２０００年度講義内容要約

名古屋大学理学部数理学科・大学院多元数理科学研究科

２０００年度講義内容要約目次

前期講義内容要約

大学院

後期講義内容要約

1年

2年

3年

4年

大学院

２０００年度 前期講義内容要約

２０００年度前期時間割表（数理学科）

<table>
<tr><th></th><th></th><th>１年生</th><th>２年生</th><th>３年生</th><th>４年生</th></tr>
<tr><td rowspan="4">月</td><td>1</td><td>数学展望 I
（金井）</td><td rowspan="2">集合と位相
（橋本）</td><td rowspan="2">代数学要論
（行者）</td><td rowspan="2">体とガロア理論
（岡田）</td></tr>
<tr><td>2</td><td>数学演習 I
（古田・佐野）</td></tr>
<tr><td>3</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td>数学演習 VIII
（笹原）</td><td rowspan="2">数理解析
・計算機数学 I
（内藤・坂上）</td></tr>
<tr><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">火</td><td>1</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td><td rowspan="2">常微分方程式
（石毛）</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>数理物理学 I
（中西知）</td></tr>
<tr><td>3</td><td>数学演習 IX
（梁淞）</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">水</td><td>1</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="2">抽象ベクトル空間
（向井）</td><td rowspan="2">ルベーグ積分論
（長田）</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="4">木</td><td>1</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="2">解析学序論
（尾畑）</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">近代解析
（大沢健）</td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>数学演習 III
（千代延）</td><td>数学演習 X
（佐藤猛）</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">金</td><td>1</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">幾何学要論
（江尻）</td><td rowspan="2">多様体のトポロジー
（佐藤肇）</td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>数学演習 IV
（鍜島・吉田）</td><td>数学演習 VII
（佐藤周）</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td></td></tr>
</table>

２０００年度前期時間割表（大学院）

		４年生と共通	大学院のみ
月	1		
	2		解析学概論 I（名和）
	3		
	4		
火	1		
	2	数理物理学概論 I（中西知）	
	3		数論特論 I（斎藤秀）
	4		
水	1		
	2		代数学概論 I（齊藤博）
	3		
	4		
木	1		
	2		幾何学概論 I（土屋） 特殊関数論特論 I（青本）
	3		
	4		
金	1		
	2		複素幾何学特論 I（ウエン）
	3		表現論特論 I（キリロフ）
	4		

２０００年度前期時間割表（大学院昼夜開講コース）

月	5	
	6	
火	5	基礎数学特論 II 担当：長田 博文・市原 完治
	6	
水	5	
	6	
木	5	基礎数学特論 I 担当：佐藤 肇・金井 雅彦
	6	
金	5	
	6	

科目名　**数学基礎 I**　**担当教官　寺西 鎮男**

サブタイトル

対象学年　**１年**　**1.5 単位　必修**

教科書　三宅，市原，　理系の基礎数学　微分積分学
参考書

予備知識

特に仮定しない

講義内容

高等学校で学んだ微積分法にひきつずき１変数の微分法，積分法について学ぶ.
具体的な講義内容は以下の通り：

第一回　円周率に関する Archimedes, Wallis, Leibniz, Euler の結果及びその証明と問題点について話をしました．また，日本の関孝和，建部賢弘の仕事についてもふれました.

第二回，第三回　数列と極限．具体的には，数列の極限の定義，極限の一意性，収束数列の有界性，極限の四則演算，はさみうちの原理，ボルツアノーワイエルシュトラスの定理，有界単調数列の収束，コーシーの収束判定条件，数列の極限の諸例，自然対数の底 e の定義.

第４–７回　関数の極限，連続関数の性質（中間値の定理，最小，最大値定理）微分法，平均値の定理，Rolle の定理，Taylor 展開，極値問題，凸関数，Jensen の不等式，級数の収束，絶対収束と条件収束.

第８–９回　級数の続き，１変数関数の積分の定義，Riemann の積分可能条件，連続関数および単調関数の積分可能性，積分の性質，平均値の定理，定積分と原始関数.

第１０–１２回　広義積分，広義積分の収束の判定条件，テイラーの定理の積分形．第１０回の講義の時間に４０分間簡単な試験をしました．第１１回の講義の時間中に試験問題の解答の解説，第１２回の時間中にレポート問題の解説をおこないました.

講義の感想

講義を通じて, できる限り平易に解説を心がけたが難解であるという学生も多くいた．レポートは，４回提出してもらったが，同じまちがいが多く自分で考えていないと思われる学生が多かった.

参考資料

中間試験　2000.06.29

問題 1.　次の問いに答えよ.

(1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ を求めよ.

(2) $\lim_{p\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^p \right)^{\frac{1}{p}} = \max(a_1, a_2, \cdots, a_n)$　$(a_1, a_2, \cdots, a_n$は正数) を示せ.

問題 2.　$f(x)$ は閉区間 (a, ∞) で連続とする．このとき，　$\lim_{x\to\infty}(f(x+1)-f(x)) = l$　ならば，$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = l$ であることを証明せよ.

問題 3.　$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ が無理数であることを次のヒントを用いて証明せよ.
ヒント：e が有理数であると仮定すると，ある十分大きな自然数 n に対して $n!\cdot e$ は自然数である.

問題 4.　テイラーの定理を述べよ.（証明はしなくてよい）

試験問題

問題 1.　数列 a_n で $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$　ならば，$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = 0$　であることを証明せよ.

