") と置き換えることができることを示せ。

Ex.1.2. X を線形空間とする。
(i) X の部分空間 (Definition 1.4) は、それ自身、一つの線形空間であることを示せ。
(ii) $\{M_a\}_{a\in I}$ を X の部分空間の族とする。$\cap_{a\in I} M_a$ は X の部分空間であることを示せ。
(iii) X の部分集合 A の張る部分空間を L.h.$[A]$ と書く。このとき

$$\text{L.h.}[A] = \bigcap_{\substack{M \supset A \\ M:subspace}} M$$

となることを示せ。

Ex.1.3. $(C([0,1]); \|\cdot\|_1)$ は完備とはならない事を示せ。ここで

$$\|x\|_1 :\overset{def}{=} \int_0^1 |x(t)|dt$$

である。

Ex. 1.4. ここでは $1 \leqq p < \infty$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) $x \in L^p(\mathbb{R}^n)$ に対して、

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x(t)|^p dt = 0 \implies x = 0 \ a.e. \ \mathbb{R}^n.$$

(2) $x \in C(\mathbb{R}^n)$ に対して、

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x(t)|^p dt = 0 \implies x \equiv 0.$$

(3) $a \geqq 0$、 $b \geqq 0$ のとき

$$\forall \varepsilon > 0, \quad (a+b)^p \leqq (1+\varepsilon)^{p-1} a^p + \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)^{p-1} b^p.$$

Ex. 1.5. 次の関数空間を考える。

$$X :\overset{def}{=} \left\{ x \in C([0,\infty);\mathbb{R}) \;\middle|\; \sup_{t \in [0,\infty)} \left(e^{-t}|x(t)|\right) < \infty \right\}$$

X にノルムを

$$\|x\| :\overset{def}{=} \sup_{t \in [0,\infty)} \left(e^{-t}|x(t)|\right)$$

で導入すると、実 Banach 空間になることを示せ。

Ex. 1.6. $1 \leqq p < \infty$ に対して l^p を $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p < \infty$ を満足する実数列 $\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ の全体のなす集合とする。l^p は、和と実数倍を、それぞれ

$$\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}} + \{b_j\}_{j\in\mathbb{N}} :\overset{def}{=} \{a_j + b_j\}_{j\in\mathbb{N}}; \quad \alpha\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}} :\overset{def}{=} \{\alpha a_j\}_{j\in\mathbb{N}}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

と定義し、ノルムを

$$\|x\| :\overset{def}{=} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad x = \{a_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in l^p$$

と定めれば、実 Banach 空間となることを示せ。

Ex.1.7. 可測関数 x_j $(1 \leqq j \leqq L)$ を

$$x_j \in L^{p_j}(\mathbb{R}^n) \ (1 \leqq j \leqq L), \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_L} \leqq 1$$

なるものとする。ただし $p_j > 0$ $(1 \leqq j \leqq L)$ である。このとき $x :\overset{def}{=} x_1 x_2 \cdots x_L$ は $L^p(\mathbb{R}^n)$ に属し

$$\|x\|_p \leqq \|x_1\|_{p_1} \|x_2\|_{p_2} \cdots \|x_L\|_{p_L}$$

が成り立つ事を示せ。

Ex.1.8. $1 \leqq p \leqq q < \infty$ とする。$x \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ に対して、

$$\|x\|_r \leqq \|x\|_p^{\alpha} \|x\|_q^{1-\alpha}, \quad \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \quad (0 < \alpha < 1)$$

を示せ。

Ex.1.9. $x \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leqq p < \infty)$、$y \in L^1(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\big(x * y\big)(t) :\stackrel{def}{=} \int_{\mathbb{R}^n} x(t-s)y(s)ds$$

と定める。このとき $x * y \in L^p(\mathbb{R}^n)$ を示せ。

Ex.1.10. Theorem 1.1 を証明しなさい：$(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とする時、$X \ni x \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}$、$X \times X \ni (x, y) \mapsto x + y \in X$、$\mathbb{K} \times X \ni (\alpha, x) \mapsto \alpha x \in X$ の各々が連続写像であることを示せ。

Ex.1.11. 線形空間 X に二つのノルム $\|\cdot\|_{(1)}$ と $\|\cdot\|_{(2)}$ が定義されている。τ_j でノルム $\|\cdot\|_{(j)}$ $\quad (j = 1, 2)$ が与える位相を表す。このとき

$$\forall x \in X,\ \|x\|_{(1)} \leqq \|x\|_{(2)} \quad \Longrightarrow \quad \tau_1 < \tau_2$$

を示せ。

Ex.1.12. $1 \leqq p \leqq \infty$ とする。$\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度に関して p 乗可積分な関数全体のなす Banach 空間 $L^P(\mathbb{R})$ のノルム $\|\cdot\|_p$ は、 $p \neq 2$ のとき中線定理：

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad x, y \in L^p(\mathbb{R})$$

を満たさないことを示せ。ただし

$$\|x\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^p dt\right)^{1/p} \qquad (1 \leqq p < \infty),$$
$$\|x\|_\infty = \operatorname*{ess.sup}_{t \in \mathbb{R}} |x(t)|$$

である。

Ex.1.13. (X, d) を距離空間とする。今、$X \times X$ 上に関数 ϱ を

$$\varrho(x, y) :\stackrel{def}{=} \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad x, y \in X$$

と定める。

(i) ϱ もまた、X 上の距離であることを示せ。

(ii) (X, ϱ) は (X, d) と位相空間として同じものであることを示せ。

Ex.1.14. 線形空間 X に二つのノルム $\|\cdot\|_{(1)}$ と $\|\cdot\|_{(2)}$ が定義されている。τ_j でノルム $\|\cdot\|_{(j)}$ $\quad (j = 1, 2)$ が与える位相を表す。$\tau_1 = \tau_2$ のと き、$E \subset X$ に対して

$$\sup_{x \in E} \|x\|_{(1)} < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \sup_{x \in E} \|x\|_{(2)} < \infty$$

を示せ。

Remark. 上記の Ex 1.13, 1.14 から、距離の有界性は位相的な性質ではないが、ノルムの有界性は位相的な性質であることが分かる。有界集合の定義については、Definition 1.13 を見よ。

Ex.1.15. X を線形空間とする。 M、N を X の二つの部分空間で $M \cap N = \{0\}$ を満たすものとする。

(i) M と N の直和 $M \oplus N$ は $M \cup N$ が張る線形空間に等しいことを示せ。

(ii) $x \in M \oplus N$ の分解 $x = y + z$、$y \in M$、 $z \in N$ は一意的であることを示せ。

♣ 以降の Chapter 1 の問題においては、具体的な関数空間の元 (即ち関 数) を u や v を用いて表し、関数の変数を x で表す。抽象的な空間については今まで通り、x や y などで、その元を表す。

♣♣ $\mathbb{R}^N$ 上の滑らかな急減小関数のクラス $\mathcal{S}$ を

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) :\overset{def}{=} \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^N) |\ \text{すべての}\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\ \text{に対して}\ p_k(u) < \infty\}$$

と定義する。ただし、

$$p_k(u) = \sup_{|\alpha|<k} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} (1 + |x|)^k |\partial^\alpha u(x)|$$

である。また、$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ 上には、「距離」

$$d(u, v) :\overset{def}{=} \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2^k} \frac{p_k(u - v)}{1 + p_k(u - v)}, \quad u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

が定義されているものとする (本当に距離となる事を確かめよ Ex. 1.16)。

Ex.1.16. 次の問いに答えよ。

(0) 上記、$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ 上に定義された「距離」d は本当に距離である事を示せ。

(i) 実軸上定義された、次の三つの関数、$\exp(-|x|^2)$、$\exp(-a\sqrt{1 + |x|^2})$ (a は正定数)、および

$$u(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geqq 1, \end{cases}$$

は $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ に属することを示せ。

(ii)　実軸上定義された、次の二つの関数、$\exp(-|x|)$、 $(1 + |x|^2)^{m/2}$ ($m \in \mathbb{N}$)) は $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ に属さないことを示せ。

(iii) $1 \leqq p \leqq \infty$ に対して、$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ を示せ。

(iv) $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ とする。任意の $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$、任意の多重指数 (multi index) $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ に対して

$$\lim_{|x|\to\infty} (1 + |x|)^k |\partial^\alpha u(x)| = 0$$

を示せ。

Ex.1.17. 区間 $[0, 1]$ 上の C^1- 級の実数値関数全体のなす実線形空間 $C^1([0, 1]; |\mathbb{R})$ を考える。

(i) $C^1([0, 1]; |\mathbb{R})$ は次のノルム $\|\cdot\|_\infty$ で Banach 空間とはならないことを示せ。

$$\|u\|_\infty :\overset{def}{=} \max_{x \in [0,1]} |u(x)|$$

(ii) $C^1([0, 1]; |\mathbb{R})$ は次のノルム $\|\cdot\|_{1,\infty}$ で Banach 空間となることを示せ。

$$\|u\|_{1,\infty} :\overset{def}{=} \max_{x \in [0,1]} |u(x)| + \max_{x \in [0,1]} |u'(x)|$$

Ex.1.18. $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ とする。ある $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ に対して $\lim_{n\to\infty} d(u_n, u) = 0$ となるための必要十分条件は

$$\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \lim_{n\to\infty} p_k(u_n - u) = 0$$

であることを示せ。

****Ex.1.19.** $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^N), d)$ は完備距離空間であることを示せ。

***Ex.1.20.** $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ の各点 u にたいして $\mathcal{B}(u)$ を次のように定義する：まず、任意の $\varepsilon > 0$、$\mathbb{N} \cup \{0\}$ の任意の有限部分集合 H に 対して

$$B(u; H, \varepsilon) \stackrel{def}{:=} \{v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) | \forall k \in H,\ p_k(u - v) < \varepsilon\}$$

と定める；このような集合の族が $\mathcal{B}(u)$ である。即ち、

$$\mathcal{B}(u) \stackrel{def}{:=} \{B(u; H, \varepsilon) | \varepsilon > 0,\ H \subset \mathbb{N} \cup \{0\},\ \#H < \infty\}$$

である。$\mathcal{B}(u)$ が基本近傍系の公理を満足することを示せ。

***Ex.1.21.** 集合 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ の各点 u に対して $\mathcal{B}(u)$ を 基本近傍系とするような位相を与えた位相空間を $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^N), \mathcal{B})$ とする。$(\mathcal{S}(\mathbb{R}^N), \mathcal{B})$ と $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^N), d)$ は位相空間として同じものであることを示せ。

***Ex.1.22.** $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ の部分集合 E が有界集合であるための必要十分条件は、任意の $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して $p_k(E)$ が有界、即ち

$$\exists M_k > 0\ s.t.\ p_k(u) < M_k\ (\forall u \in \mathcal{S})$$

であることを示せ (講議の Proposition1.9)。

****Ex.1.23.** $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ の有界閉集合はコンパクトであることを示せ (講議の Theorem1.7)。

Ex.1.24. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ は無限次元の線形空間であることを示せ。

Ex.1.25. ノルム空間 $(X, \|\cdot\|)$ が完備である（即ち Banach 空間で ある）ための必要十分条件は、$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$ であるような如何なる級数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ も X で収束することであることを示せ。
Hint. 十分性の証明には、L^p 空間の完備性を証明したようなアイデアを用いる。

Ex.1.26. (X, d) を完備距離空間とする。T を X から X への写像とする。また

$$\exists a \in (0,1)\ \ s.t.\ \ d(Tx, Ty) \leqq a d(x, y), \quad x, y \in X$$

が成り立つものとする。

(i)　X の元 x_0 に対して

$$x_n = Tx_{n-1}, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

とおくと、X の元の列 $\{x_n\}$ は Cauchy 列であることを示せ。
(ii) $x_\infty \stackrel{def}{:=} \lim_{n\to\infty} x_n$ とおくと $Tx_\infty = x_\infty$ が成り立つこ とを示せ。
(iii) $Tx = x$ を満たす x は唯一つであることを示せ。即ち、 $Tx = x$ であったならば $x = x_\infty$ が成立する。

Remark. 上記の Ex 1.26 は Banach の不動点定理と呼ばれるもので、常微分方程式の解の存在証明などに用いられる重要なものである。

Excersises in Chapter 2.

以降の Chapter 2 の問題においては、何の断わりもなければ、X 、Y で各々ノ ルム空間 $(X, \|\cdot\|_X)$、$(Y, \|\cdot\|_Y)$ を表す。文脈から判断できる場合には、ノ ルムの記号において空間を指定する添字を省いて、ノルムを単に $\|\cdot\|$ と書く。また、何の断わりもなく $T : X \longrightarrow Y$ と書いたら、T はノルム空間 X からノルム空間 Y への線形作用素を表すものとし、その定義域を $D(T)$、値域を $R(T)$ と記すことにす る。また、$\ker T :\stackrel{def}{=} \{x \in X \,|\, Tx = 0\}$ で T の核を表もの とする。

Ex.2.1. $T : X \longrightarrow Y$ に対して、次の事実を示せ。
(i) $R(T)$ は Y の部分空間である。
(ii) $T0 = 0$。ここで左辺の 0 は X のゼロベクトル、右辺 0 は Y のゼロベクト ルである。
(iii) $\exists T^{-1} \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}\, T = \{0\}$。このとき、 $D(T^{-1}) = R(T)$。
(iv) T が連続であることの必要十分条件は、T が $0 \in X$ で 連続であることである。

Ex.2.2. $T : X \longrightarrow Y$ は連続であるとする。このとき

$$\|T\| :\stackrel{def}{=} \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

と定義する (Definition 2.2)。即ち、$\|T\|$ は $\|Tx\| \leqq M\|x\|$ $(x \in D(T))$ を満足する正数 M のう ち最小のものである。このとき、次の等式が成り立つことを示せ。

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ \|x\|=1}} \|Tx\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ \|x\| \leqq 1}} \|Tx\|.$$

Ex.2.3. §2.2 の冒頭で述べたようにして、X と Y の直積空間 $X \times Y$ に和とス カラー倍を定義し、$\|[x, y]\| :\stackrel{def}{=} \|x\|_X + \|y\|_Y$ $([x, y] \in X \times Y)$ と定める。
(i) $(X \times Y, \|[\cdot, \cdot]\|)$ はノルム空間となることを確かめよ。
(ii) X と Y がともに Banach (Hilbert) 空間ならば $X \times Y$ もそうであること を示せ。

Ex. 2.4. X はノルム空間とし、Y は Banach 空間とする。$T : X \longrightarrow Y$ は連続で $D(T)$ は X で稠密とする。このとき、T は X 全体で定義された連続な線形作用素（即ち X 上の有界作用 素）に一意的に拡張されることを示せ。

Ex. 2.5. $T : X \longrightarrow Y$ は閉作用素、$S : X \longrightarrow Y$ は 有界作用素とする。いま

$$\begin{cases} D(T+S) :\stackrel{def}{=} D(T), \\ (T+S)x :\stackrel{def}{=} Tx + Sx, \quad x, y \in D(T) \end{cases}$$

と定義する。このとき、 $T + S$ は閉作用素であることを示せ。

Ex. 2.6. $X :\stackrel{def}{=} L^p(a,b)$ $(1 \leqq p < \infty)$ を区間 (a,b) 上の実数値 p 乗可積分関数全体のなす Banach 空間とする。$T : X \longrightarrow X$ を次のように定める：定義域を

$$D(T) :\stackrel{def}{=} \{x \in X \mid x \in C^1([a,b]),\ x(a) = 0\}$$

とし、T の作用を

$$(Tx)(t) :\stackrel{def}{=} \left(\frac{dx}{dt}\right)(t)$$

とする。このとき、次の問いに答えよ。

(i) T は前閉作用素であるが、連続ではない。

(ii) T の最小閉拡張 $\overline{T}$ を求めよ。

Ex.2.7. $T : X \longrightarrow X$ は連続な逆作用素 T^{-1} を持つとする。このとき、T が閉作用素であるための必要十分条件は $R(T)$ が閉であること を示せ。

Excersises in Chapter 3.

Chapter 3 の問題を先取りしておこう。

Ex.3.1. (無限）濃度 $\mathfrak{a}$ を持つ集合 $(\mathfrak{a})$ 上定義された複素数値関数 x を $\{x_\theta\}_{\theta\in(\mathfrak{a})}$ と表す。$l^2(\mathfrak{a})$ でこのような関数のうち、高々可算個の θ を除いて値 0 をとるもので、$\sum_{\theta\in(\mathfrak{a})} |x_\theta^2| < \infty$ なるもの全体を表す。 いま

$$(x,y) :\stackrel{def}{=} \sum_{\theta\in(\mathfrak{a})} x_\theta \overline{y_\theta}, \quad x = \{x_\theta\},\, y = \{y_\theta\} \in l^2(\mathfrak{a})$$

と定めると、この右辺は絶対収束し、$(l^2(\mathfrak{a}), (\cdot,\cdot))$ は Hilbert 空間になることを示せ。

Ex. 3.2. Ex.1.6 の l^2 は可分な Hilbert 空間であるが、前問 Ex. 3.1 の $l^2(\mathfrak{a})$ は $\aleph_0 \lneqq \mathfrak{a}$ ならば可分ではないことを示せ。

レポート問題

提出期限：2002 年 2 月 7 日 期末試験終了時

A4 レポート用紙を使用し、左上をホチキスで綴じること

問題 1 (Baire のカテゴリー定理). X を完備距離空間とする。$\{X_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ を X の閉部分集合の可算族で、$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$ となるものとする。このとき、ある $j_0 \in \mathbb{N}$ が存在して、X_{j_0} は開球を含むことを証明せよ。

問題 2 (一様有界性の定理). $(X, \|\cdot\|_X)$ を Banach 空間、$(Y, \|\cdot\|_Y)$ をノルム空間とする。$\{T_a\}_{a\in A}$ を $L(X,Y)$ に属する作用素の族とする。すべての $x \in X$ に対して

$$\sup_{a\in A} \|T_a x\|_Y < \infty$$

ならば

$$\sup_{a\in A} \|T_a\|_{L(x,y)} < \infty$$

が成立することを証明せよ。

問題 3 (Banach-Steinhauss の定理の特別な場合). X を Banach 空間、Y をノルム空間とする。$\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $L(X,Y)$ に属する作用素の列とする。もし、すべての $x\in X$ に対して $\{T_nx\}$ が Y の中の収束列であれば、その極限を

$$Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$$

とおくと、$T\in L(X,Y)$ であって、

$$\|T\|_{L(x,y)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|_{L(x,y)} < \infty$$

が成立することを証明せよ。

問題 4 (値域定理、開写像定理). X、 Y を Banach 空間とする。T を X から Y への線形閉作用素とする。もし、$R(T)=Y$ (全射) ならば T は開写像である。すなわち、X の中の任意の開集合 O にたいして、$TO=\{y\in Y|y=Tx,\, x\in O\}$ は Y の中の開集合であることを証明せよ。さらに T が単射 (1 対 1) であるならば $T^{-1}\in L(Y,X)$ であることを証明せよ。

問題 5 (閉グラフ定理). X、 Y を Banach 空間とする。T を X から Y への線形作用素で $D(T)=X$ とする。T が連続である (すなわち $T\in L(X,Y)$ となる) ための必要十分条件は T が閉作用素であることを証明せよ。

レポート作成について注意事項. 本は、紙数の都合上などの理由で、途中の計算が省略されたり、「明らかに」などの言葉使われて論証が省略されていたりする。これらを補って本の丸写しにならないように、自らの手で計算や不等式の評価などは確かめてレポートをまとめること。また、用語の使い方が、本によっては、講義とは異なっている場合がある。その点についても十分に注意すること。

試験に対する注意事項. 期末試験は、もちろん教科書、参考書、ノートは持ち込んではいけないが、自分が書いたレポートは参照してもよい。

科目名　　基本群と被覆空間　　　　　**担当教官**　太田 啓史

サブタイトル

対象学年　　３年　　　　　**６単位**　　**選択**

教科書

参考書　シンガー・ソープ，トポロジーと幾何学入門　（培風館）．
Dubrovin-Fomenko-Novikov, Modern Geometry-Methods and Applications II (Springer).

予備知識

2 年次までの微積分，線形代数及び，3 年前期までの科目特に集合と位相，群に関する基本事項は既知とする，と授業案内には書いたが授業中に適宜復習した.

講義内容

ホモトピーの概念を導入し，基本群とその性質を述べ，被覆空間との代数と幾何の対応関係を講義した．具体的な講義内容は以下の通り：

1. 講義の概要（0.5 回）
   - 1.1) 空間に対して代数的な対象「群」を対応させる，という考え方.
   - 1.2) 空間が「同じ」とは？写像が「同じ」とは？
2. ホモトピー（1 回）
   - 2.1) 位相空間，連続写像の復習（開集合，連続写像，$\epsilon - \delta$ との関係，同相.）
   - 2.2) ホモトピー.（写像のホモトピー，ホモトピー同値類，空間のホモトピー型，変形レトラクト，例（ $\mathbf{R}^n$ は可縮，同相とホモトピー同値の違い）.
3. 基本群　（4.5 回）
   - 3.1) 定義（動機付け（空間を見るのに点だけを考えずに曲線の集合も考えよう），弧状連結の復習，道の空間，ループ空間，基点を止めたホモトピー，基本群の定義，積構造，群になることの証明，ホモトピーの具体的な構成方法.）
   - 3.2) 基点のとりかえと内部自己同型.
   - 3.3) 演習（ $\mathbf{R}^n \setminus O$ と S^{n-1}，具体的なホモトピーの構成，他計３題）.
   - 3.4) 連続写像が引き起す基本群の間の準同型写像.
   - 3.5) 基本群のホモトピー不変性．証明．単連結の定義とイメージ，例（ $\mathbf{R}^2 \setminus O$ と $\mathbf{R}^3 \setminus O.$ ）
   - 3.6) $\pi_1(S^1)$ の計算（ log の多価性と回転数，$\pi_1(S^1) \cong \mathbf{Z}$ の意味.）
   - 3.7) Van Kampen の定理.（生成元と関係式による群の表示，剰余群との関係，自由積，定理の意味，証明はやらず.）例（ブーケ，S^n，T^2，種数 g の閉リーマン面）基本群のアーベル化，1 次ホモロジー群，閉リーマン面の位相的分類の話し.

4. 被覆空間（2 回）

- 4.1) 定義と簡単な例.（局所弧状連結性．逆関数定理との関係）
- 4.2) 群作用と軌道空間.（位相群とその作用，固定化群，軌道，不動点，自由な作用，軌道空間，商位相，いろいろな例（ S^1，実及び複素射影空間）．有限群が自由に作用している場合．無限群が真性不連続に作用している場合．例（実射影空間，レンズ空間）.）

5. 被覆空間と基本群の関係（3 回）

- 5.1) 分類定理の提示.（局所単連結，被覆の同型，群の共役と基点の取り変え，対応関係，普遍被覆，ガロア被覆，定理からのいくつかの帰結，いろいろな例，実射影空間，レンズ空間の基本群）.
- 5.2) 写像の持ち上げ.（存在と一意性を被覆ホモトピー性質から証明した.（ log の多価性と分枝を選ぶことを写像のリフトの観点から説明しなおす．証明の中で，連結な空間の開かつ閉な部分集合は全体か空であること，ハウスドルフ性と対角集合が閉集合であることなどの復習も行った.）射影が引き起す準同型が単射であること．一点の逆像と基本群の剰余類との対応.）
- 5.3) 分類定理の証明その 1（単射性）.
- 5.4) 分類定理の証明その 2（全射性）.（普遍被覆空間の構成，一般の場合の被覆空間の構成.）

講義の感想

思いのほか十分な演習の時間を設けることができなかったことは強く反省している．色々な例を自分で講義してしまったことによる．

参考資料

レポート問題 No. 2　2001.12.21

1.　$\mathbf{R} = \{(0,0,0,x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_4 \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^4$ として、$\mathbf{R}$ を $\mathbf{R}^4$ の部分空間とみる。$\mathbf{R}^4$ から $\mathbf{R}$ を除いた補集合 $\mathbf{R}^4 \setminus \mathbf{R}$ の基本群を求めよ。

2.　X を n 次元多様体とし、p をその一点とする。$n \geq 3$ ならば、$\pi_1(X \setminus p) \cong \pi_1(X)$ であることを示せ。但し $X \setminus p$ は X から一点 p を除いた補集合である。

3.　X と Y はともに弧状連結な空間とし、$p_X : X \times Y \to X$ 及び $p_Y : X \times Y \to Y$ をそれぞれ射影とする。それらが基本群に引き起す準同型写像を $p_{X*} : \pi_1(X \times Y) \to \pi_1(X)$ 及び $p_{Y*} : \pi_1(X \times Y) \to \pi_1(Y)$ とすれば、$p_{X*} \times p_{Y*} : \pi_1(X \times Y) \to \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$ は同型写像を与えることを示せ。

4.　n 次元閉円板を $D^n = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| \leq 1\}$ と書く。この時以下の問いに答えよ。

(1) $f : D^1 \to D^1$ が連続写像ならば、 $x \in D^1$ で $f(x) = x$ となるものが存在することを証明せよ。（このような点 x を f の不動点という。）

(2) $f : D^2 \to D^2$ が連続写像ならば、 $x \in D^2$ で $f(x) = x$ となるものが存在することを以下の方針で証明せよ。

(i) 背理法による。 f は不動点を持たないと仮定する。この時、次の性質 $(\#)$ をもつ写像 g を一つ構成せよ。但し D^2 の境界を $\partial D^2 = \{x \in D^2 \mid |x| = 1\}$ と書く。

$(\#)$ $g : D^2 \to \partial D^2$ は連続写像で、任意の $x \in \partial D^2$ に対し、$g(x) = x$ を満たす。

(ii) 実は、性質 $(\#)$ を満たす連続写像 g は存在しないことを基本群を考える ことにより証明せよ。

参考： $f : D^n \to D^n$ が縮小写像のとき、不動点が存在する（この場合は唯一 つ存在）ことは、昨年度の私の授業「解析学要論」でやった。

注: 1. 1 月 11 日 (金）午後 5 時締めきり。一階事務室の棚に提出する。
2. 誰かと相談したり、本を調べたりしてもよいが、その場合でもレポートを書く際には、自分で理解し納得した上で、必ず **自分の言葉で** 書くこと。(出せばよい、というものではない。）その際は誰と相談したか、また教えてもらったか、または本の名前等を謝辞、参考文献として明記すること。これは礼儀の問題である。
3. 授業についての要望・意見等あれば自由に書いて下さい。

期末試験　2002.02.13　9:30〜12:00

1. 次の言葉の定義を述べよ。
(1) ２つの連続写像 $f, g : X \to Y$ がホモトピックである。
(2) ２つの位相空間 X と Y が同じホモトピー型をもつ。

2. 次の (1)〜(4) までの例をそれぞれ１つずつあげよ。(証明不要)。
(1) 単連結な空間。
(2) 基本群が自明でない有限群である空間。
(3) 基本群が非可換群である空間。
(4) 単連結でなくかつ普遍被覆空間が可縮である空間。

3. ４つの空間 $\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2 \setminus \{1\text{ 点 }\}, \mathbf{R}^2 \setminus \{2\text{ 点 }\}, T^2 \setminus \{1\text{ 点 }\}$, をホモトピー型で分類せよ。

4. n 次元閉円板を $D^n = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| \leq 1\}$ と書く。この時以下の問いに答えよ。
(1) $f : D^1 \to D^1$ が連続写像ならば、 $x \in D^1$ で $f(x) = x$ となるものが存在することを証明せよ。(このような点 x を f の不動点という。)
(2) $f : D^2 \to D^2$ が連続写像ならば、 f は不動点を持つことを証明せよ。

5. $S^1 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ とし、写像 $p_k : S^1 \to S^1$ を $p_k(z) = z^k$ $(k = 1, 2, \cdots)$ とする。
(1) $p_k : S^1 \to S^1$ は被覆空間であることを証明せよ。
(2) X 上の２つの被覆空間 $p : \widetilde{X} \to X$, $p' : \widetilde{X}' \to X$ が同型であることの定義を述べよ。また $k \neq k'$ ならば $p_k : S^1 \to S^1$ と $p_{k'} : S^1 \to S^1$ は同型でないことを証明せよ。この事実は基本群の言葉で説明するとどういうことに対応するかを論ぜよ。
(3) 連続写像 $f : Y \to X$ が被覆空間 $p : \widetilde{X} \to X$ にリフトするための必要十分条件を基本群の言葉で述べよ。

(4) 写像 $p_m : S^1 \to S^1$ が被覆空間 $p_k : S^1 \to S^1$ にリフトするための m, k に関する必要十分条件を求めよ。その時、p_m のリフトを具体的に与えよ。

6.　m, n は自然数で $m \geq n+2$ とする。$\mathbf{R}^n$ を

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, ..., x_n, 0, ..., 0)\} \subset \mathbf{R}^m = \{(x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_m)\}$$

により $\mathbf{R}^m$ の部分集合とみる。この時 $\mathbf{R}^m$ から $\mathbf{R}^n$ を除いた補集合 $\mathbf{R}^m \setminus \mathbf{R}^n$ の基本群を求めよ。

科目名　**代数学 IV ／代数学概論 IV**　**担当教官**　**中西 知樹**

サブタイトル　リー代数の表現入門

対象学年　**４年／大学院**　**２単位**　**選択**

教科書　特になし.
参考書　特になし.

予備知識

（シラバスより引用）群・環・代数などの代数系へのある程度の慣れを期待するが，リー代数については一から始めるので予備知識は不要.

講義内容

１．講義の目的 (シラバスより引用)

リー代数は純粋に代数的な構造としても興味は尽きないが，また幾何学や物理学などにも多くの応用を持っている．この講義では，単純リー代数とその表現論の基礎概念 (ルート系，ウエイト，テンソル積表現，既約分解，指標，Weyl 群など) に，リー代数の具体的な表現の例といろいろな構成法を通して慣れ親しむことを目標とする.

２．キーワード (シラバスより引用)

ウエイト

３．講義概要 (初回講義配布資料「講義アウトライン」より引用)

Part 1 (4 回) リー代数の基礎概念

リー代数の定義と例，表現の基礎概念について述べる．同時に $sl(2)$ の表現について詳しく調べる.

Part 2 (5 回) いろいろな表現とルートとウエイト

古典型リー代数の具体的表現の例を通してルート系とウエイトの理論を解説する．この講義の中心部分である.

Part 3 (3 回) アフィンリー代数と量子群

アフィンリー代数と量子群の場合に表現論がどのように発展しているか，有限次元リー代数の場合と比較しつつ解説する.

４． 実際に行った各講義の内容

10/9 休講.

Lect. 1 (10/16) Part 1-1 リー代数.

1. 定義 (代数, リー代数)
2. 例 ($gl_n(\mathbf{C})$, $gl(V)$)
3. 部分代数とイデアル (部分代数, イデアル, 商代数, 単純, 準同形, 準同形定理)
4. 線形リー代数 (gl_n, sl_n, sp_{2n}, $o(n)$, 単純リー代数の分類定理)
5. リー群とリー代数 (リー群とリー代数の対応，線形リー群)

Lect. 2 (10/23) Part 1-2 表現.

1. 表現 (定義, 例 (自明表現, adjoint 表現)
2. g-module (定義, 表現との等価性)
3. sl_2 の表現の例 ($m+1$ 次元表現 V_m)
4. 既約表現 (部分表現, 商表現, 既約表現，例)

Lect. 3 (10/30) Part 1-3 sl_2-weight.

1. 有限次元既約 sl_2-module の分類 (定理の主張)
2. sl_2-weight (weight, weight vector, weight space, 例, h の作用の半単純性, 基本性質)
3. 定理の証明
4. 指標 (定義, 例)

Lect. 4 (11/6) Part 1-4 テンソル積と既約分解.

1. 直和 (ベクトル空間の直和, g-module の直和とその weight 分解)
2. 既約分解 (定義, 例, 完全可約性に関する Weyl の定理)
3. テンソル積 (定義とその weight 分解)
4. テンソル積の既約分解 (例)

Lect. 5 (11/13) Part 2-1 sl_3 とその表現 (1). (Part 1 レポート提出)

0. Part 2 overview
1. sl_3 (定義, Chevalley generator と基本関係式)
2. sl_3-weight (定義, 基本性質, 例 (trivial 表現, basic 表現, adjoint 表現)

Lect. 6 (11/20) Part 2-2 sl_3 とその表現 (2). (Part 1 レポート返却)

1. simple root (定義, 基本性質)
2. Weyl 群 (定義, 構造, 有限次元表現の Weyl 不変性)
3. highest weight 表現 (定義, $V(\Lambda)$ の存在と一意性 (一意性のみ証明), 有限次元表現は h. w. 表現)
4. 有限次元既約表現の分類 (dominant integral weight, 定理, 必要条件の証明)

Lect. 7 (11/27) Part 2-3 sl_3 とその表現 (3).

1. テンソル積による $V(\Lambda)$ の構成 (fundamental weight, 分類定理の十分性の証明)
2. 例 ($V(\Lambda_1)\otimes V(\Lambda_1)$, $V(\Lambda_1)\otimes V(\Lambda_2)$ など)

配布資料: 1. Weyl 群を用いた分類定理の十分性の証明. weight 図

Lect. 8 (12/4) Part 2-4 sl_n.

3. sl_3-character (Lecture 7 の残り)(定義, 例, Weyl 群不変変数への特殊化)

1. sl_n (定義, Chevalley generator, 基本関係式)
2. weight (素朴な定義, h^* の元としての weight)
3. 表現の分類 (定理の主張のみ)
4. root と Weyl 群 (定義, 内積, Wely 群の構造)

配布資料: 1. Bourbaki の「表」. 2. sl_4 の weight 図

Lect. 9 (12/11) sp_{2n}.

1. sp_{2n} (定義, Chevalley generator, 基本関係式)
2. 表現の例 (分類定理, C_2 の basic 表現, そのテンソル積, adjoint 表現, Weyl 群)

配布資料: 1. sp_4 の h_R^* の内積.

Lect. 10 (12/18) Part 3-1 affine Lie algebra (1). (Part 2 レポート提出)

1. 準備 (Killing form)
2. $\widehat{sl}_2$ (定義, Jacobi identity, Chevalley generator, 基本関係式)
3. weight (Cartan subalgebra, weight)
4. adoint 表現と root

配布資料: 数学セミナー, V. カッツ・インタビュー

Lect. 11 (1/8) Part 3-2 affine Lie algebra (2). (Part 2 レポート返却, M2 口頭試問)

1. h_R^* の内積
2. Wely 群 (fundamental reflection, 作用の例 (adjoint 表現の weight, Λ_0 の orbit), 構造)
3. 表現の分類 (h. w. 表現, integrable 表現, 分類定理, Kac-Weyl 指標公式)

配布資料: $V(\Lambda_0)$ の weight 図.

Lect. 12 (1/15) Part 3-3 quantum group.

1. $U(g)$ (tensor algebra, universal enveloping algebra)
2. $U_q(g)$ (定義, $U_q(g)$ は $U(g)$ の変形)
3. 表現の例 (g 加群と $U(g)$ 加群, $m+1$ 次元既約表現)
4. 余積 ($U_q(g)$ の余積, Hopf 代数)

配布資料: algebra, coalgebra, bialgebra, Hopf algebra の定義

1/22 休講. (4 年口頭試問)

講義の感想

後半朝の冷え込みが厳しい日が続きましたが，朝早くきちんと来てくれる諸君に励まされ気持ちよく講義ができました. みなさんのさらなる数学のレベルアップを期待します.

科目名　幾何学 IV ／幾何学概論 IV　**担当教官**　大沢 健夫

サブタイトル

対象学年　４年／大学院　**２単位**　**選択**

教科書
参考書

予備知識

講義内容

前期の内容の続きであるが，論理的にはそれと独立に，閉リーマン面上の正則ベクトル束について，歴史をたどりながら以下の事項を重点的に解説した.