問題 2.　次の極限値を求めよ.

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}$　(a は正定数)　　(2) $\lim_{x\to 0} x \log x$　　(3) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$

問題 3.　関数 $f(x)$ が開区間 I で c^2 -級で，$a \in I$ に対し，$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$,　$(0 < \theta < 1)$ のとき，$f"(a) \neq 0$ ならば，$\lim_{h\to 0} \theta = \frac{1}{2}$ であることを証明せよ.

問題 4.　次の級数の収束，発散を理由を述べて判定せよ.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$　　(2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$

問題 5.　$X \geq 0$ で正の値をとり，単調減少する関数 $f(x)$ に対し，

(1) $\int_0^{\infty} f(x)dx$ が収束すれば，$xf(x) \to 0$　$(x \to \infty)$ であることを示せ.

(2) (1) のとき，さらに $f(x)$ が $x \geq 0$ で c^1 -級ならば，$xf'(x) \to 0$ であることを示せ.

科目名　数学基礎 I　**担当教官**　佐藤 肇

サブタイトル

対象学年　**１年**　**1.5 単位**　**必修**

教科書　三宅, 市原著 「理系の基礎数学 微分積分学」 学術図書
参考書

予備知識

講義内容

シラバスどおり．１変数の微分, 積分.

定積分の計算まで終わった.

講義の感想

講義を通じて，できる限り平易に解説を心がけた．イプシロンデルタの論法も時間をかけて説明したが, 基本はかなりの学生は理解したと思う.

参考資料

中間試験　2000.06.29

問題 1.　$\epsilon - \delta$ 論法を用いて次を示せ.

$$\lim_{x\to 0} 5x \sin\frac{1}{x^3} = 0$$

問題 2.　次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{10^n}{n!}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x+\log(1-x)}{x^2}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x}$

問題 3.　f を有界閉区間 I で連続な関数とする．もし，$f(I)\subset I$ ならば，$f(x)=x$ を満たす $x\in I$ が存在することを示せ.

問題 4.　次の関数の導関数を求めよ.

(1) $\mathrm{Tan}^{-1}x$　　(2) $\dfrac{1+\cos x}{1+\sin x}$　　(3) $(x^x)^x$　　(4) $\log\log x$

問題 5.　$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\frac{1}{x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$ と定義するとき，関数 f の連続性，微分可能性，導関数の連続性について述べよ．

科目名　数学基礎 I　　**担当教官**　尾畑 伸明

サブタイトル

対象学年　**１年**　　**1.5 単位**　**必修**

教科書　江尻・三宅：微分法＆積分法
参考書

予備知識

講義内容

微分積分学の初歩を講じた.

1. １変数連続関数（３回）
   - 実数の性質. 特に，連続の公理.
   - ϵ-*delta* 論法による数列の極限.
   - ϵ-*delta* 論法による連続関数.
   - 連続関数の基本的性質.
2. １変数関数の微分（２回）
   - 微分可能性.
   - 新しい関数（逆三角関数，双曲線関数）.
   - 高次導関数.
3. １変数関数に対するテイラーの定理（４回）
   - ロルの定理
   - 平均値の定理.
   - テーラーの定理.
   - テーラー展開（計算）.
4. 1 変数関数の積分（３回）
   - 連続関数のリーマン積分.
   - 微分積分学の基本定理.
   - 不定積分と原始関数.
   - 広義積分.
   - 積分の計算.

講義の感想

授業で触れる項目だけが数学ではない．講義などほったらかして，自らの感性を磨き，自らの興味のおもむくまま，どんどん先を勉強するといった気概が欲しい．講義に (単に) 出席することと学問は別であろう．

参考資料

演習問題 I　2000.04.27

問題 1.　A で定義された関数 $f(x)$ が A の 1 点 a で連続であることを ϵ-δ を用いて定義せよ.

問題 2.　$\mathbf{R}$ で定義された関数 $f(x) = -5x$ が $x = a$ で連続であることを示したい. 任意に与えられた $\epsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ をどのように選べばよいか? a と ϵ を用いた式で表せ.

問題 3.　$\mathbf{R}$ で定義された関数 $f(x) = 3x^2$ が $x = a$ で連続であることを示したい. 任意に与えられた $\epsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ をどのように選べばよいか? a と ϵ を用いた式で表せ.

問題 4.　$\mathbf{R}$ で定義された関数 $f(x) = \sin x$ が $x = a$ で連続であることを示したい. 任意に与えられた $\epsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ をどのように選べばよいか? a と ϵ を用いた式で表せ.

問題 5.　$A = \mathbf{R}\backslash\{\mathbf{0}\}$ で定義された関数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ は連続関数か? そうなら証明, そうでないならその理由を述べよ.

問題 6.　$f(x)$, $g(x)$ を連続関数とするとき, その和 $F(x) = f(x) + g(x)$ も連続関数となることを示せ.

問題 7.　2 つの有理数 $p < q$ の間には必ず無理数が存在することを示せ.

問題 8.　数列

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

について, (i) 上に有界であること; (ii) 単調増加であること, の 2 点を証明せよ. (したがって, 極限が存在するが, それを e と書き, 自然対数の底という.)

問題 9.　2 つの関数

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x\,\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

の $x = 0$ における連続性を考えよ.

問題 10.　A で定義された関数 $f(x)$ が A の 1 点 a で連続であることを a に収束する点列の言葉で正確に述べよ.