0. 楕円積分からアーベル関数論へいたるお話.
1. ベクトル束の定義，因子と直線束の対応，アーベル・ヤコビ対応についての解説．ヤコビ多様体がピカール多様体でありアルバネーゼ多様体である事情の説明.
2. アーベル・ヤコビ理論からリーマンの分解定理にいたる筋道（前期の内容）をふり返りながら，リーマン面上の直線束のモジュライ空間が古典論の土台をなしていることを確認．ベクトル束の理論を A. Weil が構想した事情を説明.
3. ベクトル束に関する基本結果である，Birkoff-Grothendieck の分解定理を定式化し，直線束の次数，完全列が分解するための障害としてのコホモロジー類を導入して，B-G の定理の証明の概容を紹介（藤田隆夫氏によるもの）．さらに楕円曲線上のベクトル束の Atiyah 理論にふれる．その過程で基本的な三つのクラス，すなわち stable bundles, simple bundles, indecomposable bundles を定義し，これらの間の関係，stable $\Longrightarrow$ simple $\Longrightarrow$ indecomposable をレポート問題として提出.
4. 基本群の表現とベクトル束の対応を整理した後，$GL(n,\mathbb{C})$ 表現に関する Weil の定理とその証明，$U(n)$ 表現に関する Narasimhan-Seshadri の定理の紹介と，その原論文の証明（の雰囲気）の紹介，さらに Donaldson による非線型 PDE を用いる証明の主要部（ good gauge の存在と minimizing sequence の追跡）の紹介を行なった．また NS の定理に小平・Spencer 理論をあわせると，正則ベクトル束のモジュライ空間に自然な複素構造が定義できることを強調した．小平・Spencer の変形理論の入門的なことと，Porster-Knorr の存在定理，および正則ベクトル束の可微分族の底空間に自然な複素構造が入るための条件について解説した.
5. 非安定ベクトル束に関する Gunning の理論を紹介した．ランクが 2 の場合に限るのであるが，maximally unstable bundles と射影構造が 1 対 1 に対応するという顕著な結果である． N-S 理論ほどには有名ではないが，最近射影構造に関する決定的な結果が得られたことにかんがみて（ Garo-Kapovitch-Marden の仕事）紹介させてもらった.

反省点:ちょっと分量が多すぎたかもしれない.

講義の感想

科目名　解析学 IV ／解析学概論 IV　**担当教官**　中西 敏浩

サブタイトル　複素力学系入門

対象学年　４年／大学院　**２単位**　**選択**

教科書　教科書はなし
参考書　A. F. Beardon, Iteration of Rational Functions, Graduate Texts Math. **132**, Springer
上田哲生・谷口雅彦・諸澤俊介共著 複素力学系序説 培風館
J. Milnor, Dynamics in One Complex Variable, Vieweg.
宇敷重広「フラクタルの世界 入門・複素力学系」日本評論社

予備知識

「数学基礎 V」 ならびに「関数論」で習う複素解析の基本的事項

講義内容

複素力学系は 1980 年代から急速に発展した新しい分野である．扱う対象はリーマン球面上での一変数有理関数の反復合成の力学系だが，たとえそれが z^2+c という単純な関数であってもすごく複雑でかつ興味深い．

有理関数の力学系を調べるときの足がかりとなるのは周期点のまわりでの挙動である．反発的周期点と呼ばれる点集合の閉包は Julia 集合と呼ばれ，特殊な場合を除きフラクタル集合である．その補集合 Fatou 集合はそれに属する点のまわりで有理関数の反復合成列が正規族をなすという特徴的性質をもつ．周期点と Julia 集合，Fatou 集合との関係を調べるのが複素力学系の中心的問題の一つである．

この講義が「正規族」という概念をキーとして複素力学系へのできるだけやさしい入門となるように心がけ，周期点と Fatou 集合，Julia 集合との関係，Fatou 集合の周期成分の分類などの基本的事項を解説した．

具体的な講義内容は以下の通り：

1. 正規族（3 回）
2. 有理関数の反復合成とジュリア集合（1 回）
3. 例外点（1 回）
4. 周期点とジュリア集合（1 回）
5. 吸引的周期点と線形化可能性（2 回）
6. 有理放物周期点と花びら定理（2 回）
7. ジュリア集合における反発的周期点の稠密性（1 回）

講義の感想

対象が有理関数の反復合成というとっつきやすさ，3 次の多項式の複素力学系でさえよくわからないという将来性など学生に受けのいい題材だと思った．実際,「有理形関数列の正規族」という一つの概念からいろいろな結果が次々と導かれるさまに学生は面白みを感じてくれたようだ．

上記の講義内容はシラバスで予定されていた項目の半分程度である．最初の授業で「正規族」について知っているかどうかを尋ねたところ知っている学生は一名のみ，また Arzela-Ascoli の定理を知っている者も 3 名しかいなかったので正規族に多くの時間をかけることにしたのが原因である.（おかげで大学院生に対しても Riemann の写像定理を既知のものとして扱ってはいけないことを知った.）1 回目の授業終了時点で当初の見込みの甘さを感じ Sullivan 以降の現代理論まで踏み込まず，目標をジュリア集合が反発的周期点の集合の閉包であることの証明に切り替えた.

「複素力学系」というサブタイトルでありながら，複素関数論における「正規族とその応用」だけを念頭に置いていて，自分としては力学系理論の講義だという意識はなかったので，一部の学生に誤解を与えたことは申し訳なく思う.

講義に複素力学系を取り上げるのは初めてで，講義は私自身の勉強と同時進行だった．定理の証明などは時間をかけて懇切丁寧に与え学生を置き去りにしないように務めたが，一方，いい加減だけれどなにかワクワクするようなものを伝えることができなかった．またコンピュータ・グラフィックスをもっと紹介できなかったのも悔やまれる．擬等角手術の理論を用いるといろいろな量のより良い評価が得られてスマ ートな講義ができたのだろうが，今回は初等的手法しか使わなかったのでとても面倒であった．再び同じ題材で講義をする機会があれば，擬等角写像を基礎にして講義を組み立てたい.

参考資料

演習問題集

注意. 必ずしも問題順に解答する必要はない．後に現れる問題がヒントとなることもある.

1　「有理関数の反復合成」に関する問題

問題 1.1. $R(z) = z^2 - 2$ の周期点について調べよ.

問題 1.2. $R(z)$ を有理関数とする．p を自然数とするとき $F(R^p) = F(R)$ (したがって $J(R^p) = J(R)$) であることを証明せよ．ただし R^p は R の p 回反復合成である.

問題 1.3. $R(z)$ を有理関数とする．$R(w) = \infty$ のとき w が R の通常点であるか特異点であるかを w における R の Laurent 展開を用いて特徴づけよ.

X, Y を距離空間とし d_Y で X の距離を表わすことにする．写像 $f : X \to Y$ の族 $\mathcal{F}$ が**正規族**であるとは，$\mathcal{F}$ の任意の部分列 $\{f_n\}$ が局所一様収束（すなわち X の任意のコンパクト部分集合上一様収束する）部分列を含むことである．すなわち，ある部分列 $\{f_{n_j}\}$ とある写像 $f : X \to Y$ が存在して，任意の $\epsilon > 0$ と任意のコンパクト集合 $K \subset X$ に対して，ϵ と K のみに依存する番号 J が存在して

$$J < i \text{ をみたせば，すべての } z \in K \text{ に対して} \qquad d_Y(f_{n_j}(z), f(z)) < \epsilon$$

となることである.

問題 1.4. $\overline{\mathbf{C}}$ の距離を球面距離で考えるとき，有理関数 $R : \overline{\mathbf{C}} \to \overline{\mathbf{C}}$ は連続関数であることをしめせ.

問題 1.5. $\overline{\mathbf{C}}$ の距離は球面距離で考えることにする．U, V をそれぞれ $\overline{\mathbf{C}}$ の領域，$g : V \to \overline{\mathbf{C}}$ は関数とする.

g は一様連続であるとする． U 上で定義され V に値をもつ関数族 $\mathcal{F}$ が正規族で，$\mathcal{F}$ のすべての収束部分

列の極限関数が U のすべての点で V に値をもつならば，$\mathcal{F}' = \{g \circ f : f \in \mathcal{F}\}$ が正規族になることを証明せよ．

注． g が**一様連続**であるとは，任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して

$$z, w \in V \text{ が } d(z,w) < \delta \text{ をみたせば} \qquad d(g(z), g(w)) < \epsilon$$

が成り立つことである．

問題 1.6. $U = \{z : 0 < |z| < 1\}$ 上定義された関数族 $\mathcal{F} = \{f_n(z) = z^n\}_{n=1}^{\infty}$ と $g(z) = e^{1/z}$ に対して $\mathcal{F}' = \{g \circ f_n : n = 1, 2, \cdots\}$ は正規族にならないことをしめせ．

問題 1.7. $\overline{\mathbf{C}}$ の距離は球面距離で考えることにする．U, V をそれぞれ $\overline{\mathbf{C}}$ の領域，$g : U \to V$ は連続関数とする．V 上で定義され $\overline{\mathbf{C}}$ に値をもつ関数族 $\mathcal{F}$ が正規族ならば，$\mathcal{F}' = \{f \circ g : f \in \mathcal{F}\}$ が正規族になることを証明せよ．

問題 1.8. $\{f_n\}$ は領域 D 上の正則関数族からなる正規族とする．もし D のある空でない開部分集合 W で f_n がある関数 f に点別収束すれば，D 上の正則関数 F で，$F|_W = f$ をみたすものが存在し，f_n は F に局所一様収束する．このことを証明せよ．

問題 1.9. $P(z) = z^2 - 2$ とする．
(i) 区間 $[-2, 2]$ (したがって，その補空間 $\Omega = \overline{\mathbf{C}} - [-2, 2]$) は R について完全不変であることをしめせ．
(ii) $\{P^n|_{\Omega}\}_{n=1}^{\infty}$ は正規族であることを示せ．
(iii) 上の (ii) より $F(P)$ は連結であることをしめせ．さらに $z \in F(P)$ ならば $P^n(z) \to \infty$ $(n \to \infty)$ であることをしめせ．(問題 1.8 の結果をもちいる．)
(iv) $J(P) = [-2, 2]$ であることを証明せよ．

問題 1.10. $\overline{\mathbf{C}}$ からそれ自身への正則同型全体の集合は

$$\mathbf{M\ddot{o}b} = \left\{ g(z) = \frac{az+b}{cz+d} : a, b, c, d \in \mathbf{C}, ad - bc \neq 0 \right\}$$

である．その元を Möbius 変換という． $\mathbf{M\ddot{o}b}$ は写像の合成に関して群をなす．2 次の特殊線形群

$$SL(2, \mathbf{C}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbf{C}, \quad ad - bc = 1 \right\}$$

から $\mathbf{M\ddot{o}b}$ への対応を

$$\chi(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

で定める． χ が (群の間の) 全射準同型であり

$$\ker \chi = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

であることをしめせ．

問題 1.11. 球面距離 $d(\cdot, \cdot)$ は球面計量 $ds^2 = \dfrac{4|dz|^2}{(1+|z|^2)^2}$ によって定まる．すなわち $z, w \in \overline{\mathbf{C}}$ に対して

$$d(z, w) = \inf_C \int_C \frac{2|dz|}{1+|z|^2}.$$

ただし inf は z と w を結ぶ区分的 C^1 級曲線全体についてとる．実際，立体射影 $\pi : \mathbf{S}^2 \to \overline{\mathbf{C}}$ による $\pi^{-1}(z)$ と $\pi^{-1}(w)$ を結ぶ短い方の大円弧の像 C 上の線積分が inf を与える．

(1) Möbius 変換 $g(z)$ が ds^2 について等長的ならば $(g^*(ds^2) = ds^2)$,

$$g(z) = \frac{az+b}{-\bar{b}z+\bar{a}}, \quad a, b \in \mathbf{C}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1,$$

の形になることを示せ．(ヒント: $g(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ が球面計量について等長的であることを数式で表わすと

$$\frac{2|g'(z)dz|}{1+|g(z)|^2} = \frac{2|dz|}{1+|z|^2} \Longleftrightarrow |az+b|^2 + |cz+d|^2 = 1 + |z|^2 \quad (z \in \mathbf{C}).$$

である．)

(2) $g(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ $(ad-bc=1)$ に対して $\|g\| = (|a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2)^{1/2}$ とおく．g は球面距離について Lipschitz 連続であることをしめせ．実際

$$d(g(z), g(w)) \le M d(z, w), \qquad M = \frac{1}{2}[(\|g\|^4 - 4)^{1/2} + \|g\|^2],$$

が成り立つ．(ヒント: $\Phi(g, z) = \dfrac{1+|z|^2}{|az+b|^2+|cz+d|^2}$ とおくとき $\sup|\Phi(g,z)|$ を求めればよい．しかしこのままでは計算しづらいので $\Phi(h \circ g, z) = \Phi(h, g(z))\Phi(g, z)$ をもちいて

$$\sup|\Phi(g,z)| = \sup \frac{1}{|\Phi(g^{-1}, g(z))|} = \sup \frac{1}{|\Phi(g^{-1}, z)|}.$$

を計算したほうがよい．)

問題 1.12. (1) $\overline{\mathbf{C}}$ 上の球面弦距離を

$$d_0(z,w) = \begin{cases} \dfrac{2|z-w|}{(1+|z|^2)^{1/2}(1+|w|^2)^{1/2}} & (z, w \in \mathbf{C} \text{ のとき}) \\[2ex] \dfrac{2}{(1+|z|^2)^{1/2}} & (z \in \mathbf{C},\ w = \infty \text{ のとき}) \\[2ex] 0 & (z = w = \infty \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定める．球面弦距離と球面距離 $d(\cdot, \cdot)$ との間に

$$d_0(z,w) = 2\sin\left(\frac{d(z,w)}{2}\right)$$

の関係が成り立つことをしめせ．さらに次の不等式をしめせ．

$$(2/\pi) d(z,w) \le d_0(z,w) \le d(z,w).$$

(2) $m > 0$ とする． Möbius 変換 g で

$$d(g(0), g(1)) \ge m, \quad d(g(1), g(\infty)) \ge m, \quad d(g(\infty), g(0)) \ge m$$

をみたすもの全体は一様 Lipschitz 連続であること，すなわち m のみに依存する正定数 M があって

$$d(g(z), g(w)) \le M d(z, w) \ (z, w \in \overline{\mathbf{C}})$$

となることを証明せよ.

2　「有理関数の反復合成」に関する問題

問題 2.1.　R は有理関数とする．$z, w \in \overline{\mathbf{C}}$ に対する関係 $\sim$ を次のように定める．

$z \sim w \overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow}$ ある非負整数が n, m が存在して $R^n(z) = R^m(w)$.

このとき関係 ‘ $\sim$ ’が同値関係であることをしめせ．さらに z と同値な点の集合 $[z]$ が完全不変であることをしめせ.

問題 2.2.　$E \subset \overline{\mathbf{C}}$ が有理関数 R の完全不変集合ならば各 $z \in E$ に対して $[z] \subset E$ であることをしめせ.

問題 2.3.　$\deg R \geq 1$ のとき，有理関数 R の Fatou 集合 $F(R)$（したがって Julia 集合 $J(R)$）は R について完全不変であることを証明せよ.

問題 2.4.　R を有理関数とし，$d = \deg(R)$ とする．

(1)　R は例外点を一つだけもち，それが ∞ であるとき，$R(z)$ は多項式であることをしめせ.

(2)　R は例外点を 2 つだけもち，それらが $0, \infty$ であるとする．もし $R(0) = 0,\ R(\infty) = \infty$ ならば $R(z) = az^d$ (a はある 0 でない複素数) の形であることをしめせ.

(3)　R は例外点を 2 つだけもち，それらが $0, \infty$ であるとする．もし $R(0) = \infty,\ R(\infty) = 0$ ならば $R(z) = az^{-d}$ (a はある 0 でない複素数) の形であることをしめせ.

(4) $d \geq 2$ ならば，上のいずれの場合も例外点は R の Fatou 集合 $F(R)$ に含まれることをしめせ.

問題 2.5. R を有理関数，$g \in \mathbf{M\ddot{o}b}$ とするとき，$F(g \circ R \circ g^{-1}) = g(F(R))$ (したがって $J(g \circ R \circ g^{-1}) = g(J(R))$) であることを しめせ.

問題 2.6.　R を 1 次の有理関数，すなわち Möbius 変換とする:

$$R(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad (a, b, c, d \in \mathbf{C}, ad - bc = 1).$$

ただし

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする．R の Fatou 集合，Julia 集合を求めよ．(ヒント: 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を共役によって Jordan 標準形にしてから考えると便利.）

3　「Julia 集合 と Fatou 集合の性質（その 2）–Julia 集合は完全集合」に関する問題

問題 3.1.　完全集合は非可算無限濃度をもつことをしめせ.

問題 3.2.　$E \subset \overline{\mathbf{C}}$ は有限集合とする．$\deg R \geq 1$ である有理関数 R に対して $R^{-1}(E) \subset E$ ならば E は R について完全不変であることをしめせ.

問題 3.3. $a \neq \pm 1$ とする．

$$R_a(z) = \frac{z^2 - z}{1 + az}$$

とおく．以下のことをしめせ．

(a) R_a の固定点は $0, \infty, \alpha = 2/(1-a)$ である (注)．

(b) R_a^2 の固定点は $0, 0, 0, \infty, \alpha$ である．

(c) R_a は 2-サイクルをもたないことをしめせ．

(d) もし，ある $g \in \mathbf{M\ddot{o}b}$ が存在して $g \circ R_a \circ g^{-1} = R_b$ ならば

$$b = a \quad \text{または} \quad b = \frac{3-a}{1+a}.$$

問題 3.4. $P(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ $(a_2 \neq 0)$ を 2 次の多項式とするとき，ある $g \in \mathbf{M\ddot{o}b}$ が存在して $g^{-1} \circ P \circ g$ は $z^2 + c$ の形の多項式になることをしめせ．

4 「吸引的周期点」に関する問題

問題 4.1. R を有理関数とし，$p \in \overline{\mathbf{C}}$ を R の周期 N の吸引的周期点とする．$A(p, R^N)$, $A(R(p), R^N)$ をそれぞれ $p, R(p)$ を含む直接吸引鉢とするとき，

$$R(A(p, R^N)) = A(R(p), R^N)$$

が成り立つことをしめせ．(Lemma 4.2.)

問題 4.2. (1) f_n を $z = \zeta$ の近傍 U で定義された正則関数列で次の展開をもつとする．

$$f_n(z) = a_0^{(n)} + a_1^{(n)}(z-\zeta) + a_2^{(n)}(z-\zeta)^2 + \cdots + a_k^{(n)}(z-\zeta)^k + \cdots.$$

もし任意の正数 K に対して $|a_1^n| < K$ をみたす n が有限個しかなければ $\{f_n\}$ は正規族でないことをしめせ．

(2) f を $z = \zeta$ の近傍で定義された正則関数で次の展開をもつとする．

$$f(z) = \zeta + \lambda(z-\zeta) + a_2(z-\zeta)^2 + \cdots + a_k(z-\zeta)^k + \cdots.$$

このとき f の n 回合成は $z = \zeta$ の近傍で

$$f^n(z) = \zeta + \lambda^n(z-\zeta) + a_2^{(n)}(z-\zeta)^2 + \cdots + a_k^{(n)}(z-\zeta)^k + \cdots.$$

の形に展開されることをしめせ．ただし $a_k^{(n)}$ $(k = 2, 3, ...)$ は $\lambda, a_2, a_3, ...,$ によって定まるある複素数である．

(3) ζ を有理関数 R の反発的周期点とするとき $\zeta \in J(R)$ となることをしめせ．(ヒント：上の設問と問題 1.2 を用いる．)

問題 4.3. $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ を次数 $n \geq 2$ をもつ 多項式とする．このとき無限遠点 ∞ は P の超吸引的不動点であることを しめせ．

5 有理放物的周期点と花びら定理

問題 5.1 (花びら定理の完成) f を $D = \{z : |z| < r_0\}$ $(r_0 < 1)$ で定 義された正則関数で，原点でのテイラー展開が

$$f(z) = z - z^{p+1} + a_{2p+1}z^{2p+1} + a_{2p+2}z^{2p+2} + \cdots \quad (p \geq 1)$$

であるとする．$\sigma(z) = 1/z^p$ は $S = \{z = re^{i\theta} : |\theta| < \pi/p\}$ から $W = \mathbf{C} - \{x \in \mathbf{R} : x \leq 0\}$ への正則な同相写像である．その逆写像を $\sigma^{-1} : W \to S$ で表わす．このとき

$$g(w) = \sigma f \sigma^{-1}(w) = w + p + \frac{A}{w} + \theta(w)$$

の形となる．ここで $A \in \mathbf{C}$, $\theta(w)$ は $\{w : |w| > r_0^{-p}\}$ で正則で，ある $B > 0$ が存在して

$$|\theta(w)| < \frac{B}{|w|^{1+(1/p)}} \leq \frac{B}{|w|}$$

をみたす．

$$\Pi_0(t) = \{z = re^{i\theta} : r^p < t(1 + \cos p\theta),\ |\theta| < \pi/p\}$$

を一つの petal とする．十分小さい $t > 0$ に対して

(1) $f(\Pi_0(t)) \subset \Pi_0(t)$

(2) $\Pi_0(t)$ 上局所一様に $f^n(z) \to 0$ $(n \to \infty)$

をしめしたい．そのためには $\Pi = \sigma\Pi_0(t)$ とおくとき

(1') $g(\Pi) \subset \Pi$

(2') Π 上局所一様に $g^n(z) \to \infty$ $(n \to \infty)$

をしめせばよい．以下の問いに答えよ．

(i) 次のことをしめせ．

$$\Pi = \{w = x + iy : y^2 > 4K(K - x)\} \qquad \text{ただし}\ \ K = 1/(2t).$$

さらに $w \in \Pi$ ならば $|w| > K$ である．

(ii) t を $K = 1/(2t)$ が

$$K > \max\{r_0^{-p}, 3(|A| + B)\}(> 1) \tag{1}$$

をみたすように選ぶと，$g(\Pi) \subset \Pi$ でることをしめせ．すなわち $w = x + iy, y^2 - 4K(K - x) > 0$ であるとき $g(w) = X + iY$ は $Y^2 - 4K(K - x) > 0$ をみたすことをしめす．(ヒント: $X = x + p + a$, $Y = y + b$ である．$a + ib = A/w + \theta(w)$ とおくと

$$|a + ib| \leq (|A| + B)/|w| < K/(3|w|) < 2Kp/(3|w|) < 2p/3$$

が成り立つ．)

(iii) K が (1) をみたすとき，$w \in \Pi$ ならば

$$\mathrm{Re}[g(w)] > \mathrm{Re}[w] + p/2$$

であることをしめせ．これより

$$\mathrm{Re}[g^n(w)] > \mathrm{Re}[w] + np/2$$

が成り立つことがわかる．このことより (2') を証明せよ．

問題 5.2 上の問題と同じ設定の元で $t > 0$ が十分小さいとき $\Pi_0(t)$ 上局所一様に

$$\arg f^n(z) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

であることをしめせ．

6 Julia 集合における反発的周期点の稠密性

問題 6.1 (Julia 集合の描画アルゴリズム) $R(z)$ を $\deg R \geq 2$ をみたす有理関数とする．z_0 を R の反発的周期点とすると z_0 の逆像 $\{z_1, ..., z_{n_1}\} = R^{-1}(z_0)$ $(n_1 \leq d)$ を複素平面にプロットし，また $z_1, ..., z_{n_1}$ のそれぞれについてその逆像をプロットし，以下この操作をつづけると R の Julia 集合の概形が得られる．このことを実行するコンピュータ・プログラムを作成し，

$$R(z) = \lambda z + z^2, \quad \lambda = 1 + \sqrt{-3}$$

(これは $z = 0$ を反発的不動点にもつ) の Julia 集合のグラフィックを提出すること．また $|\lambda| > 1$ となる λ をいろいろ代入して $J(R)$ を描画してみよ．

科目名　数理解析・計算機数学 II ／数理解析・計算機数学概論 II　**担当教官**　内藤久資　坂上貴之

サブタイトル　プログラミング, アルゴリズム

対象学年　４年／大学院　３／２単位選択

教科書

参考書　B. Kernighan, D. Richie, プログラム言語C（第２版）, 共立出版
一松信, 数値解析, 朝倉書店
J. Nievergelt 他, 数学問題へのコンピュータアプローチ, 培風館
R. Séroul, Programming for Mathematicians, Springer

予備知識

線形代数, 微積分の基礎. 及び, 前期で学習したＣ言語.

講義内容

【授業の目的】（講義シラバスに記載した内容）

前期に引き続いて, Ｃ言語のプログラミングと種々のアルゴリズムについて解説を行う. これらのアルゴリズムの中で, これまでに学習した数学が生かされていることがわかる形で講義を進めたい.

【授業予定と内容】

行列演算, 算術式の評価などのアルゴリズムの解説を行う.

Ｃ言語の内容としては, 前期で取り扱えなかった, 多重配列とポインタの扱い, 構造体, 自己参照構造体等を解説する. これらを利用して, 上記のアルゴリズムをプログラムとして実現することも目的とする.

【実際の授業内容】

講義は内藤が, 実習は内藤と坂上の２名で担当した.

後期の計算機の授業は, 前期でやり残したＣ言語の内容の解説とともに, それを利用するアルゴリズムの解説を主に考えた. また, 数学のみでなく, 情報科学に近い内容のトピックを選び, 比較的平易な解説をすることを考えた.

今年度は, 前者の内容として, 行列演算, 特に連立一次方程式の解法に関わるアルゴリズムを, 後者の内容として, コンパイラの理論, 特に算術式の文法とその実装を取り上げげた.

● 行列演算の内容

Ｃ言語で行列を表現しようとすると, 自然に２次元配列があらわれる. １次元配列とポインタのある種の等価性は, Ｃ言語を学ぶ上で重要なテーマであり, 理解が難しい部分でもある. しかし, １次元配列とポインタの等価性は, ポインタの正確な理解が無くても, ある種, 機械的な書き換えを行うことにより, プログラムを記述することが可能であるが, 多次元配列を扱ったとたん, それとポインタの「等価性」は必ずしも自明では無くなり, ポインタやメモリアロケーションの正確な理解なしには正しい記述は不可能である. 具体的

な行列演算に入る前に, 多次元配列とポインタとの「等価性」の意味を考察し, 「行列の和」などを例にあげ, 多次元配列の扱いを解説することを考えた. また, 「可変サイズの行列」（すなわち, 外部データによって, 行列のサイズが規定される場合）を扱う目的で, メモリの動的な確保と解放の方法と意味を扱い, 「有理数係数の行列」を扱う目的で, 構造体とその演算方法について解説することを考えた. これらのプログラムの記述方法は, 天下りにデータ構造を定義するのではなく, プログラム開発の実例を示すという意味で, 最も簡単な固定サイズの２重配列からはじめて, より多くの機能を持たせるために, より一般なデータ構造を考えるという, ステップ・バイ・ステップにプログラムを一般化していく方法で解説を行った.

以上のような準備の下で, 連立一次方程式の解法の代表例である, 「消去法」と「反復法」を考察した. 消去法では, 非正方行列の場合やランクが落ちている場合に対して, 解が存在しないことの判定のアルゴリズム, 解が一意で無い場合の一般解を求めるアルゴリズムに対しても言及した. ガウスの消去法の応用として, ジョルダン標準形とジョルダン基底を求めるアルゴリズムも考察した. 一方, 反復法では, その基礎となる縮小写像の原理からはじめて, スペクトル半径と収束の判定方法についても考察した.

また, 「ガウス＝ジョルダンの消去法」を解説する段階では, アルゴリズムをこちらから示すのではなく, 出席者全員でアルゴリズムを開発することを行った. すなわち, 連立一次方程式を解くためにどのような手順を行えば良いかを, 出席者全員で考え, その方法の問題点を見つけ, アルゴリズムとして記述する手順を行った. なお, 消去法では有理数係数と浮動小数点係数の両方を扱い, その計算手順の差異と浮動小数点演算の難しさも考察した.

● コンパイラの基礎理論の内容

通常我々は “$1+2\times 3$” を “7” と答える. しかし, １００円ショップで電卓を入手して, “$1+2\times 3=$” と入力すると “9” と出力することがある. 我々がこのような「算術式」をどのように理解し, １００円ショップで売っている電卓は, なぜこのような出力をするのかという疑問からはじめて, 「算術式」の文法を定義し, それを解釈する言語処理系（コンパイラ）の構成の手順を解説することを目標とした.

はじめに, 「四則演算のみからなる算術式」に求められる文法を考察した. すなわち, 「乗除優先」と「四則演算は左結合法則を持つ」という２つのルールがあることを述べ, それを「文法」として記述することと, 計算機に「文法」を理解させることがコンパイラを構成することの基本事項であることを解説し, 以後, 「算術式」のコンパイラを構成する手順に入った.

具体的なコンパイラ構成の方法として, 字句解析系と正規表現を解説し, 字句解析系を実現するための方法としての, 有限状態オートマトンの構成と lex 処理系の解説を行い, lex 処理系で簡単な字句解析系を構成した.

次に, 文脈自由文法により「四則演算からなる算術式」の文法を記述し, 字句解析系を通った文字列の解釈の方法について考察した. はじめに, 算術式の構文木の構成とポーランド後置記法について解説し, 構文木の種類についても, カタラン数を定義してその母関数を計算することにより, 算術式の複雑さについての考察を行った. さらに, プッシュダウン・オートマトンと等価なアルゴリズムを用いて, 文脈自由文法から解析木を構成し, LR(1) 構文解析系を構成した. ここでは実際に yacc 処理系を用いて, 算術式の構文解析を行う処理系を構成した.

最後に, シンボル・テーブルの構成方法と, ３番地コードを用いた, 具体的なコンパイラの構成を行い, データ記憶域をもつ算術式のみからなるプログラム言語を設計し, その翻訳系のプログラミングを行った.

【具体的な講義内容は以下の通り】

■ 第１回目（１０月１１日）

Ｃ言語（１）

- 構造体
  有理数演算, 複素数演算を例にして, それぞれの和・積などの関数の書き方を解説する.

■ 第２回目（１０月１８日）

Ｃ言語（２）

- 多重配列とポインタ
  特に, 配列とポインタの違いを明確にする. （内部でのメモリ配置）
  二重ポインタの扱いと, メモリの取得方法.
  行列演算を例にして, それらの和・スカラー倍・積などを書く.

■ 第３回目（１０月２５日）

連立一次方程式（１）

- 可解性の条件
- Gauss-Jordan の消去法

■ 第４回目（１１月１日）

連立一次方程式（２）

- Gauss の消去法
- LU 分解
- 三重対角行列と LU 分解

■ 第５回目（１１月８日）

連立一次方程式（３）

- ユークリッドの互除法と消去法
- Jacobi の反復法
- Gauss-Seidel の反復法
- 縮小写像の原理と行列のノルム

■ 第６回目（１１月１５日）

連立一次方程式（４）

- 反復法の解析

■ 第７回目（１１月２２日）

連立一次方程式（５）

- Jordan 標準形

■ 第８回目（１１月２８日）

コンパイラ構成の基礎（１）

- $1 + 2 * 3 = 7$ or 9 ?
- 後置記法と構文木

■ 第９回目（１２月６日）

コンパイラ構成の基礎（２）

- 構文木とカタラン数
- 整列二分木

■ 第１０回目（１２月２０日）

コンパイラ構成の基礎（３）

- 正規表現と有限状態オートマトン
- lex

■ 第１１回目（１月１０日）

コンパイラ構成の基礎（４）

- 文脈自由文法
- 構文解析
- yacc

■ 第１２回目（１月１７日）

コンパイラ構成の基礎（５）

- 構文主導型翻訳
- 中間コード
- コンパイラの作成

【実習内容】

■ 第１回目（１０月１１日）

- 有理数の和・積を求める関数を, 値を返す関数と, ポインタを返す関数の両方を書きなさい.
- 複素数の和・積を求める関数を, 値を返す関数と, ポインタを返す関数の両方を書きなさい.

■ 第２回目（１０月１８日）

- $n \times m$ 行列の和を求める関数を書きなさい.
- $n \times m$ 行列と $m \times k$ 行列の積を求める関数を書きなさい. 積が定義できないよ

うな引数が渡されたときには, 何らかのエラー処理を行いなさい.

■ ３回目以後

以下のレポート問題をネタにした実習

【レポート問題（出題：内藤）】

▼ レポート問題１（２００１年１１月１日）

- `report-01-01`

  Gauss の消去法を用いて, 連立一次方程式を解くプログラムを書きなさい. 行列は正方行列とする. 行列が正則でない場合には, 可解性を判定する必要はない.

- `report-01-02`

  正方行列を LU 分解するプログラムを書きなさい. 行列が正則でない場合には, 可解性を判定する必要はない. この LU 分解を用いて, 連立一次方程式を解くプログラムを書きなさい.

- `report-01-03`

  対角優位な三重対角行列を Crout のアルゴリズムで LU 分解する場合, 枢軸選択が必要ないことを証明しなさい.

▼ レポート問題２（２００１年１１月８日）

- `report-02-01`

  Jacobi の反復法を用いて, 連立一次方程式を解くプログラムを書きなさい.

- `report-02-02`

  Gauss-Seidel の反復法を用いて, 連立一次方程式を解くプログラムを書きなさい.

- `report-02-03`

  正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して,

  $$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|,$$
  $$\|A\|_2 = \max_j \sqrt{|\mu_j|},$$
  $$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|,$$

  であることを証明しなさい. ただし, $\{\mu_j\}$ は A^*A の固有値とする.

▼ レポート問題３（２００１年１２月６日）

- `report-03-01`

  1. $\alpha \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して, 二項係数 $\binom{\alpha}{k}$ を

  $$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

で定義する. この時, 巾級数

$$\sum_{k\geq 0}\binom{\alpha}{k}x^k$$

は $|x|<1$ の時に収束し,

$$(1+x)^\alpha=\sum_{k\geq 0}\binom{\alpha}{k}x^k$$

となることを証明せよ.

2. 二項係数は次の関係を満たすことを証明せよ.

$$\binom{r}{k}=(-1)^k\binom{k-r-1}{k},\quad \binom{r}{k}\binom{r-1/2}{k}=\frac{1}{2^{2k}}\binom{2r}{2k}\binom{2k}{k},\quad \binom{n-1/2}{n}=\frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}.$$

3. カタラン数 C_n は

$$C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

となることを証明せよ.

- `report-03-02`

  ０から９までの数を（重複を許して）４つ利用して, 四則演算を行って答えが１０になるかどうかを調べよう. この計算に関しては, 次の事実が知られている.

  「４つの数が相異なり, ０を含まないときには, 答えを１０にする算術式が存在する.」

  – この事実をプログラムによって確かめよ.

  – 利用できる数の範囲を変更したり, 利用できる数のかず（４つ）を変更したり, 求めるべき答えを変更したりしたとき, 上の事実のような結果を得ることが出来るかを考察せよ.

▼ レポート問題４（２００２年１月１０日）

- `report-04-01`

  次のような条件文を生成する文法は曖昧であることを示せ.

  $\langle$ 文 $\rangle$ ::= **if**$\langle$ 条件 $\rangle$ **then**$\langle$ 文 $\rangle$ |**if**$\langle$ 条件 $\rangle$ **then**$\langle$ 文 $\rangle$ **else**$\langle$ 文 $\rangle$ | $\langle$ 他の文 $\rangle$

- `report-04-02`

  四則演算, 巾乗演算及び単項のマイナス演算子を含む算術式を記述する文脈自由文法を, バッカス・ナウア形式を用いて書け.

【レポート問題（出題：坂上)】

以下の４題の問題を適宜選んで解答せよ.

▼ 問題１ 区間 $(-1,1)$ の端点で特異性を持つ関数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ の広義積分

$$(*)\qquad \int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\pi$$

を数値積分する.

(1) 積分 $(*)$ を台形公式によって数値積分し, 区間分割点の個数と数値積分の誤差の関係をグラフ化して示せ.

(2) 積分 $(*)$ を $x = \phi(t) = \tanh\left(\dfrac{\pi}{2}\sinh t\right)$ なる変数変換で置換して, t に関する積分

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

と変換してから, 台形公式を使って数値積分する. この数値積分を実行し, その時の区間分割点の個数と数値積分の関係をグラフ化せよ. そして (1) の数値計算の結果と比較せよ. [このような数値積分法を**二重指数型数値積分公式 (DE 公式)** と呼ぶ.]

(3) 上のような結果がなぜ得られるのか, 文献その他を自由に調べてもよいので, 数学的に考察してレポートせよ.

▼ **問題２** $f(x) = \exp(2x)$ とする. この関数の微分

$$a = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

を有限の刻み幅 $h = h_n = \frac{1}{2^n}$ による前進差分

$$a_n = \frac{1}{h_n}\left(f(x+h_n) - f(x)\right)$$

で近似する.

(1) n と誤差 $a_n - a$ の関係をグラフ化して調べよ.

次に数列 $\{a_n^{(m)}\}_{n=m}^{\infty}$ を以下のように定義する.

$$a_n^{(m)} = \frac{a_n^{(m-1)} - 2^{-m}a_{n-1}^{(m-1)}}{1 - 2^{-m}}, \qquad a_n^{(0)} = a_n, \qquad (n \geq m).$$

(2) この時, $m = 1, 2, 3, 4, 5$ に対する数列 $\{a_n^{(m)}\}_{n=m}^{\infty}$ を数値的に求め, n と誤差 $a_n^m - a$ の関係をグラフ化して調べよ.

(3) 上の結果を数学的に考察せよ. [ヒント:$f(x+h)$ の展開を行って, 数列の定義に代入して見よ.]