問題 11.　次の数列は収束するか?

$$a_n = \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3}, \qquad b_n = n^{1/n}, \qquad \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

問題 12. 直径 1 の円に内接する正 n 角形の周長を a_n について色々調べよ. (すべての n で調べにくければ, $3, 6, 12, 24, 48, \cdots$ のようにとびとびに考えても良い.)

小テスト I 2000.05.11

問題 1. $f(x) = \sqrt{x}$ は $x = 1$ において連続関数であることを ϵ-δ を用いて示せ.

問題 2. 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \sqrt{1 + a_0}\,, \quad \cdots, \quad a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}\,, \cdots$$

で定義する.

(i) $\{a_n\}$ は上に有界であることを示せ. (ヒント: たとえば $a_n \leq 2$ を帰納法で示せ.)

(ii) $\{a_n\}$ は単調増加数列であることを示せ.

(iii) 連続の公理「上に有界な単調増加数列は収束する」によって $\{a_n\}$ は収束することが保証されている. その極限を求めよ.

小テスト II 2000.05.25

問題 1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ は $x = a > 0$ において連続関数であることを ϵ-δ を用いて示せ. (与えられた $\epsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ をどのように選べばよいか? a と ϵ の式で表すこと.)

問題 2. $a_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$ $(n \geq 1)$ とおくとき, $\{a_n\}$ は収束することを示せ.

問題 3. 逆三角関数に対する次の公式を証明せよ.

(1) $\arcsin \dfrac{3}{5} + \arcsin \dfrac{4}{5} = \dfrac{\pi}{2}$

(2) $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2} \quad (-1 \leq x \leq 1)$

問題 4. $y = \arctan x$ に対して,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (n-1)! \cos^n y \sin\left\{n\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

を示せ.

演習問題 II 2000.06.22

問題 1. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ とする. すべての n と $x > 0$ に対して $(-1)^{n-1} f^{(n)}(x) > 0$ であることを示せ.

問題 2. $f \in C^2(\mathbf{R})$ であるが $C^3(\mathbf{R})$ には属さない $f(x)$ の例を作れ.

問題 3. $f(x) = \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$, に対して $f'(x)$ を求めよ. そのことから何が判るか?

問題 4.　$f(x)$ が $\mathbf{R}$ 上で n 回微分可能で, $f^{(n)}(x) \equiv 0$ (つまり, すべての $x \in \mathbf{R}$ で $f^{(n)}(x) = 0$) ならば $f(x)$ は高々 $n-1$ 次多項式であることを示せ. (Hint: テーラーの定理)

問題 5.　次のテーラー展開を確かめよ.

$$\frac{x}{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n$$

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = (\text{求めよ})$$

$$\log \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$(1+x)e^x = (\text{求めよ})$$

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}$$

問題 6.　テーラー展開が

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$$

となる関数 $f(x)$ を求めよ.

小テスト III　2000.06.29

問題 1.　平均値の定理を正確に (仮定・結論を特に明確に) 述べ, その証明のアイデアを記せ.

問題 2.　$y = f(x)$ で次の 2 条件：

(a) $f(x)$ は $[0, 1]$ 上で連続であり, $f(0) = f(1)$;

(b) $f(x)$ は $(0, 1)$ 上で微分可能であり, すべての x に対して $(f'(x))^2 = 1$;

をみたすものは存在しないことを示せ.

問題 3. 関数 $f(x)$ は区間 $[0,1]$ 上で C^2-級で, すべての $0<x<1$ に対して $f''(x)=0$ であるとき, $f(x)$ は高々1 次多項式であることを示せ.

問題 4. 次の関数を $x=0$ のまわりでテーラー展開せよ.

$$f(x)=\frac{x}{1-x^2} \qquad g(x)=\sin^2 x$$

演習問題 III 2000.07.13

$$(1)\ \int\frac{dx}{1+x^2} \qquad (2)\ \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (3)\ \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} \qquad (4)\ \int\cot x\,dx$$

$$(5)\ \int\sinh x\,dx \qquad (6)\ \int\frac{dx}{x^2-4x+1} \qquad (7)\ \int\frac{x}{(x-a)(x-b)}\,dx \quad (a\neq b)$$

$$(8)\ \int\frac{x^3-8x+7}{x^2-4x+5}\,dx \qquad (9)\ \int\cos^3 x\,dx \qquad (10)\ \int\frac{x}{(x^2-a^2)^3}\,dx$$

$$(11)\ \int\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx \qquad (12)\ \int\frac{dx}{x\log x} \qquad (13)\ \int\frac{dx}{\sin x} \qquad (14)\ \int\frac{dx}{2\sin x+3\cos x+4}$$

$$(15)\ \int\frac{dx}{4+5\cos x} \qquad (16)\ \int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} \qquad (17)\ \int\frac{dx}{(x^2+a)^{3/2}}$$

$$(18)\ \int\frac{dx}{x(x^n+1)} \qquad (19)\ \int\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x} \qquad (20)\ \int\frac{dx}{\sin^4 x}$$

(答: 積分定数省略)

$$(1)\ \arctan x \qquad (2)\ \arcsin x \qquad (3)\ \log|x+\sqrt{x^2+a}| \qquad (4)\ \log|\sin x| \qquad (5)\ \cosh x$$

$$(6)\ \frac{1}{2\sqrt{3}}\log\left|\frac{x-2-\sqrt{3}}{x-2+\sqrt{3}}\right| \qquad (7)\ \frac{1}{a-b}\left(a\log|x-a|-b\log|x-b|\right)$$

$$(8)\ \frac{x^2}{2}+4x+\frac{3}{2}\log|x^2-4x+5|-7\arctan(x-2) \qquad (9)\ \frac{3}{4}\sin x+\frac{1}{12}\sin 3x \qquad (10)\ -\frac{1}{4(x^2-a^2)^2}$$

$$(11)\ 2\sqrt{\sin x} \qquad (12)\ \log|\log x| \qquad (13)\ \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| \qquad (14)\ \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan(x/2)+2}{\sqrt{3}}$$

$$(15)\ \frac{1}{3}\log\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+3}{\tan\frac{x}{2}-3}\right| \qquad (16)\ \frac{1}{a}\log\left|\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| \qquad (17)\ \frac{x}{a\sqrt{x^2+a}}$$

(18) $\dfrac{1}{n}\log\left|\dfrac{x^n}{x^n+1}\right|$　　(19) $\dfrac{1}{ab}\arctan\left(\dfrac{a}{b}\tan x\right)$　　(20) $-\dfrac{\cos x}{3\sin^3 x}-\dfrac{2}{3}\dfrac{\cos x}{\sin x}$

前期試験　2000.09.14

● **注意** 問題 1, 問題 2, 問題 3 は必答, 問題 4 から問題 7 から 2 問を選択解答せよ.

問題 1.　$f(x)$ は実数 $\mathbf{R}$ 上の連続関数であり, 積分 $\displaystyle\int_{-t}^{t} f(x)dx$ が $t>0$ によらず, 一定値をとるとき, そのような一定値を求めよ. (15 点)

問題 2.　関数 $f(x)=e^x\cos x$ を原点 $x=0$ のまわりでテーラー展開せよ. (収束について論ずる必要はない) (15 点)

問題 3.　数列 a_n を

$$a_0=\sqrt{2},\quad a_1=\sqrt{a_0+2},\quad a_2=\sqrt{a_1+2},\quad \cdots,\quad a_{n+1}=\sqrt{a_n+2},\quad \cdots$$

で定める.

(1) 数列 a_n は収束することを実数の性質を用いて証明せよ. (20 点)

(2) $f(x)=\sqrt{x+2}$ は閉区間 $[\sqrt{2},2]$ 上で連続関数であることを ϵ-δ を用いて示せ. (10 点)

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ. (10 点)

問題 4.　次の積分を計算せよ. ただし, $a>0$ は定数である. (15 点)

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

問題 5.　$\tan x$ の逆関数 $y=\arctan x$ は主値を取っているものとする. $x\neq 0$ に対して $f(x)=\arctan x+\arctan\dfrac{1}{x}$ とおくとき, $y=f(x)$ のグラフの概形を描け. (15 点)

問題 6.　ライプニッツの公式 $(fg)^{(n)}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}f^{(k)}g^{(n-k)}$ を用いて, 関数

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}}$$

は, すべての整数 $n\geq 1$ とすべての $x>0$ に対して $(-1)^{n-1}f^{(n)}(x)>0$ をみたすことを示せ. (15 点)

問題 7.　区間 $[0,1]$ 上で定義された連続関数 $f(x)$ が有理数の値しかとらないものとする. $f(1)=2$ のとき $f(0)$ の値を求めよ. (15 点)

「数学基礎 I　前期試験　解答のヒント・講評」を作成し，配布予定だが長くなるので省略.

科目名　数学基礎 II　**担当教官**　金銅 誠之

サブタイトル

対象学年　１年　**1.5 単位**　**必修**

教科書　江尻典雄著，理系の基礎数学 線形代数学
参考書

予備知識

特に仮定しない

講義内容

通常の線形代数の授業の通り，行列と行列式について教科書に従い講義を行った．
具体的な講義内容は以下の通り：

1. 複素数，平面ベクトルと一次変換（１回）
2. 行列の演算，いろいろな行列（対称，エルミート，直行，ユニタリ，正則行列, 群の話（２回）
3. 基本変形と階数，逆行列の計算（２．５回）
4. 連立方程式（１回）
5. 平行四辺形，立方体の体積（０．５回）
6. 置換（１回）
7. 行列式の定義，行列式と階数，クラメール，行列式の展開（３回）
8. 演習と中間試験をそれぞれ１回行った

講義の感想

やさしい問題ではあったが，中間試験はほとんどの人が良くできた．これに安心したのか期末試験の出来は同程度の問題にもかかわらず，良くない．行列式の計算さえ出来ない人が目についた．

参考資料

試験問題 I　2000.06.21

問題 1.　n 次正方行 X, Y に対し $[X, Y] = XY - YX$ と定義する．このとき次を示せ．
(1) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$
(2) X, Y が交代行列ならば $[X, Y]$ も交代行列である．

(3) $[X, Y] = E_n$ を満たす X, Y は存在しない（ヒント：trace（トレース）を考えよ）.

問題 2.　(1) 正規行列の定義を述べよ.

(2) n 次正方行 A が $A^2 = A, A \neq E_n$ を満たしているとき，A は正規行列かどうか理由をつけて答えよ.

問題 3.　次の行列の逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

問題 4.　(1) n 次正方行 A と A の階級の関係を述べよ.

(2) 次の正方行列は正則であることを示せ．ただし，A, C はそれぞれ m 次，n 次の正則行列とする.

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

演習問題　2000.07.19

問題 1.　A を複素正方行列とする.

(1) $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$ を示せ.