▼ **問題３** 次の方程式の解を Newton 法で求め, 近似解の真の解への収束の様子を観察せよ.

(1) $x^3 + 2x^2 - 4x - 1 = 0, \qquad x \in \mathbb{R}$

(2) $z^3 = 1, \qquad z \in \mathbb{C}$

[ヒント: $\mathbb{C}$ と $\mathbb{R}^2$ を同一視して二変数の Newton 法を用いよ.]

▼ **問題４** 代数方程式の零点を数値的に求める問題

$$p(z) \equiv z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0, \qquad z \in \mathbb{C}$$

を考える. この根を $\xi_1, \cdots, \xi_n$ とすれば,

$$\begin{aligned} p(z) &= (z - \xi_1)\cdots(z - \xi_n), \\ p'(\xi_i) &= (\xi_i - \xi_1)\cdots(\xi_i - \xi_{i-1})(\xi_i - \xi_{i+1})\cdots(\xi_i - \xi_n) \end{aligned}$$

である．この時, 各根 ξ_i の近似値 $z_i^{(\nu)}$ が, $i = 1, \cdots, n$ について全部分かっているとして, 次の近似値 $z_i^{(\nu+1)}$ を以下のように与える．

$$z_i^{(\nu+1)} = z_i^{(\nu)} - \frac{p(z_i^{(\nu)})}{\prod_{k\neq i}\left(z_i^{(\nu)} - z_k^{(\nu)}\right)}$$

ただし, 根の初期値 $z_i^{(0)}$ は十分大きな R に対して, 次のように与える．

$$z_i^{(0)} = -\frac{a_{n-1}}{n} + R\exp\left(2\pi\frac{i}{n}\right)$$

このような初期値で始めて, 代数方程式の全ての零点を同時に求める反復計算法を **Durand-Kerner-Aberth 法**と言う．

(1) このアルゴリズムを用いて, 代数方程式 $z^5 = 1$ を解き．反復解の真の解への収束の様子を調べよ．

(2) 反復解 $z_i^{(\nu)}$ と真の解 ξ_i の誤差を $\epsilon_i^{(\nu)} = x_i^{(\nu)} - \xi_i$ とおく．今、各々の二つの反復解が十分に離れている, すなわち, ある i, k, ν によらない定数 C が存在して

$$\left|z_i^{(\nu)} - z_k^{(\nu)}\right| \geq \frac{1}{C}$$

ならば,

$$\left|\epsilon_i^{(\nu+1)}\right| \leq C\left|\epsilon_i^{(\nu)}\right| \cdot \sum_{k\neq i}\left|\epsilon_k^{(\nu)}\right|$$

となることを示せ．この不等式はこの算法が Newton 法と同様に２乗収束することを示している．この事と上の数値結果を比較せよ．

(3) 次の等式を示せ．

$$\sum_{i=1}^{n} z_i^{(\nu)} = -a_{n-1} = \sum_{i=1}^{n}\xi_i.$$

すなわち, 誤差の代数和は 0 である．

【その他の配布資料など】

これらは, 講義の WEB ページ

`http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~naito/lecture/2001_AW/`

から取得可能．

講義の感想

受講者は前期に単位を取得した学生が多かったので, 全般的にあまり悪い印象はなかった．前期から通して考えると, 最初はほとんどプログラミングが出来なかったが, 比較的マトモなプログラムが書けるようになった学生が１〜２名いた．多少の成果はあったと言えるかどうかのギリギリの状態である．

「ガウスの消去法」を考察したときに, 「掃出し法」で連立一次方程式を解くことは出来るのだが, 実際には「行き当たりばったり」と言うか, アルゴリズミックに解くことが出来ないことが判明した．１年の線

形代数で出てくる問題では, ある程度キレイに解けるものが多いので, 消去法のアルゴリズムにのせてしまうと計算手順が多くなってしまうため, 「行き当たりばったり」というか, キレイに計算が進むやり方を探しながら解いているという実状は仕方ないと考えられる. しかし, それをアルゴリズムにのせようとしたときに, 計算手順をいくつかのステップに分解して, 各ステップで何を判断しなければいけないかを明確に意識している学生はほとんどいなかったのは残念である.

コンパイラの理論の話は, 学生には難しいとはわかっていたが, 具体例をあげながら, 出来るだけ平易に解説を心掛けたので, コンパイラの本質的な部分はわかってくれたのではないかと思われるが, それがどのようなことに役立つかを理解してくれたかどうかは不明である.

科目名　代数学特論 I　**担当教官**　行者 明彦

サブタイトル　概均質ベクトル空間の理論

対象学年　大学院　**２単位**　**選択**

教科書
参考書　講義中に資料を配布し，それを教科書とした.

予備知識

リー代数とその表現論．その知識の無い場合には，中西知樹氏の講義を受講するように指示した.

講義内容

「代数多様体の基礎（ヒルベルトの零点定理など）」,「リー代数，リー群，代数群の基礎」,「テンソルなどの線型代数の復習」,「有限次元表現論の基礎」,「D-加群入門」,「有限体，指標和について」などを解説をしながら，概均質ベクトル空間の理論の紹介をし，最後に複素単純リー環の巾零軌道についてのディンキン・コスタント理論を紹介した.

具体的な講義内容は以下の通り：

1. 概均質ベクトル空間の理論の背景，特にゼータ函数について（１０月９日）
2. 代数多様体にかんする基礎的な定義・定理（１０月１６日）
3. 代数群とその表現についての概略（１０月２３日）
4. 概均質な代数多様体についての基礎（１０月３０日）
5. 概均質ベクトル空間についての基礎（１１月６日）
6. D-加群について，特にこれが線型偏微分方程式系と見なせることの説明（１１月１３日）
7. ここまでの講義内容の復習（１１月２０日）
8. b-函数について（１１月２７日）
9. 概均質ベクトル空間の基本定理についての解説と，有限体と指標和についての解説（１２月４日）
10. 裏返し変換（１２月１１日）
11. 縮約について．これの応用として b-函数の計算を実行した（１２月１８日）
12. 複素単純リー環の巾零軌道についてのディンキン・コスタント理論を紹介した.（1月１５日，1月２２日）

講義の感想

科目名　特殊関数特論 I　**担当教官**　青本 和彦

サブタイトル

対象学年　大学院　**２単位**　**選択**

教科書
参考書

予備知識

講義内容

1 変数直交多項式の話題

1. 直交多項式とは？　第 1 種，第 2 種の Chebyschev 多項式
2. 直交多項式の定義と Gram-Schmidt の直交化による構成（ Hankel 行列式による表示）
3. 直交多項式の例（Jacobi, Laguerre, Hermite）
4. 直交多項式の基本性質（ 3 項漸化式，零点の分離，Christoffel-Darboux の公式）
5. Padé 近似と直交多項式（Sieltjes 変換）
6. 3 重対角行列のスペクトル分解と直交多項式
7. 3 重対角行列の自己共役性と極限点，モーメント問題
8. Askey-Wilson 多項式と Askey スキーム
9. Toeplitz 行列式と Szegö の極限定理
10. Selberg 型積分とランダム行列

講義の感想

参考資料

レポート問題

(1) ヤコビ多項式　$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ は積分表示

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}}(1+\frac{x+1}{2}z)^{n+\alpha}(1+\frac{x-1}{2}z)^{n+\beta}z^{-n-1}dz \tag{1.1}$$

を持つ。ここで、$\mathcal{C}$ は原点を正の向きにまわる小円周を表す。これを用いて　$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ が　2 階のスツルム・リウヴィル型微分方程式

$$(1-x^2)y'' + \{\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x\}y' + n(n+\alpha+\beta+1)y = 0$$

を満たすことを示せ。

（ヒント　：　有理式 $\psi(z)$ を適当にとって、

$$0=\int_{\mathcal{C}} d\{(1+\frac{x+1}{2}z)^{n+\alpha}(1+\frac{x-1}{2}z)^{n+\beta}z^{-n-1}\psi(z)\}$$

が成り立つことを使う。）

(2) (1) と同じ方法で　$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ が 3 項漸化式を満たすことを示せ。

(3)

$$\lim_{q\to 1}\Gamma_q(\alpha)=\Gamma(\alpha) \tag{1.2}$$

$\Gamma_q(\alpha)$,$\Gamma(\alpha)$ の無限級数の収束について考察し、(1.2) の厳密な証明について説明せよ。

(4)

$$\int_{-1}^{1}\frac{dt}{(z-t)\sqrt{1-t^2}}$$

を求めよ。(ヒント　Cauchy の積分公式を使え)

(5) Stieltjes 変換 $F(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\rho(t)}{z-t}=\frac{c_0}{z}+\frac{c_1}{z^2}+\cdots$ に対して、$p_n(z),\ q_n(z)$ をそれぞれ n、$n-1$ 次多項式で

$$F(z)-\frac{q_n(z)}{p_n(z)}=O(\frac{1}{z^{2n+1}}) \tag{1.3}$$

を満たすならば、$p_n(z)$ は直交多項式であって、等式

$$q_n(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p_n(z)-p_n(t)}{z-t}d\rho(t) \tag{1.4}$$

$$F(z)p_n(z)-q_n(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p_n(t)}{z-t}d\rho(t)$$

が成り立つことを示せ。

(6) $p_n(x),\ n=0,1,2,\cdots$ を正規直交多項式とするとき、

$$\sum_{m=0}^{n}p_m(x)p_m(y)=\frac{k_n}{k_{n+1}}\frac{p_{n+1}(x)p_n(y)-p_n(x)p_{n+1}(y)}{x-y},\quad x\neq y$$

を示せ。これを　Christoffel-Darboux の恒等式と言う。また、この等式は　3 項関係式から導かれる差分方程式に対応する Gauss-Green の公式にあたることを説明せよ。

(7) Pade 近似の式 (1.3) を用いて次の等式を証明せよ。高々$2n-1$ 次の任意の多項式 $\varphi(x)$ に対して、等式

$$\int_a^b\varphi(x)d\rho(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu\varphi(x_\nu) \tag{1.5}$$

が成り立つ。ここで、λ_ν は　Christoffel 数、x_ν は　$p_n(x)$ の零点である。$[a,b]$ は　$d\rho(x)$ の台（support）とする。

(8) $p_n(x)$ が　正規直交の Chebyshev 多項式のとき、(1.5) を確かめよ。

(9) ヤコビ作用素の自己共役性について説明し、連分数、極限点との関連について正確に述べよ。

以上の問題の中から、少なくとも 2 題選んで解答し、レポートとして提出して下さい。

〆きり　　2002 年 1 月 25 日

科目名　数理物理学特論 I　　**担当教官**　原 隆

サブタイトル　臨界現象と場の理論

対象学年　大学院　　**２単位**　選択

教科書　指定しなかった．
参考書　特に指定しなかった．ただし，講義中に少しは紹介し，同時に講義後に公開の「講義録」でも参考文献を挙げた．

予備知識

教養程度の解析・線形代数を仮定した．

講義内容

「場の理論」と統計力学における「臨界現象」は数学的に深く関係しており，共に確率論の非常に興味深いテーマとなっている．しかし，その数学的理解（特に３次元以上の系について）は非常に未成熟である．この講義では主に「強磁性古典スピン系」の臨界現象を題材にして,「相関不等式などを用いた定性的理論」,「くりこみ群を用いた定量的理論」の両方を解説することを目指した．なお，当初の予定では「場の理論」についても触れる予定だったが，渡辺浩氏の集中講義が前期に行われたことと時間の関係から，触れないことにした．

具体的な講義内容は以下の通りである（回数は大体の記憶によるもの）：

1. 臨界現象の定量的理論
    - 統計力学における臨界現象 — 何が面白いのか（1.5 回）
    - 熱力学的極限の存在（２回）
    - 相転移の存在（２回）
    - 臨界現象の存在（1.5 回）
    - 相転移点の一意性（１回）
    - 「平均場的」な臨界現象（0.5 回）
2. くりこみ群による定量的理論
    - くりこみ群以前：摂動展開とその破綻（２回）
    - くりこみ群の定義（１回）
    - くりこみ群の実際 — 臨界現象の導出（２回）

講義の感想

当初，この講義では「くりこみ群」による臨界現象の解析のみを行う予定であった．しかし，未だに未成熟な「くりこみ群」だけをやれば，非常にいい加減な印象を与えてしまうのではないかと考え，急遽，前半

部分として「相関不等式などによる，臨界現象の定量的理論」を入れることにした．結果として，前半部分を入れたことは，臨界現象に関する厳密な成果を概観することにもなり，理論の数学的基礎を理解する上では良かったのではないかと思う．しかし，前半と後半，両方を一学期でやるのはちょっと野心的すぎた．丁寧にやっている内に第一部に時間がかかってしまい，第二部が時間不足になってしまった．特に一番強調したかった「くりこみ群によるものの見方」についてほとんど言及できなかったのは残念である．取っつきにくい題材であったにもかかわらず，何人かの人が熱心に聴講し，レポートも力作を出してくれたのは良かった．

参考資料

第１回レポート問題

今回は “free energy” の無限体積極限の存在をやってもらいましょう．

前置き：あまり一般にして複雑なものを考えると収拾がつかなくなるので,「２次元の nearest-neightbour Ising model，Free boundary condition」に話を限る.（他の境界条件でも話が同じなことは講義で説明したし，d 次元の場合への拡張はちゃんと考えればできる．Nearest-neighbour と Ising の条件をはずすとちょっと厄介なことは講義でも説明したとおりで，このレポートでは扱わない.）

このモデルでは単位体積あたりの free energy を（記号を簡単にするため，FBC は略）

$$f_\Lambda \equiv \frac{1}{|\Lambda|}\log\Bigl[\Bigl(\prod_{x\in\Lambda}\frac{1}{2}\sum_{\varphi=\pm1}\Bigr)\ \exp\Bigl(\frac{1}{2}\sum_{\substack{x,y\in\Lambda\\|x-y|=1}}\varphi_x\varphi_y + H\sum_{x\in\Lambda}\varphi_x\Bigr)\Bigr] \tag{1}$$

として定義するのは講義で説明したとおりである．また，講義では Λ を一辺 L の正方形ととったときに（これを $\Lambda = L^2$ と書いた）

$$f_\infty \equiv \lim_{L\to\infty} f_{L^2} \tag{2}$$

が存在することを示した．

問題：そこで，このレポートでは一般の Λ の形について，$|\Lambda|\to\infty$ の場合の f_Λ の極限が存在することを示そう．この場合，Λ として何でもよいと言うわけではないので

$$\lim_{i\to\infty}\frac{|\partial\Lambda|}{|\Lambda|} = 0 \tag{3}$$

を満たすような Λ_i の列（$i = 1, 2, 3, \ldots$）を考える．このような列 Λ_i に対しては

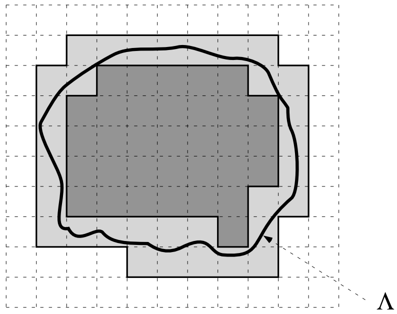
$$\lim_{i\to\infty} f_{\Lambda_i} \tag{4}$$

が存在して f_∞ に等しい，ことを示そう．下の図のように Λ（不定形）を一辺 L の正方形の升目で区切り，Λ の中に入っている正方形を集めたものを Λ_{in}（濃い色をつけてある），Λ に引っかかっている正方形を集めたものを Λ_{out}（濃い色と薄い色の両方）とする．

1. $f_\Lambda - f_{\Lambda_{\mathrm{in}}}$ または $f_\Lambda - f_{\Lambda_{\mathrm{out}}}$ を評価せよ．

2. $f_{L^2} - f_{\Lambda_{\rm in}}$ または $f_{L^2} - f_{\Lambda_{\rm out}}$ を評価せよ．
3. この２つの評価を組み合わせることにより，$\lim_{i\to\infty} f_{\Lambda_i}$ が存在することを証明せよ．

もし，(3) の条件だけでは足りないと思う場合には適宜，条件を付け足して証明せよ．



第２回レポート問題

今回は differential inequality を使って，自発磁化（と相転移点）に対する不等式を導いてもらいましょう．Differential inequalities を用いると色々な事ができる，と言うのがここ２，３回の主眼だったので，簡単な場合にその一端を味わってもらおうと言うものです．ただし，このレポートの結果では臨界現象そのものについての結果は何も出ない（従って臨界現象を調べたい，というこの講義の目的からは不満足である）ことには注意．

前置き：簡単のため「d 次元の nearest-neightbour model，periodic boundary condition」に話を限る．以下の話は nearest neighbour model でなくても成り立つが，本質的なところを押さえるつもり．

このモデルでは有限体積 Λ 上での磁化を（記号を簡単にするため，Λ の添え字は略）

$$m(J,H) \equiv \langle \varphi_x \rangle \equiv \frac{1}{Z_\Lambda} \int \Bigl(\prod_{y\in\Lambda} d\varphi_y \eta(\varphi_y) \Bigr) e^{-\mathcal{H}_\Lambda} \varphi_x \tag{5}$$

として定義する．ここで

$$\eta(\varphi) \equiv \begin{cases} \delta(\varphi^2 - 1) & \text{(Ising model)} \\ \exp\bigl(-\frac{\lambda}{4!}\varphi^4 - \frac{\mu}{2}\varphi^2\bigr) & (\varphi^4\text{-model}) \end{cases} \tag{6}$$

は single site measure で，Z_Λ は規格化因子，

$$-\mathcal{H}_\Lambda = \frac{1}{2} \sum_{\substack{x,y\in\Lambda \\ |x-y|=1}} \varphi_x \varphi_y + H \sum_{x\in\Lambda} \varphi_x \tag{7}$$

はハミルトニアン（$J>0$，$H\ge 0$）．ただし，$|x-y|=1$ は PBC であることを考慮して（トーラスの対面のサイトも nearest neighbour だと）解釈する．なお，見通しを良くするために single site measure η での平均を

$$\langle \cdots \rangle_0 \equiv \frac{\int d\varphi\, \eta(\varphi)\, (\cdots)}{\int d\varphi\, \eta(\varphi)} \tag{8}$$