(2) A がユニタリ行列のとき $|\det(A)| = 1$ を示せ.

問題 2.　A, B が n 次正方行列のとき

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B)\det(A-B)$$

を示せ.

問題 3. 次の行列の行列式を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{pmatrix}, \omega^3 = 1, \omega \neq 1,$　(2) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{pmatrix}$

問題 4.　(1) 次を示せ：(Vandermonde（ファンデルモンド）の行列式)

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_1 & \dots & a_n \\ a_1^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{j<j} (a_i - a_j)$$

(2) 平面上の n 個の点 $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ で $a_i \neq a_j$ $(i \neq j)$ を満たすものに対し

$$y = c_0 + c_1 + \cdots + c_{n-1}x^{n-1}$$

の形の曲線で，これら n 個の点を通るものがただひとつ存在することを示せ.

試験問題 II　2000.09.13

問題 1. 次の行列の行列式を計算せよ．また，これらの行列の階数も求めよ：

$$(1)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (2)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

問題 2. (1) A, B が n 次正方行列，P が n 次正則行列で $A = PBP^{-1}$ を満たすとき，$\det(A) = \det(B)$ を示せ．

(2)A が直行行列のとき，$\det(A) = \pm 1$ を示せ．

問題 3. (x, y) -平面の 2 つの直線

$$(*)\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

を考える．また，$(*)$ を連立方程式と考えたときの係数行列を A，拡大係数行列を $\tilde{A}$ とする．この 2 つの直線が一致，平行，または一点で交わっているとき，$A, \tilde{A}$ の階数は，それぞれ，どうなっているか答えよ．

問題 4. 次の等式を証明せよ：

$$\det\begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \end{pmatrix} = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

科目名　数学基礎 II　　**担当教官**　小林 亮一

サブタイトル　線形代数

対象学年　１年　　**1.5 単位**　**必修**

教科書　佐武一郎・著，線形代数，共立出版
参考書　斉藤正彦・著 線形代数入門，東大出版会

予備知識

高校までの数学

講義内容

行列とその積．実数空間の間の線形写像の概念とその行列による表現．線形写像の合成と行列の積．線形写像の核と像．線形部分空間の概念．1 次独立と従属の概念．基底．次元．線形写像の一般の基底に関する行列表現とその例．番外編として命題論理．なお，これらの諸概念の理解を数学演習の時間を通じて確かめるという方針をとった．

講義の感想

講義を通じて，線形性の概念とその表現という文脈で解説を心がけている．基底つき線形空間の線形変換とその行列表現の考え方とその図形的意味を繰り返し説明した．多項式空間に働く平行移動や微分作用素，微分方程式の解空間などの例で，矢印ベクトル以外の世界に線形代数の世界がひろがっていることを見せた．掃出し法については，階数などの概念の具体的計算法と位置づけ，マニュアル的側面は自習に期待する予定である．後期は可逆性と行列式，直交変換と 2 次形式の話をする予定．

参考資料

演習問題 (選)

問題 1.　同じサイズの行列 A, B には和 $A+B$ が定義され，行列 A と実数 λ に対して スカラー倍 λA が定義される．また，n 行 m 列の行列 A と m 行 p 列の行列 B に対しては，積 AB が定義される. 一方，たとえば n 行 m 列の行列 A は，線形写像 $f_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ を表現するのであった.
(i) n 行 m 列の行列 A によって表現される線形写像 $f_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ とは何か.
(ii) 行列に対する和，スカラー倍，積の定義を，線形写像の世界で言いかえるとどうなるか. このようなものが定義できる理由は何か.

問題 2.　$\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ で，像が平面 $2x - y + z = 0$ になるものの例をひとつ作り，行列で表現せよ.

問題 3. $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ で，核が直線 $x=2t, y=-t, z=t$ となるものの例をひとつ作り，行列で表現せよ．

問題 4. $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ で，像が平面 $2x-y+z=0$ で，核が直線 $x=2t, y=-t, z=t$ となるものの例をひとつ作り, 行列で表現せよ.

問題 5. 線形空間 V およびそのふた組の基底 $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ を次のものとする．基底のとりかえ $\mathcal{E}\to\mathcal{F}$ の行列を求めよ．

(i) $V=\{(x_i)\in\mathbb{R}^4\,;\,x_1+x_2+x_3+x_4=0\}, \mathcal{E}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}, \mathcal{F}=\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}.$

(ii) $V=\{2$ 次以下の実係数多項式の全体 $\}$, $\mathcal{E}=\{-x^2-4x+3,\ x^2+2x-2,\ x^2+3x-2\}$, $\mathcal{F}=\{2x^2+x+1,\ -x^2-x+2,\ 3x^2+2x+1\}$.

問題 6. (i) $\mathbb{R}^2$ の線形変換 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ を基底 $\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ に関して行列表示せよ.

(ii) $\mathbb{R}^3$ の線形変換 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1&1&-1\\-3&9&-5\\-5&13&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ を基底 $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ に関して行列表示せよ.

(iii) $\mathbb{R}^3$ の線形変換 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}-1&-5&-1\\2&4&0\\-4&-8&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ を基底 $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ に関して行列表示せよ.

問題 7. フィボナッチ数列とは，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ を満たす数列のことで，a_1 と a_2 を与えると以下は上の規則で $a_3, a_4, \cdots$ が次々に定まる数列である．この数列を

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a_2\\a_3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a_3\\a_4\end{pmatrix}\cdots$$

の順に定まる $\mathbb{R}^2$ の点列と見て幾何学的に考えると，線形写像の問題になる．実際，この点列は $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ が与えられれば，あとは $\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$ で定まる $\mathbb{R}^2$ の線形変換を繰り返し行うことによって得られる.

(i) このこと，すなわち $\forall n$ に対して

$$\begin{pmatrix}a_n\\a_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{n-1}\\a_n\end{pmatrix}$$

が成り立つこと示せ.

(ii) 行列 $\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$ によって定まる $\mathbb{R}^2$ の線形変換 f には不動直線 (f による像が自分自身になるような直線) が 2 本存在し，それらは直交する．2 本の不動直線を求めよ.

(iii) 行列 $\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$ によって定まる $\mathbb{R}^2$ の線形変換 f を, 不動直線に平行な 2 本の単位ベクトル $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ のなす基底に関して行列表現せよ.

(iv) もともとのフィボナッチ数列は標準基底 e_1, e_2 に関する直交座標系で表されたものである．そこで，f の不動直線に由来する単位ベクトル $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ によって定まる $\mathbb{R}^2$ の新しい直交座標系に関してフィボナッ

チ数列を表現し直したらどうなるか. 新しい直交座標系を導入した意味があるといえるか.
(v) (iii) の結果を標準基底に関する座標系にもどして，もともとのフィボナッチ数列の一般項を求めよ.

問題 8.　A を $\mathbb{R}^2$ の原点中心の回転または原点を通る直線に関する折り返し，$\overrightarrow{b}$ を $\mathbb{R}^2$ のベクトルとして

$$\Phi(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x} + \overrightarrow{b}$$

と書ける $\mathbb{R}^2$ の変換を運動という.
(i) 運動の合成と運動の逆写像はまた運動であることを示せ.
(ii) 運動でうつりあう 2 つの 3 角形を合同であるという. 2 つの 3 角形が合同であるための必要十分条件を求めよ (3 角形の合同条件).

問題 9.　$\mathbb{R}^2$ のアファイン変換とは 2 次正則行列 A とベクトル $\overrightarrow{b}$ を使って

$$\Phi(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x} + \overrightarrow{b}$$

と書ける $\mathbb{R}^2$ の変換のことと定義する. アファイン変換でうつりあう 2 つの 3 角形をアファイン同値であるという. 任意の 2 つの (つぶれていない) 3 角形はアファイン同値であることを示せ.

問題 10.　次の線形空間の次元およびひと組の基底を求めよ.
(i) $\mathbb{R}^4$ の中で 3 つのベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

の張る部分空間.
(ii) $\mathbb{R}^4$ の元 (x_i) で連立方程式

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

を満たすもの全体.
(iii) 3 次以下の $\mathbb{R}$-係数多項式のなす空間 V_3 (V_3 が 4 次元線形空間であることを確かめよ.) で

$$1 + x + x^2 + x^3,\ 1 + x^2 + 2x^3,\ x - x^3$$

の張る部分空間.
(iv) V_3 を (ii) と同じとする. このとき V_3 の元 f で

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$$

を満たすもの全体.
(v) V_3 を (ii) と同じとする. このとき V_3 の元 f で $f(-1) = f(1) = 0$ を満たすもの全体.

問題 11.　(i) 4 次以下の実係数多項式全体のなす集合 V は，通常の多項式の加法とスカラー倍に関して，$\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ (1 は定数関数) をひとつの基底とする 5 次元のベクトル空間であることを示せ.

(ii) 微分演算 $D : V \to V$ を $D(f) = f'(= \frac{df}{dx})$ で定義すると $D : V \to V$ は線形写像であることを示せ.

(iii) 基底 $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ に関して D を行列表示せよ.

(iv) 4 次以下の多項式を 5 回微分すれば 0 になるのは当然である．そこで，(iii) で求めた行列を A とするとき，行列の積として $A^5 = 0$ が成り立っていることを確認せよ.

試験問題

問題 1. 次の問いに答えなさい.

(i) 写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ が線形写像であるとはどういう意味か，説明しなさい.

(ii) 線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ の像 $\mathrm{Im}\, f$ は $\mathbb{R}^3$ の線形部分空間であることを示しなさい.

(iii) 線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ の核 $\mathrm{Ker}\, f$ は $\mathbb{R}^3$ の線形部分空間であることを示しなさい.

(iv) 線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ の像と核の次元の間に成り立つ関係を述べなさい.

問題 2. V, W を線形空間とし，$\mathcal{E} = \{e_1, \cdots, e_n\}$, $\mathcal{E}' = \{e'_1, \cdots, e'_m\}$ をそれぞれ V, W の基底とする．線形写像 $T : V \to W$ に対して，m 行 n 列の行列 $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ が

$$T(e_j) = \sum_{i=1}^{m} e'_i a_{ij} \quad (j = 1, \cdots, n) \quad \left[\Leftrightarrow \quad T(e_1, \cdots, e_n) = (e'_1, \cdots, e'_m)A\right]$$

によって定義される．行列 A を，線形写像 T の基底 $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ に関する表現行列という．$V \ni v = \sum_{j=1}^{n} v_j e_j$ を基底 $\mathcal{E}$ に関する成分表示，v の像 $T(v) \in W$ を基底 $\mathcal{E}'$ に関して成分表示したものを $T(v) = \sum_{i=1}^{m} v'_i e'_i$ とおく．このとき，

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

が成り立つことを示しなさい.