と定義しておく．

さて前回の講義でもやったが，平均場理論（mean field theory）とは，この理論での近似的磁化 $m_{\mathrm{MF}}(J,H)$ を以下の方程式の解（のうち，最大のもの）として与える理論である：

$$m_{\mathrm{MF}} = \frac{\int d\varphi_0 \eta(\varphi_0)\, \exp\bigl\{(2dJm_{\mathrm{MF}}+H)\varphi_0\bigr\}\,\varphi_0}{\int d\varphi_0 \eta(\varphi_0)\, \exp\bigl\{(2dJm_{\mathrm{MF}}+H)\varphi_0\bigr\}} = \frac{\bigl\langle \exp\bigl\{(2dJm_{\mathrm{MF}}+H)\varphi\bigr\}\,\varphi\bigr\rangle_0}{\bigl\langle \exp\bigl\{(2dJm_{\mathrm{MF}}+H)\varphi\bigr\}\bigr\rangle_0} \tag{9}$$

Λ 上の理論での磁化 $m(J,H)$ と，近似理論での磁化 $m_{\mathrm{MF}}(J,H)$ の解の間に成り立つ不等式を調べよう，と言うのが問題である．

問１：まず，平均場理論について少し考えておこう．

1. (9) で定義された平均場の $m_{\mathrm{MF}}(J,H)$ は等式

$$\frac{\partial}{\partial J} m_{\mathrm{MF}}(J,H) = 2\,d\,m_{\mathrm{MF}}(J,H)\,\frac{\partial}{\partial H} m_{\mathrm{MF}}(J,H) \tag{10}$$

を満たすことを示せ．

2. J_{MF} を

$$2\,d\,J_{\mathrm{MF}}\,\bigl\langle \varphi^2 \bigr\rangle_0 = 1 \tag{11}$$

により定義すると，

$$\lim_{H\downarrow 0} m_{\mathrm{MF}}(J,H) \begin{cases} = 0 & (J \le J_{\mathrm{MF}}) \\ > 0 & (J > J_{\mathrm{MF}}) \end{cases} \tag{12}$$

であることを示せ．

問２：続いて本来考えたいはずの (5) のモデルに戻る．このモデルでは GHS の不等式：

$$0 \ge u_3(x,y,z) \equiv \langle \varphi_x\varphi_y\varphi_z\rangle - \langle\varphi_x\rangle\langle\varphi_y\varphi_z\rangle - \langle\varphi_y\rangle\langle\varphi_z\varphi_x\rangle - \langle\varphi_z\rangle\langle\varphi_x\varphi_y\rangle + 2\langle\varphi_x\rangle\langle\varphi_y\rangle\langle\varphi_z\rangle \tag{13}$$

が成り立つことが知られている（この事実は講義でも使ったが，ともかく天下りに認めよう）．

1. この不等式と並進対称性を使うことにより，

$$\frac{\partial}{\partial J} m(J,H) \le 2\,d\,m(J,H)\,\frac{\partial}{\partial H} m(J,H) \tag{14}$$

が成り立つことを示せ．

2. さて，不等式 (14) は (10) の等号を不等号に変えたものであるので，$m(J,H)$ と $m_{\mathrm{MF}}(J,H)$ の間には何らかの関係があることが予想される．実際，

$$m(J,H) \le m_{\mathrm{MF}}(J,H) \qquad (\forall J>0,\ H\ge 0) \tag{15}$$

が成り立つ．これを証明せよ．(ヒントは最後に.)

3. 今までの $m(J,H)$ は有限体積 Λ でのものであった．そこで無限体積での自発磁化 $m_s(J)$ を

$$m_s(J) \equiv \lim_{H\downarrow 0}\Bigl[\lim_{\Lambda\to\mathbb{Z}^d} m(J,H)\Bigr] \tag{16}$$

によって定義しよう．また，講義でもやったように J の臨界値を

$$J_c \equiv \inf\{J \mid m_s(J) > 0\} \tag{17}$$

と定義する．(15) から $m_s(J)$ に対する不等式を導き，更に J_c と J_{MF} を比較する不等式を作れ．

問２の 2 に関するヒント： 正直，これはヒント無しではなかなか難しいと思う．いくつか列挙するので，考えてみて欲しい．

- (10) は Burgers 方程式 $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = au(t,x)\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x}$ の形をしている（勿論 J を時間変数 t，H を空間変数 x と思う）．さて，(9) を $J=0$ で計算することはできるから，(10) の解を求めると言うことは Burgers 方程式を，$J=0$ での初期値 $m(0,H)$ から出発して J を増やしながら解くことに相当する．Burgers 方程式というのは衝撃波を生じる方程式として有名であり，実は $\lim_{H\downarrow 0} m_{\mathrm{MF}}(J,H) > 0$ と言うのは，衝撃波の発生に対応することがわかる．
- (14) は(10) の等号を不等号にしたものであって，この２つの解を比較したい．このような場合，解が一定の値をとる曲線（特性曲線）を考え，これが (J,H)-平面でどのようになるか（特に，(14) と(10) の特性曲線の傾きはどっちが大きいか，など）を考えてみるのも良いかも知れない．このとき，$J=0$ での初期条件はどちらでも同じであるので，等号を不等号に変えたことにより，衝撃波の発生が早くなるかどうかが問題となる．
- 以上のような微分方程式の知識がかえってじゃまになるひとは，与えられた (J,H) について $m^*(x;J,H)$ を

$$m^* = m(J(1-x), H + 2dJxm^*), \qquad (0 \le x \le 1) \tag{18}$$

　の解として定義し，これを解析しても良い（ここで $m(J,H)$ は (5) での磁化）．$m^*(0;J,H) = m(J,H)$ かつ $m^*(1;J,H) = m_{\mathrm{MF}}(J,H)$ に注意しよう．
- 今は有限体積で考えているから，$m(J,H)$ を J や H で微分することはできる．また，必要ならば Griffiths II 不等式などから出てくる単調性も使っても良い．

なお，この問題にはもとになる論文（群）が存在するが，それをここでバラしてしまうと面白くないので，出典は解答編で明示することにしよう．

第３回レポート問題

問題

くりこみ変換を実際に手を動かして味わってもらおうと言うのが狙いです．講義の時にも強調したように，くりこみ変換を実際に意味のあるモデルで遂行するのはなかなか大変です．そこで，実際のモデルのくりこみ変換をある程度忠実に再現しているだろうと思われる，*Hierarchical Model* を用い，このモデルでのくりこみ変換の漸化式の導出とその解析を行うことにしました．

Hierarchical Model と言うのはスピン間の相互作用を特殊な長距離力の形に取ることにより，くりこみ変換が非常に簡単な形になるように工夫した人工的なモデルです．くりこみ変換は，一変数関数 h から h' への写像として書けます：

$$h'(\varphi) = \mathcal{N} \exp\Bigl(\frac{\beta}{2}\varphi^2\Bigr) \int_{-\infty}^{\infty} dz\; h\Bigl(\frac{\varphi}{\sqrt{c}} + z\Bigr) h\Bigl(\frac{\varphi}{\sqrt{c}} - z\Bigr) \tag{19}$$

ここで

$$c \equiv 2^{1-2/d}, \qquad \beta \equiv \frac{1}{c} - \frac{1}{2}, \qquad d > 2 \ \text{は定数} \tag{20}$$

であり，$\mathcal{N}$ は $h'(0)=1$ となるようにとる規格化定数．この $h(\varphi)$ とは，ハミルトニアンのポテンシャル部分 V と大体 $h(\varphi)\equiv e^{-V(\varphi)}$ の関係にあるものです（詳細は [?, ?] を参照）．ともかく，このような背景には深入りせず，(19) で与えられた変換の性質を調べてみましょう．

以下の小問につき，出来る範囲で取り組んで解答して下さい．

1. まず，$h(\varphi)=e^{-\varphi^2/4}$ が，(19) の 不動点 になっていることを確認してください．
2. 次に，この不動点の 安定性 を議論します．まず，
$$h(\varphi)=\exp\Bigl\{-\frac{\varphi^2}{4}-V(\varphi)\Bigr\},\qquad h'(\varphi)=\exp\Bigl\{-\frac{\varphi^2}{4}-V'(\varphi)\Bigr\}, \tag{21}$$
と書き，不動点からのズレを $V(\varphi)$ で表します．(19) で与えられる変換を V,V' の一次までとって近似することにより，V から V' への 線形変換 として表してください．これは数学的には「(19) の変換の，この不動点での接写像」を求めたことになっています．
3. 上で求めた V から V' の変換の 固有ベクトル を求めて下さい．つまり，$V'(\varphi)=\alpha V(\varphi)$ となるような α（固有値）と V （固有ベクトル）を求めて下さい．
ヒント：この場合，固有値，固有ベクトル共に無限個あるので，全部を求めるのは不可能ではないですが少し大変です．そこで，$V(\varphi)$ が φ の２次式や４次式の場合から始めて，いくつか求めるだけでもまあ，よしとしましょう．
4. さて，固有値（の絶対値）が１より大きいと言うことは，この不動点から離れて行く固有摂動があることを意味し，不動点の不安定性につながります．上で求めた固有値や固有ベクトルは当然，d の値に依存しますが，どのような d の時に，何本，不安定な固有ベクトルがあるか，議論してください．

科目名　基礎数学 III　　**担当教官**　鈴木 浩志

サブタイトル　続 解析入門

対象学年　大学院（昼夜開講コース）　**２単位**　**選択**

教科書
参考書　指定しなかった．必要な時はプリント配布を行った．

予備知識

基礎数学 I を受講していることが望ましい．

講義内容

実多変数の微積分の基本的な事柄で基礎数学 I でやりのこしたもの，および，基礎数学 I でのべき級数の話をうけて，複素関数の話を主に行った．

具体的な講義内容は以下の通り：

1. 条件付き極値
2. Gauss の定理と Stokes の定理
3. 正則関数と Cauchy-Riemann の関係式
4. Cauchy の積分定理
5. べき級数展開
6. 最大絶対値の原理 他
7. Laurent 展開
8. 留数
9. 部分分数展開
10. 初等関数

講義の感想

めんどうな計算問題もあったにもかかわらず，毎回頑張ってレポートを書いてくれてうれしかったです．

科目名　基礎数学 IV　**担当教官**　南 和彦

サブタイトル　線形代数学

対象学年　大学院（昼夜開講コース）　２単位　選択

教科書　特に指定したものはない.
参考書　江尻典雄「理系の基礎数学　線形代数学」学術図書出版
佐竹一郎「線形代数学」裳華房

予備知識

前期に開講した基礎数学 II の内容

講義内容

前期にひき続くかたちで線形代数を講義した．線形空間の定義から出発して，行列の標準化を中心に，学部の線形代数の講義では時間的に扱えない範囲までを詳しく解説した．それを終えたら線形代数を基礎とする様々なテーマを扱うつもりでいたがそれは断念した.

具体的な講義内容は以下の通り：

線形空間，線形写像，表現行列，内積，固有方程式，固有値，固有ベクトル，固有空間，最小多項式，ハミルトン-ケイリーの定理，基本変形，行列式因子，単因子，ジョルダン標準形，正規行列，スペクトル分解，エルミート行列，ユニタリ行列，２次形式，シルヴェスタの慣性法則，オイラーの角，線形リー群，SU(2) の随伴表現と SO(3)

講義の感想

夜間の講義で，体力的，知力的に失速ぎみになったのが最大の反省点であろう.

２００１年度 集中講義内容要約

科目名　**数理解析特論４**　**担当教官**　**坂口 茂**

サブタイトル　熱方程式の解の形状について

対象学年　**４年**　**２単位**　**選択**

教科書　特になし．
参考書　２階線形の楕円型および放物型偏微分方程式の基礎事項についての文献をいくつかあげた．また，論文，本を含めて 57 の参考文献表を配付した．講義中この参考文献表を参照した．

予備知識

基本的には多変数の微分積分学と線形代数学，および複素解析学とルベーグ積分論の基礎を理解していれば，履修可能である．

講義内容

熱の伝導や物質の拡散現象は，熱方程式によって記述される．この講義では，熱方程式の解の形状に関する次の２つの問題 (a) (b) を考察する．

(a) 熱流の臨界点が動かないとき，どのようなことが起こっているか．特に，解のホットスポット (各時刻において解の最大値を与える点) が動かないとき，どうなっているか．
(b) 空間内のある超曲面が任意の時刻で等温面になっているとき，どうなっているか．

例えば，問題 (a) については，Klamkin (1994) の予想があった．現在未解決な Chamberland と Siegel (1997) によって修正されたその予想を述べよう．ユークリッド空間の有界凸領域 D において初期斉次デリクレ問題を考え，初期値として正定数を与えるとき，解のホットスポットは各時刻において１点からなることが知られている．彼等の予想は,『もし原点が常にホットスポットならば，領域 D は，直交群のある essential な部分群 G の作用について不変である.』というものである．ここで G が essential であるとは，任意の零でないベクトルに対してそれを不動点としない G の要素が必ず存在するということである．この予想に関連して得られたいくつかの結果を紹介する．

第１回： 熱方程式の導出から始め，熱方程式の基礎的事項として，熱核の性質をあげ，重ね合わせの原理から自然に初期値問題の解が熱核を利用して表現できることを話した．解の形状について，最初は２つのホットスポットをもつがある時刻からは１つのホットスポットを持つようになる解の例をあげ解説した．証明なしに比較定理を述べ，解の一意性に言及した．さらに熱核を利用して熱方程式の解の空間変数についての解析性が得られることを複素関数論に対応させて述べた．もちろん詳しい証明は与えなかった．最後に初期境界値問題の解の一意性をエネルギーの方法で証明した．

第２回： 熱流の不変な臨界点および零点についてのバランス法則を初期値問題の解についてまず証明し，次に熱方程式の一般の解について，解の空間変数についての解析性を利用して証明した．次に不変なホットスポットについての Klamkin の予想（1994）および Chamberland-Siegel の予想（1997） について説明し，平面上の三角形と凸四角形についての Magnanini-Sakaguchi の定理：『平面上の有界凸領域 D において，

初期値として正定数を与えた初期斉次デリクレ問題を考え，原点が常にホットスポットであると仮定する．このとき，(1) D を三角形に限るならば， D は，原点を中心とする正三角形でなければならない．(2) D を凸四角形に限るならば，D は，原点を中心とする平行四辺形でなければならない』を述べた．最後に次回用いる２次元調和関数の零点の形状についての Hartman-Wintner の定理を複素関数論を用いて証明した．

第３回： 前回述べた Magnanini-Sakaguchi の定理をバランス法則と Hartman-Wintner の定理を用いて証明した．さらに談話会で述べた熱流の不変な等温面についてのもう一つの Magnanini-Sakaguchi の定理：『上記と同じ初期境界値問題において１つの不変な等温面が存在するならば，領域 D は球に限る』を書き下した．次回のために，ユークリッド空間の超曲面の主曲率の定義を与え，超曲面への距離関数のヘシアンと主曲率の関係に言及した.（このため第２回に D. Gilbarg and N.S. Trudinger：Elliptic Partial Differential Equations of Second Order (Springer) の一部分（４ページの長さ）のコピーを配付した．）これらを次回のための２つの補題として書き下した.

第４回： 不変な等温面についての Magnanini-Sakaguchi の定理の証明を与えた.

講義の感想

４回の講義で熱方程式の導出から最新の未解決問題まで言及しました．学生は約１８名が出席し，受講態度もよく授業中の質問も幾らかありました．この講義が受講生にとって有意義であったことを祈ります.

科目名　社会数理特論１ ／応用数理特別講義 I (1/5)　　**担当教官**　塩田 憲司 加藤 真弓

サブタイトル　コンピュータ応用製品から見た課題と展望について

対象学年　４年／大学院　　**２単位**　**選択**

教科書
参考書

予備知識

講義内容

現在のコンピュータの基礎となっているフォン ノイマン型のコンピュータが誕生してからまだ半世紀しかたっていないが，コンピュータシステムは社会のインフラを形成し社会活動する上でなくてはならないものになっている．

またコンピュータの技術革新は急激であり，特に近年の IT(情報技術) ブームにより，企業だけでなく個人の情報ツールとして情報化社会を乗り切るための必須アイテムになっている．

本講義ではコンピュータの先端技術の紹介だけではなく，ますます重要になってきているソフトウエア開発に関する最新状況と直面している課題および今後の展望についても時間を割きたい．

さらに，日常何気なく利用しているコンピュータ応用製品のインサイドに関しても紹介する．

ソフトウエア開発は抽象的な記号の列であるプログラムを組み合わせて，論理的に意味を持つ機能を実現するクリエイティブな仕事である．また，複雑な組み合わせ事象を数理的モデル化，最適化しプログラムとして具現化する能力が必要である．このためソフトウエア設計は数学的素養をかなり要求すると言える．

本講義の目次を以下に示す.

１．コンピュータサイエンス入門
２．パソコン・ネットワークの最近動向
３．ソフトウエア開発上の重要課題
４．コンピュータの応用製品 (システム設計技術)
５．21 世紀の IT(情報技術) 社会
６．数学科の学生への期待

講義の感想

- コンピュータに関して詳しい人，詳しくない人が混在し，講師としては話のレベルをどこにあわせるか気にしながら話をしている．興味があるか否かの反応を見ながら内容を変えるようにしているので応答してくれると有り難い．
- 話が一方通行にならないように気をつけている．とにかく質問が出るとうれしい．こちらから指名して質問を促すとちゃんと質問をしてくれることを考えると理解してくれていると考える．

• 担当し始めたころ（１０年前）は出席者も多く Q ＆ A で活発な議論ができた．その後質問が減った時期があったが，前回は出席者及び Q ＆ A での質問が増え活発な議論ができて良くなってきたように感ずる．

• 企業側の考え方（技術革新や採用・教育方針）はここ１，２年急速に変化している．学生の皆さんは我々をリアルな情報源として活用してほしい．我々もまた学生諸君の考え方を理解する良い機会と考えている．

科目名　社会数理特論１／応用数理特別講義 I (2/5)　**担当教官**　渡邉 昌一

サブタイトル　最近の金融経済情勢と日本銀行の役割

対象学年　４年／大学院　**２単位**　**選択**

教科書
参考書

予備知識

講義内容

（１）最近の金融経済情勢と金融政策運営

わが国景気の現状判断とその下での金融政策運営に対する考え方を披露.

（２）わが国金融システムの現状と課題

わが国金融システムに対する信認を回復・強化するために必要な課題を紹介.

（３）金融市場から抽出できる情報

株式市場や債券市場から，一体どのような情報を抽出できるかを紹介.

講義の感想

授業終了後に何人かの学生から質問があったほか，電子メールでの質問もあった．そうした質問内容でみる限り，当方ももう少し話題を絞って，より分かり易くする余地があったと反省した.