問題 3. 対角成分の和が 0 であるような 2 次実行列のなす実線形空間を V とする.

(i) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ は V の基底であることを示しなさい.

(ii) 正則行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して $X \mapsto AXA^{-1}$ $(X \in V)$ は V の線形変換を定義することを示しなさい.

(iii) 線形変換 $X \mapsto AXA^{-1}$ の，(i) の基底に関する表現行列を求めなさい.

問題 4. 方程式 $x + y + z = 0$ で与えられる $\mathbb{R}^3$ の線形部分空間 V を考える.

(i) 線形部分空間 V の基底をひと組求めなさい.

(ii) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ で与えられる $\mathbb{R}^3$ からそれ自身への線形写像 f は，線形部分空間 V をそれ自身にうつすことを示しなさい.

(iii) あなたが (i) で求めた V の基底を $\mathbb{R}^3$ の通常の座標で表したものを $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ とする．このとき，

行列の方程式

$$\begin{pmatrix} c & f \\ a & d \\ b & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$$

が成り立つような 2 次行列 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$ を求めなさい．また，V からそれ自身への線形写像 $f|_V$ の，あなたが (i) で求めた基底に関する表現行列を求めなさい．ただし，$f|_V$ とは，f の定義域を線形部分空間 V に制限したものである．

科目名　　**数学基礎 II**　　**担当教官**　**浪川 幸彦**

サブタイトル　線形代数学

対象学年　　**１年**　　**1.5 単位**　**必修**

教科書　齋藤正彦，線型代数入門，東京大学出版会
参考書　齋藤正彦，線型代数演習，東京大学出版会

予備知識

特に仮定しない

講義内容

線形代数学の入門として，通年講義の前半にあたる．
具体的な講義内容は以下の通り：

1. ２，３次元の座標幾何学（４回）
   - 平面・空間ベクトル
   - 直線と平面ー定義方程式とパラメータ表示，双対性
   - 平面の回転と線型変換
2. 行列（５回）
   - 行列の定義と演算
   - 正方行列，特に正則行列
   - 行列と線型写像
   - 行列の基本変形・階数
   - 一次方程式系.
3. 行列式（２回半）
   - 置換
   - 行列式と基本性質
   - 行列式の展開

講義の感想

試験を実施してみて，学生が如何に内容を理解していないかが，如実に分かって愕然とした．しかもこれは明らかに勉強不足である．前期に保健学科の講義も担当したが，ほぼ同じ内容の試験であったにもかかわらず，こちらの方が抜群に成績がいい（平均点数にして約 20 点の開きがある）．前期の線型代数は，新し

い概念は次々に出てくるものの，ある程度機械的に計算法を覚えればよいので，家庭学習をきちんとやれば，問題はないはずである．そのように自覚的に方向付けなければならない．

参考資料

中間試験　2000.06.28

問題 1.　次の行列の巾 ($A^1, A^2, A^3, \cdots, A^\nu, \cdots$) を計算せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$

問題 2.　正方行列 A が等式 $A^2 - a + E = 0$ をみたすとき，A は正則行列であることを示し，逆行列を求めよ．

問題 3.　2 次の行列 $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ を 4 次元ベクトルとみなしたとき，任意の 2 次行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ に対して，写像

$$L_A : X \to AX,\ R_A :\to XA$$

はともに（4 次元ベクトル空間から自分自身への）線型写像である．各々に対応する行列を求めよ．

問題 4.　次の行列の階数を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 4 & -7 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

問題 5.　次の行列の逆行列を掃き出し法で求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

問題 6.　次の連立方程式を掃き出し法で求めよ．

(1) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_5 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + 3x_5 = 2 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$　(a は実数)

期末試験　2000.09.13

問題 1.　次の置換を互換の積で表せ．(各問 5 点）

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　　(i と j とを交換する互換を (ij) で表す）

問題 2. 次の行列の行列式を計算せよ．(１．２．は各 5 点，３．は 10 点）

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}$

問題 3. 次の行列の行列式を計算せよ.（各問 7 点）

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ (n 次正方行列) (5) $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x \end{vmatrix}$

問題 4. 次の方程式をクラメールの公式を用いて解け.（各問 10 点）

(1) $\left.\begin{aligned} x+y+z&=1 \\ ax+by+cz&=d \\ a^2x+b^2y+c^2z&=d^2 \end{aligned}\right\}$

（ただし a,b,c は互いに異なる）

(2) $\left\{\begin{aligned} -x_1+x_2+x_3+x_4&=1 \\ x_1-x_2+x_3+x_4&=0 \\ x_1+x_2-x_3+x_4&=0 \\ x_1+x_2+x_3-x_4&=0 \end{aligned}\right.$

問題 5. 成分がすべて整数である正方行列 A が正則，かつ A^{-1} もまた整数行列であるためには A の行列式が ± 1 であることが必要十分条件であることを示せ.（15 点）

科目名　**数学展望 I**　　**担当教官**　**金井 雅彦**

サブタイトル　連続性とトポロジー

対象学年　**１年**　　**２単位**　**選択**

教科書　とくに指定しない．その代わり講義録を配布．
参考書　なし

予備知識

仮定しない

講義内容

講義の概略は次の通りである．なお詳細については講義録を参考にされたい．講義録は

`http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kanai/`

から入手可能である．

第１部　中間値の定理

連続性がいかに重要な概念であるか，それを認識するための糸口として，１変数関数の連続性に関わる最も基本的な結果，すなわち中間値の定理を最初の話題に選んだ．一見自明にも見える中間値の定理が実は豊かな内容を持つことを，まずいくつかのパズル風な問題を考えることにより実感して貰うことから始めた．その後証明の準備として，連続性の定義・有界単調数列の収束性に話を進め，最後に定理の証明を行った．