科目名　**社会数理特論１**
／応用数理特別講義 I (3/5)　**担当教官**　**山本 幸雄**

サブタイトル　車の運動への力学の活用

対象学年　**４年／大学院**　**２単位**　**選択**

教科書
参考書　自動車の運動と制御（＊力学の説明は，この本に準拠）
著者　安部正人
発行所　株式会社　山海堂
ほか，自動車関係の発表論文など

予備知識

特になし

強いて言えば高校程度の物理の力学とブレーキやアクセルやハンドルの操作で車がどうなるかくらいを知っていると理解しやすい.

講義内容

力学という手段を武器にして，車を操作したときの車両挙動を定性的に（定量的にも）理解できることを知ってもらう.

（１）車の運動方程式の導出プロセス

平面内の運動に対して車両を具体的にモデル化をして力学の具体的適用を解説する.

・簡単な車の運動（静力学的理解）

ブレーキやアクセルを踏んだとき，ハンドルを切ったときの車に働く力

・力学はベクトルとその微分の世界

・ 仮定条件の明確化 にして力学系モデルの構築，一次近似をつかって線型化し線　型微分方程式を導出

・数値計算で簡単に解ける.

（２）実際的な車の動きの力学的把握

実際のタイヤは，非線型な（定常）特性をしめす. これらの力を定性的に理解し，車両の実際的な動きを概説.

・旋回時，ＦＦ車とＦＲ車の動きの違い

・路面の摩擦係数が低いとき（ex 氷雪路）

アクセルやブレーキなどの操作を間違うと車がスピンしたりして危険

→車両制御システム (VSC，TRC，ABS,）の効果を紹介

VSC:Vehicle Stability Control

TRC:Traction Control

ABS:Anti-lock Brake System

（補足）人間の感覚特性からの”快適”な車の動きの要求

——これは「車の存在性」としての重要な側面——

Weber-Fechner 法則に基づく「黒沢理論」の紹介

・ブレーキ時のうまい人と下手な人の加速度波形の違い

＊なお当日予定してました運転支援システムにおける環境力方程式の説明は時間がなく削除しました

講義の感想

最後の「快適性の追求」のところは，時間が無く十分お話しができませんでしたが，時間を守ることも社会では大事なことですので割愛いたしました．

平面内の運動方程式の導入プロセスは，中身は分からなくても「あれくらいの解析は自分もその気になればできる」と数学科の皆さんに思っていただければそれでＯＫです．説明の中で皆さん，うなずかれていましたので，さすがに数学科の学生さんだと思いました．もし皆さんの中で車の運転に大変興味があって車会社に乗り込む意気込みがあれば，私のような運動性能関係の仕事もできるかと思います．

またせっかくの機会でしたので，講義の内容以外での世の中のこと会社のことなど，何でも質問していただいても結構かと思っていましたが，皆さん遠慮されました．

名大は，自然環境も含め本当に環境の良い雰囲気のところだと思いました．学生の皆さんの顔を見ていますと，自分達の今の（勉強や研究に打ち込める）環境の良さを十分わかってないだろうなあと思ったりしました．残り少ない学生生活，悔いのないように送ってほしいと切に思います．

科目名　**社会数理特論１ ／応用数理特別講義Ｉ(4/5)**　　**担当教官**　**大丸 隆正**

サブタイトル　ＦＡにおける計算機応用

対象学年　**４年／大学院**　　**２単位**　**選択**

教科書
参考書

予備知識

講義内容

コンピュータと言うとパソコンやワークステーション，汎用計算機などを想像しがちであるが，現代の制御はほとんどがデジタル制御になってきており，その中心はマイクロプロセッサーというコンピュータである．これらのコンピュータは航空機・自動車や産業機械と言ったハイテク製品から洗濯機や冷蔵庫等の家庭電化製品に至るまで，およそ電気を使うあらゆる製品に応用されていると言っても過言ではない．本講義ではこれら「機器組込型」分野の中でＦＡ（Factory Automation）と言われる工場の自動化設備や産業用機械制御に使用されるコンピュータの応用について紹介する．また，年々巨大化する組込用ソフトウェアの特徴と開発技術の動向についても述べる．

本講義の概略内容を以下に示す．

- 計算機応用分野
  - 汎用計算機と機器組込型計算機
- ＦＡ制御機器の紹介
  - ＰＣ，ＮＣ，サーボ，インバータ，ネットワーク
  - 放電加工機，レーザ加工機，ロボット
  - ＣＡＤ／ＣＡＭ（ＣＡＴ，ＣＡＴ）
  - ＣＩＭ，ＦＭＳ，ＦＭＣ
- 計算機制御の歴史
  - マイクロプロセッサの登場
  - サンプリング制御（離散値系）
  - アナログからデジタルへ
- ＦＡ制御機器の最新動向
  - 表示設定機能の高度化
  - ネットワーク化
  - 非線型制御・現代制御等高度制御技術の取込
- 制御用組込みＳ／Ｗの特徴
  - リアルタイムＯＳ組込み

ＲＯＭシステム，専用Ｈ／Ｗ，高速・小メモリ
開発環境と実行環境

- Ｓ／W開発環境と開発手法の動向
- 組込ソフト開発事例（放電加工機制御ソフトウェア）

講義の感想

- ＦＡ（Factory Automation）は工学部的テーマですので，数学科の方はどういうところに興味があるのかよく分からず毎回悩んでいます.
- イメージ的に理解してもらえるよう動画等をかなり利用しましたが，イメージをつかんでいただけたでしょうか.
- メーカーの仕事内容で数学等高度な理論を駆使する部分は実はほんのわずかなのですが，そうしたところで雌雄が決する場面もあり，断片を紹介させていただきました.

科目名　社会数理特論１／応用数理特別講義 I (5/5)　　**担当教官**　瀧川 恵理

サブタイトル　信用リスクへの投資とコントロールの新たなツールについて—クレジット・デリバティブを例に

対象学年　４年／大学院　　**２単位**　**選択**

教科書
参考書

予備知識

講義内容

信用リスク—企業が契約通りの支払いができなくなるリスクに対する注目が高まっている．バブル崩壊後，大規模な企業の倒産が相次いだこと等が背景にある．信用リスクのコントロールの重要性が高まっていると同時に，新たな収益機会・ビジネスチャンスを生み出している．

このような背景の下，信用リスクを”売買”するデリバティブ—クレジット・デリバティブのニーズが増加している．クレジット・デリバティブの例として，将来の一定期間に渡って信用リスクに由来する損失に対する補償を受ける代りにプレミアム（一種の保険料のようなもの）を支払う取引がある．例えば，銀行は，貸し付け先の企業との債権関係に直接影響を及ぼすこと無く，その信用リスクのみを，クレジット・デリバティブの取引相手に移転することが可能である．

クレジットデリバティブの取引市場を始めとして，信用リスクの”マーケット”は，世界的に急拡大している．このマーケットでは，信用リスクに過剰にさらされている企業と，信用リスクに対する投資余力のある投資家とのニーズ・マッチングが行われる．しかし，この市場は，課題も多く依然として信用リスク市場に対する潜在的ニーズに十分に対応しきれていない為，ニーズ開拓余地の多い市場でもある．

本講義では，信用リスクの由来，信用リスク市場の現状と背景などを紹介し，それらを踏まえ，クレジット・デリバティブの実務において，ニーズが高まっている取引例を紹介したい．

そして，これら取引の礎となる価値評価において，注目されるファクターは何なのか？また，その評価モデルの構築のポイントを紹介することで，数理統計や金融工学が現代の金融業界で果たしている役割を伝えたい．

講義の感想

- 聴講生の興味を引いた点として；業務で実際に使用しているモデルによる算出例，及びそのモデルのロジックのエッセンス，そしてそのモデルのビジネスにおける活かされ方，であったと感じた．
- 一方，信用リスクが注目されている経済社会背景の説明が，聴講生の興味対比で冗長だったと感じた．
- 本テーマを希望していた聴講生が，どのような点に興味関心があるのか，事前に少しでも把握できれば，より有意義な講義の参考となるのではないか．

- 至らない点，多々あったと思います．より，ざっくばらんに聴講生とコミュニケーションを取り，質問を多く受け付けられればよかったと思います.

科目名　**社会数理特論２／応用数理特別講義 II (1/5)**　**担当教官**　**松崎 雅人**

サブタイトル　エネルギーと地球環境問題　──都市ガスの果たす役割──

対象学年　**４年／大学院**　**２単位**　**選択**

教科書
参考書

予備知識

講義内容

地球温暖化が何に起因するのか，それがどのような影響を人類にもたらすのか．

その要因の一つに炭酸ガスに拠るものがある．

エネルギー活用時に排出される炭酸ガスがその太宗を占める．エネルギー利用は人類にとって必要不可欠である．

エネルギー源消費を極小化，地球温暖化の抑制や循環型社会の構築等の取組みにより，負の遺産に対する種々の回復等，あるべき姿をモデル化し，都市ガスが果たす役割の観点から考察する．

講義の感想

（１）講義に臨むにあたって

講義／理解度＝１を期待値に，即ち講義内容が受講者に相当量受け止められるものとするため，起承転結，メリハリのある講義を心掛けた．

具体的には，導入部で，ガス導管によるガス供給の実態と利用する数学モデルと非定常解析への移行について言及した．

本題の環境とエネルギーについては，以下の２点を中心とした気付きをしてもらえれば，の思いで講義に臨んだ．

(a) ２１世紀は行動基準の一つとして地球環境問題の取り組みは必須であり，それへの対応が何故求められるのかを理解する一助の場造り．

(b) 地球環境問題への種々の取り組みを知り，己・個人行動のあり方の参考にする．強いて言えば，数理でモデル化する場合の視点・目の付け所（小宇宙的視点）を感じ取る．

説明用のＯＨＰの読みづらさが理解の妨げにならないようにと，ＯＨＰ製作に留意した．加えて，途中の中だるみ状況を打破するため，一円玉クイズを実施し，受講者のフレッシュアップにも配慮した．

（２）講義を終えて

講義後にアンケート調査を実施した．その結果も含め，以下の感想を持った．

(a) 概ね環境とエネルギーの重要性を理解してもらえたとアンケート調査から推察している．
(b) ＯＨＰによるだけでなく，プレゼンテーション・ツールに工夫を要する．状況提供を焦るあまり，説明が早すぎたきらいがあり，情報提供の内容を厳選すべきであった．
(c) 聞き手の理解できる言語を駆使したとは言いがたく，意志の伝達は不十分であると感じた．少なくとも，質疑・応答の時間を持てばよかった．加えて，理解度を促進できると考えられる数理モデルに事例を置き換える等の工夫の余地があると反省させられた．
(d) 数学の謎を解く表現は手慣れていると思うが，文書での表現は慣れていないと感じた．社会での意思疎通の原点は，言語によるものが大勢であり，広く自己主張するツールにも磨きをかけていただきたい．
(e) モデル化・図化の方法での表現等を含め，地球環境問題等への対処の動機になればと，今後に期待したい．

科目名　**社会数理特論２／応用数理特別講義 II (2/5)**　**担当教官**　**石川 茂樹**

サブタイトル　顧客情報分析による顧客理解と商品開発へのフィードバック

対象学年　**４年／大学院**　**２単位**　**選択**

教科書
参考書

予備知識

講義内容

本講義では，企業における顧客情報活用の事例を紹介することにより，企業活動の現場での数値解析応用について理解を深めてもらうことを主眼としている．

１．ブラザー工業の概要
２．Ｉ＆Ｄカンパニーの概要
３．ＦＡＸ/ＭＦＣの事業紹介
４．顧客の理解と対応
５．顧客情報の活用事例
６．数値解析への期待

講義の感想

科目名　社会数理特論２
／応用数理特別講義 II (3/5)　**担当教官**　松沼 正平

サブタイトル　移動体通信の現状と将来

対象学年　４年／大学院　２単位　選択

教科書
参考書

予備知識

講義内容

世界的に普及が進む「ケータイ」は，わが国においても人口普及率 50 %を超えた．用途も「人と人との会話の媒体」から，文字メール．さらには「音楽添付メール」「画像添付メール」，さらにはインターネットとの接続によってモバイル IT の中心的役割を担うまでになってきている．技術面でも，初期の主役だった「アナログ方式」はわが国においては既に姿を消し，PDC と cdmaOne という二つの異なるデジタル方式が取って代わっている．

ここ 1 ～ 2 年の間に，第三世代のケータイといわれる IMT-2000 (W-CDMA 等) のサービスがスタートし，ケータイはさらに成長しようとしている．

今回はこのような事情にそって次のように進めたい．

１．ケータイの現状
（１） 仕組みの概要
（２） 市場の状況（世界／日本）
（３） サービスと商品の概要
（４） 課題

２．ケータイ新時代へ
（１） 技術面の簡単な解説（ FDMA, TDMA, CDMA そして W-CDMA 等）
（２） サービスと商品の概要
（３） 市場の現状と予測
（４） 課題

講義の感想

- 学生諸君は真面目におとなしく聞いてくれている．
- どちらかというと理論指向で，ビジネス社会の動きに対しては，まだ傍観者であるように思う．

科目名　社会数理特論２
／応用数理特別講義 II (4/5)　**担当教官**　奥村 誠史

サブタイトル　最近の流通業の概況について

対象学年　４年／大学院　**２単位**　**選択**

教科書
参考書　日本経済新聞社「流通経済の手引き 2001, 2002」日経流通新聞編
日本経済新聞社「ゼミナール流通入門」田島，原田編

予備知識

講義内容

歴史的発展過程や現在の消費動向を通じて，流通業の役割を理解する．また，新しい手法を含め小売業の具体的な企業活動を見ながら，流通業の現況と課題について理解を深める．

（１）流通業の位置と役割
（２）流通業全体の効率化の進展と小売業の将来
（３）統計から見た小売業
（４）小売業の具体的な企業
（５）流通業界を取り巻く法的規制
　百貨店に関連する法律，規制緩和の流れ，大規模店舗立地法
（６）流通業界の現況

講義の感想

- 学生諸君の受講態度は節度あるまじめな態度で，講義が進めやすく，その点では非常に良かった．
- 講義の内容が現下の厳しい経営環境を反映して，やや悲観的になったが，流通業界の現況を理解する一助となれば幸いである．

科目名　社会数理特論２
／応用数理特別講義 II (5/5)　**担当教官**　味藤 圭司

サブタイトル　保険数理とアクチュアリー

対象学年　４年／大学院　**２単位**　**選択**

教科書
参考書

予備知識

講義内容

保険数理の内容を概観し，かつ保険数理の専門家としてのアクチュアリーの本来機能は，数理的アプローチによる保険会社のリスクマネージメントであることを理解する．

（1）アクチュアリーの歴史
（2）保険数理の概観
（3）責任準備金
（4）資産運用リスク
（5）保険会社におけるアクチュアリーの新たな課題と対応
（6）アクチュアリーの活躍フィールド
（7）資格試験

講義の感想

生命保険を中心に説明したので，損害保険・年金について業界がどのような状況にあるかが今一つはっきり分からなかったと思う．しかし，アクチュアリーの重要な機能が何であるかということが，昨今の生命保険会社の破綻ということで，図らずも世間に見える形で現れた．このメカニズムを理解することにより，現実の社会現象に係わる数学（数理）の重要性と，更なる数理技術の進歩が今求められていることをわかっていただけたらと思う．

科目名　**表現論特別講義 I**　**担当教官**　**中島 啓**

サブタイトル　幾何学的な表現の構成

対象学年　**大学院**　**２単位**　**選択**

教科書　特になし.
参考書　H. Nakajima: Lectures at the University of Hong Kong – a geometric construction of algebras, preprint

予備知識

多様体の基礎，ドラームコホモロジー

講義内容

コホモロジー群の上で合成積を考えることによって，様々な環とその表現を構成する．ただし，第一回目の講義では，導入としてコホモロジー群でなく有限集合上の関数の全体に定義される合成積を考えた．構成された例は，Weyl 群の群環，Hilbert 概型を用いた対称多項式の環，Yangian (同変コホモロジーを用いた) である．

講義の感想

第一回目の講義を理解するための予備知識は簡単な線形代数のみであった．もしも理解できていないところがあったならば，ぜひ自分で手を動かして計算の細部をチェックして欲しい．

科目名　**トポロジー特別講義 I**　　**担当教官**　**坪井 俊**

サブタイトル　円周の区分線形同相のなす群

対象学年　**大学院**　　**２単位**　**選択**

教科書　なし

参考書　講義の中で参考文献をきちんと挙げなかったので，以下に挙げておきます．講義の通りのことは書かれていませんが，以下の文献の文献表等から講義をした内容の背景はわかると思います．

５月２１日：A. Banyaga, *The structure of classical diffeomorphism groups,* Mathematics and its Applications, 400. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997.

５月２２日：MINAKAWA, Hiroyuki, *Classification of exotic circles of* $PL_+(S^1)$, Hokkaido Math. J. **2**6 (1997), 685–697.

５月２３日：J. W. Cannon, W. J. Floyd and W. R. Parry, *Introductory notes on Richard Thompson's groups*, L'Enseignement Mathématique **4**2 (1996), 215–256.

５月２４日，５月２５日：P. Greenberg, *Classifying spaces for foliations with isolated singularities*, Transactions Amer. Math. Soc. **3**04 (1987), 417-429.

予備知識

論理的には群，位相空間の定義等．単体複体，ホモロジー論をある程度知っていると理解しやすい．

講義内容

５月２１日：

円周の向きを保つ区分線形同相のなす群を $PL(S^1)$ と書き，実数直線の台がコンパクトな区分線形同相のなす群を $PL_c(\mathbf{R})$ と書く．これらは $\mathrm{Homeo}(S^1)$, $\mathrm{Homeo}_c(\mathbf{R})$ の部分群である．まず，これらの群におけるフラグメンテーションについて説明した．これを使って,「$\mathrm{Homeo}_c(\mathbf{R})$ が完全群 $\Longrightarrow$ $\mathrm{Homeo}_c(\mathbf{R})$, $\mathrm{Homeo}(S^1)$ は単純群」「$\mathrm{PL}_c(\mathbf{R})$ が完全群 $\Longrightarrow$ $\mathrm{PL}_c(\mathbf{R})$, $\mathrm{PL}(S^1)$ は単純群」を示し，また $\mathrm{Homeo}_c(\mathbf{R})$，$\mathrm{PL}_c(\mathbf{R})$ が完全であることを示して，群の単純性を示した．

５月２２日：

$PL(S^1)$ には２元生成自由群と同型な部分群があるが，$\mathrm{PL}_c(\mathbf{R})$ の部分群は自由群にならないことを少しだけ説明した．興味ある部分群の例として，$PL(S^1)$ の $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ に同型な部分群の分類を与えた．皆川氏の不変量を説明し，この分類に使った．

５月２３日：（談話会）

$\mathbf{Z}[1/2]$ で $\{p/2^n\ ;\ p\in\mathbf{Z}, n\in\mathbf{Z}_{\geq 0}\}\subset\mathbf{R}$ を表す．

$$T=\{f\in PL(S^1)\mid \begin{array}{l} f(\mathbf{Z}[1/2]/\mathbf{Z})=\mathbf{Z}[1/2]/\mathbf{Z},\\ f\text{ のグラフの折れ点は }(\mathbf{Z}[1/2]/\mathbf{Z})^2\text{ に含まれ,}\\ f\text{ のグラフに現れる傾きは }2\text{ の冪乗になっている}\}\end{array}$$

は，Higman-Thompson の有限表示無限単純群として知られている．この群作用の一点の固定群は

$F = \{f \in T \mid f(0) = 0\}$ である．F, T の表示，T の単純性等について説明し，T が $PSL(2;\mathbf{Z})$ や $SL(2;\mathbf{Z})$ と同型な部分群をもつこと等を説明した．

５月２４日：

$PL(S^1)$ の部分群あるいは多様体の基本群から $PL(S^1)$ への準同型には，多様体上の S^1 束の葉層構造が自然に対応することをとくに２２日に分類した $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ に同型な部分群について解説した．群のホモロジー，コホモロジーの定義，群の分類空間の構成，$BPL(S^1)$ 上の S^1 束の葉層について解説した．群作用に付随する亜群を定義し，亜群の分類空間の解説を行った．特に $BPL(S^1)$ に付随する亜群 Γ^{PL} について説明した．

５月２５日：

群 G の分類空間はアイレンバーグ・マクレーンの $K(G,1)$ 空間であることを説明し，群 $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ の群のホモロジーを求めた．$\mathrm{Aff} = \{x \longmapsto e^{\alpha}x + \beta\}$ の群のホモロジーが $\mathbf{R}$ の群のホモロジーと等しくなることを説明した．Γ^{PL} の構成の仕方を解説し，それが２つの $B\mathbf{R}$ のジョインとなることを説明した．

講義の感想

区分線形同相写像は容易に書き表すことができるので，予備知識の少ない学生でも取り付きやすい対象だと考えてこれを中心に講義をした．ほとんどすべての定義等は講義の中で与えたつもりである．当初は，$PL_c(S^1)$ の有限表示部分群について詳しく説明するつもりであったが，これから数学の研究を始めていこうとする学生たちが現実に遭遇することがもっと多いであろう群のホモロジーコホモロジーの解説をすることにした．分類空間の構成等は初等的なものであり，円周等に作用している群に対しては円周束等の上の葉層構造の模様を考えると幾何的な直感が使いやすい．亜群の分類空間（葉層構造の分類空間）は少し難しく聞こえたかもしれない．しかし，あらゆる可能な葉層構造を備えた空間がすなわち分類空間となるという考え方は心にとめておいて欲しいものである．

科目名　代数学特別講義 II　**担当教官**　原 伸生

サブタイトル　F-Singularities — Splitting of Frobenius Map and Geometric Aspects of Tight Closure

対象学年　大学院　**２単位**　**選択**

教科書　(基礎知識に関連する部分)

• H. Matsumura, Commutative Ring Theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
• R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Graduate Texts in Mathematics 52, Springer-Verlag, 1977.

参考書　(講義内容に直接関わる部分)

• M. Hochster, C. Huneke, Tight closure, invariant theory, and Briancon-Skoda theorem, J. Amer. Math. Soc. 3 (1990), 31–116.
• C. Huneke, Tight Closure and Its Applications, CBMS Regional Conference Series in Math. No. 88, American Mathematical Society, 1996.

予備知識

可換環論の初歩的な知識があるものと仮定する．さらに，Cohen–Macaulay 環，Gorenstein 環，標準加群などについてのより進んだ環論的知識と，スキーム，層係数コホモロジーなど代数幾何の基礎知識があれば理解の助けになると思われる．

講義内容

まず，正標数の可換環のフロベニウス写像を用いて定義される，tight closure と ”F- 特異点” の理論の基礎的な事項について可換環論的立場から解説した．また，F-特異点と標数 0 の代数多様体の特異点解消により定義される特異点との対応を紹介し，証明において本質的な役割を果たす正標数の手法と消滅定理との関係等に言及した．さらに，test ideal と multiplier ideal の対応，”組” の F-特異点，global F-regularity，或いは，次数環の F-特異点などといった最近の進展についても概説した．

講義の感想

前半の「基礎的な事項の可換環論的立場からの解説」の部分は学生がついて来ることが出来る程度の内容を意識して行ったため，この辺りに関するレポートの提出も 2 通あり，ほぼこちらの意図した通りでした．後半は，外部からの専門家の聴講者を意識して講義したため，学生さんには恐らく難しかったと思います．それでも最後まで出席してくれた人が何人かいて，大変有難かったです．全体としては，前後半のバランスが難しかった．

科目名　幾何学特別講義 II　　**担当教官**　小島 定吉

サブタイトル　双曲幾何学と多角形のモジュライ

対象学年　大学院　　**２単位**　**選択**

教科書　なし
参考書　拙著「多角形の現代幾何学 増補版」牧野書店 (1999)

予備知識

多様体論の基礎 (接空間，写像の微分，計量，群作用など)

講義内容

双曲幾何学の基礎から始め，平面多角形のモジュライとして双曲多面体が，また彩色多角形のモジュライとして双曲錐多様体が現れる様を解説した．さらに２次元および３次元の多様体が生じる彩色５および６角形の場合について，頂点に付随させる重みの変化が誘導するモジュライの変形を，双曲多様体の変形論の立場から記述した．

講義の感想

登録者数は５名，うち出席者は２名にすぎなかったのだが，それ以外の単位を必要としない出席者が相当数いて，質問も適当にあり，講義は進めやすかった．

科目名　偏微分方程式特別講義 I　**担当教官**　田中 和永

サブタイトル　変分的アプローチによる楕円型方程式の解析

対象学年　大学院　**２単位**　**選択**

教科書　特に指定しませんでした.
参考書　増田久弥　非線型数学（朝倉書店）
Struwe Variational methods (Springer)
田中和永　非線形数学（岩波書店）

予備知識

Sobolev 空間の基礎，関数解析の基礎

講義内容

楕円型境界値問題に対する変分的アプローチを解説した．特に１次元の場合に解の存在問題に対する最小化法，ミニマックス法の適用方法を詳述し，非常に複雑な解空間を持つ方程式の例 (Allen-Cahn 方程式) を紹介した.

講義の感想

大学院対象の講義にも関わらず学部の学生諸君にも多く聴講して頂き，非常に楽しく１週間集中講義をさせて頂きました．変分問題は関数空間等に関する予備知識が多く必要であり，題材に何を選ぶかいつも迷うところです．今回は，常微分方程式に対する境界値問題を取り上げ，かなり複雑なミニマックス法につきましても解説いたしましたが，いかがでしたでしょうか？無限次元空間での幾何的な方法の面白さ等の一端をみなさんにうまく伝えることができましたら，幸いです.

科目名　**数論特別講義 II**　　**担当教官**　**望月 新一**

サブタイトル　楕円曲線の Hodge-Arakelov 理論における遠アーベル幾何

対象学年　**大学院**　　**２単位**　**選択**

教科書　なし
参考書　**後述の「参考文献」参照**

予備知識

[Hh] 程度のスキーム論と，[Mn] 等に解説してあるエタール・サイトや代数的基本群の基礎.

[Hh] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math. **52**, Springer-Verlag (1977).
[Mn] J. S. Milne, *Étale Cohomology*, Princeton Mathematical Series **33**, Princeton University Press (1980).

講義内容

Grothendieck の「遠アーベル哲学」とは，数体のような数論的な体の上で定義され，かつある幾何的な条件を満たす代数多様体の幾何は，その「数論的基本群」に忠実に反映されるであろうという考え方を出発点とした数論幾何に対する新しいアプローチである．この「哲学」は１９８０年代初頭，Grothendieck によって提案されたが，実は，そのルーツはそれ以前に代数的整数論の観点から発見されていた Neukirch-内田の定理にまで遡る．更に，１９９０年代に入ってから，遠アーベル幾何では新しい結果が次々と得られ (参考文献の [12], [19] を参照)，Grothendieck が立てた主な予想の一部が，かなり強い形で肯定的に解決された．本講義では，遠アーベル幾何の survey 的な紹介を目標の一つとするが，ただの抽象的な定理群として扱うのではなく，最近になって明らかになった，楕円曲線の Hodge-Arakelov 理論との関係に注目しながら話を進めていく．この関係が示唆する遠アーベル幾何の新しい解釈によって，当初の Grothendieck の期待でもあった，Diophantus 幾何への応用の可能性が開けてくるものと思われる．

<u>I：遠アーベル幾何入門</u>　§1. 代数的基本群とは何か？　§2. Grothendieck の anabelian 哲学　§3. 遠アーベル幾何の代表的な定理　§4. 局所体の遠アーベル性

<u>II：Hodge-Arakelov 理論入門</u>　§1. 基本定理　§2. 無限遠点での状況　§3. 正標数的手法による証明

<u>III：basepoint, core, commensurator の話</u>　§1. anabelioid というもの　§2. core　§3. 正則構造　§4. 通約端末性　§5. global multiplicative subspace へのナイーヴなアプローチ

<u>IV：universe, 同期化</u>　§1. 独立な宇宙の導入　§2. 半楕円 orbicurve の通約端末性　§3. 無限遠点における通約端末性　§4. 正則局所化の圏　§5. 主結果

講義の感想

講義の最中，教官だけでなく，何回にもわたり，学生の方からも非常に有意義な質問や指摘が出され，講義全体の質に大きく寄与したことは，印象的でした.

参考文献

[1] M. Asada, The faithfulness of the monodromy representations associated with certain families of algebraic curves, *Journ. Pure Appl. Algebra* **159** (2001), pp. 123-147.

[2] J. W. S. Cassels and A. Fröhlich (editors), *Algebraic number theory*, Proceedings of the instructional conference held at the University of Sussex, Brighton, September 1-17, 1965, Academic Press (1986).

[3] P. Deligne and D. Mumford, The Irreducibility of the Moduli Space of Curves of Given Genus, *IHES Publ. Math.* **36** (1969), pp. 75-109.

[4] A. Grothendieck, Letter to G. Faltings (June 1983) in Lochak, L. Schneps, *Geometric Galois Actions; 1. Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme*, London Math. Soc. Lect. Note Ser. **242**, Cambridge Univ. Press (1997).

[5] M. Matsumoto, Galois representations on profinite braid groups on curves, *J. Reine Angew. Math.* **474** (1996), pp. 169-219.

[6] S. Mochizuki, *The Hodge-Arakelov Theory of Elliptic Curves: Global Discretization of Local Hodge Theories*, RIMS Preprint Nos. 1255, 1256 (October 1999).

[7] S. Mochizuki, *The Galois-Theoretic Kodaira-Spencer Morphism of an Elliptic Curve*, RIMS Preprint No. 1287 (July 2000).

[8] S. Mochizuki, *The Hodge-Arakelov Theory of Elliptic Curves in Positive Characteristic*, RIMS Preprint No. 1298 (October 2000).

[9] S. Mochizuki, Correspondences on Hyperbolic Curves, *Journ. Pure Appl. Algebra* **131** (1998), pp. 227-244.

[10] S. Mochizuki, A Version of the Grothendieck Conjecture for p-adic Local Fields, *The International Journal of Math.* **8** (1997), pp. 499-506.

[11] S. Mochizuki, The Profinite Grothendieck Conjecture for Closed Hyperbolic Curves over Number Fields, *J. Math. Sci., Univ. Tokyo* **3** (1996), pp. 571-627.

[12] S. Mochizuki, The Local Pro-p Anabelian Geometry of Curves, *Invent. Math.* **138** (1999), pp. 319-423.

[13] H. Nakamura, A. Tamagawa, and S. Mochizuki, The Grothendieck Conjecture on the Fundamental Groups of Algebraic Curves, *Sugaku Expositions* **14** (2001), pp. 31-53.

[14] J. Neukirch, A. Schmidt, K. Wingberg, *Cohomology of number fields*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **323**, Springer-Verlag (2000).

[15] J.-P. Serre, *Local Class Field Theory* in Algebraic Number Theory, ed. J.W.S. Cassels and A. Fröhlich, Academic Press (1967).

[16] J.-P. Serre, *Trees*, Springer-Verlag (1980).

[17] J.-P. Serre (with the collaboration of Willem Kuyk and John Labute), *Abelian l-adic Representations and Elliptic Curves*, Addison-Wesley Publishing Company (1989).

[18] *Revêtement étales et groupe fondamental*, Séminaire de Géometrie Algébrique du Bois Marie 1960-1961 (SGA1), dirigé par A. Grothendieck, augmenté de deux exposés de M. Raynaud, *Lecture Notes*

in Mathematics **224**, Springer-Verlag (1971).

[19] A. Tamagawa, The Grothendieck Conjecture for Affine Curves, *Compositio Math.* **109** (1997), pp. 135-194.

科目名　代数学特別講義 I　**担当教官**　天羽 雅昭

サブタイトル　有理性判定条件とその応用

対象学年　大学院　**２単位**　選択

教科書　特になし.

参考書
[1] Y. Amice, Les nombre p-adiques, Presses Universitaire de France, collection SUP 14, Paris, 1975.
[2] B. Dwork, G. Gerotto and F. J. Sullivan, An introduction to G-functions, Annals of Mathematics Studies, No. 133, Princeton, 1994.
[3] J. P. Bezivin, Independance lineaire des valeurs des solutions transcendantes de certaines equations fonctionnelles, Manuscripta Math. 61 (1988), 103–129.
[4] J. P. Bezivin and P. Robba, A new p-adic method for proving irrationality and transcendence results, Ann. of Math. 129 (1989), 181–192.

予備知識

学部で習う範囲および p-進解析の初歩（必要な事柄については講義の中で解説）

講義内容

p-進解析についての基本事項を準備してから，べき級数が有理関数を表すか否かを判定する Borel-Dwork の定理の証明を詳述．さらに，文献 [3] および [4] に従って，その超越数論（無理数論）への応用について解説.

講義の感想

科目名　トポロジー特別講義 I　　**担当教官**　藤原 耕二

サブタイトル　幾何学的群論の入門

対象学年　大学院　　**２単位**　**選択**

教科書　1) Lyndon, Roger C.; Schupp, Paul E. Combinatorial group theory. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.
2) Gromov, M. Hyperbolic groups. Essays in group theory, 75–263, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 8, Springer, New York, 1987.

参考書　なし

予備知識

群論の基礎

講義内容

１）組み合わせ群論からのトピック．Small cancellation theory を中心に．扱う項目：ファンカンペン図形．語の問題．デーン関数など．

２）Gromov の双曲群の初歩．定義と簡単な性質．線形のデーン関数を待つことを示す．

講義の感想

組み合わせ群論に 2 回，双曲群に 2 回使った．予定では双曲群に 3 回使うつもりだったのでその内容が少なくなった．ただ一定の内容はカバーできたので良かった．ただ双曲群についての研究論文をある程度読解できるには，あと 2 回位の講義が必要である．講義中，学生の理解度を想像するのは難しかったが，7 人の学生のレポートを見たところ講義内容をよく理解しているようで満足している．

科目名　**確率論特別講義 I**　**担当教官**　**吉田 伸生**

サブタイトル　Directed polymers in random environment

対象学年　**大学院**　**２単位**　**選択**

教科書　特に指定せず.

参考書
[Bol89] Bolthausen, E.: A note on diffusion of directed polymers in a random environment, Commun. Math. Phys. **123**, 529–534, (1989).
[CSY02] Comets, F., Shiga, T., Yoshida, N. Directed Polymers in Random Environment: Path Localization and Strong Disorder, preprint 2002.
[Dur] Durrett, R. : "Probability-Theory and Examples", 2nd Ed., Duxbury Press, 1995.
[ImSp88] Imbrie, J. Z. and Spencer, T.: Diffusion of directed polymer in a random environment, J. Stat. Phys. **52**, Nos 3/4 609-626, (1988).
[KaPe76] Kahane, J. P. and Peyriere, J. : Sur certaines martingales de Benoit Mandelbrot, Adv. in Math. **22**, 131–145, (1976).
[SoZh96] Song, R. and Zhou, X. Y. : A remark on diffusion on directed polymers in random environment, J. Stat. Phys. **85**, Nos.1/2, 277–289, (1996).

予備知識

講義内容

S_n を d 次元格子上の単純ランダムウォーク（各時刻 $n = 1, 2, \ldots$ で独立に，$2d$ 個の隣接格子点を等確率に選んで進む）とする．このとき，ランダムな軌道 $\{(S_n, n)\}_{n\geq 1}$ は時空 $d+1$ 次元の高分子（或は界面）のモデルとしてしばしば数理物理学に登場する．ここではこの軌道が（S_n とは別の）ランダムさを持った環境の中で時間発展（$n \nearrow \infty$）する場合を考察する．これは物理的には不純物を含む媒質内での高分子（或は界面）の揺らぎを観察することに相当する．数値実験や物理学者による発見的議論を含めて現在までに知られている，或は予想されている主な事柄は以下の通りである；

(a) $d \geq 3$ で媒質の不純度が弱ければ S_n の揺らぎは純粋媒質の場合と定性的に同じ；即ち通常のランダムウォークと同様の中心極限定理に従う．
(b) 媒質の不純度が強ければ不純物の配置に応じて (S_n, n) の限られた軌道に確率が集中し（局在），しかも通常のランダムウォークより揺れ幅が大きい．
(c) $d = 1, 2$ では媒質の不純度が弱くても上記 (b) の局在が起こる．

この講義では上記事柄についての物理的背景も交えた概説から始め，数学的に厳密な幾つかの結果ついて証明（のアイデア）を述べる．

講義の感想

講義内容は独立確率変数の和に関する基本事項・離散時間のマルチンゲールといった比較的初等的な確率論を用いてある統計物理のモデルを解析することであった．名古屋大学の確率論スタッフには統計物理に明

るい方が多く，講義中・講義後に質問やコメントが多く飛び交った．そういう意味では私にとっては緊張感と手応えに溢れた講義をさせて頂いた．本来主役であるべき学生からの質問は少なかったのが心配であるが少しの刺激だけでも与えることが出来たなら幸いである．