1.1 中間値の定理応用２題

1.2 問題解説

1.3 連続性の新たな定義

1.4 有界単調数列

1.5 中間値の定理の証明

第２部 Brouwer の不動点定理

次の話題は２変数関数に対する Brouwer の不動点定理である．まず定理を述べ次いでそれと同値な主張を 2, 3 紹介した．さらにそれらの証明に先立ち，いくつかの応用問題を取り扱った．Brouwer の不動点定理の証明するにあたっては，組合せ論的なアプローチをとることにした．その鍵になるのが Sperner の補題である．一方，証明において重要な役割を果たすもうひとつのものは，コンパクト性である．これらの結果・概念を説明の後に，Brouwer の不動点定理の証明を行った．

2.1 連続性と不動点定理

2.2 応用問題

2.3 同相写像

2.4 ベクトル場のゼロ点の存在

2.5 Sperner の補題の証明

2.6 有界閉集合のコンパクト性

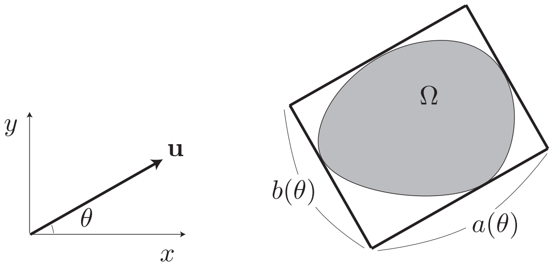
講義の感想

出席していた学生諸君が実に積極的に取り組んでくれたお陰で，担当者自身もこの講義を楽しむことが出来た．

参考資料

第１回試験　2000.05.08

問題.　平面内に滑らかな境界を持つ有界凸領域が与えられているとする．このとき，この領域に 4 点で外接する正方形が存在することを示せ．



第２回試験　2000.06.12

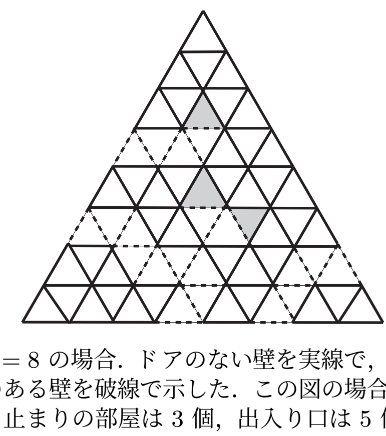
問題.　次の主張 (A) を用いて主張 (B) を証明せよ．ただし，$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ とする．

(A) $\varphi(P) = P$, $({}^\forall P \in \partial D)$ を満たす連続写像 $\varphi : D \to D$ は常に全射である．

(B) 任意の連続写像 $\psi : D \to D$ は不動点を有する．

第３回試験　2000.07.03

問題.　(1) 正 3 角形に対し，その各辺を n 等分することにより，小正 3 角形に分割する．元の大きな 3 角形を建物に，また小 3 角形を部屋に見立てよう．すると小 3 角形の各辺は壁と見なせる訳である．壁にはドアがひとつ付いたものとドアがひとつもないものがあるとする．ただしどの部屋も少なくともひとつドアの付いていない壁を持つものとする．とくにドアがひとつしかない部屋を行き止まりの部屋と呼ぶことにする．一方，建物の外壁に面するドアを出入り口と呼ぼう．このとき，行き止まりの部屋の個数の偶奇と出入り口の個数の偶奇は常に一致することを示せ．



$n = 8$ の場合．ドアのない壁を実線で，ドアのある壁を破線で示した．この図の場合，行き止まりの部屋は 3 個，出入り口は 5 個で，確かに両方とも奇数である．

(2) Sperner の補題を述べよ．次に (1) を利用して (2 次元の) Sperner の補題を証明せよ．ただし 1 次元版 Sperner の補題は既知であると仮定してよい．

科目名　数学演習 I　**担当教官**　佐野 武

サブタイトル

対象学年　１年　**２単位**　**選択**

教科書
参考書

予備知識

特に仮定しない

講義内容

線形代数と微分積分の演習問題を解いた．問題はできるだけ授業に沿ったものを選択した．一つの問題についてみんなで議論しながら解いた．

講義の感想

講義の方の中間テスト，演習の期末テストの前はみんなとても良く勉強をして，予想以上の良い出来だったが，普段は家庭学習をまったく期待できなかったのが残念だ．

科目名 **数学演習 I** **担当教官** **梅村 浩**

サブタイトル

対象学年 **１年** **２単位** **選択**

教科書
参考書

予備知識

特に仮定しない

講義内容

線形代数を中心にして演習問題を解いた．とにかく，コミュニケーションがとれることを第一目標にした．

講義の感想

20 名のクラスが 2 つの講義の学生に分かれている．（小林先生 10 名，浪川先生 10 名）この二重性が効率を上げるのに大きな障害となった．この点は改善されるのが望ましい．

中程度の学生を中心に考えたため，優秀な学生にとってはつまらないものとなる傾向があるのは否めないが，やむをえないと感じた．

科目名　**数学演習Ｉ**　**担当教官**　**木村 芳文**

サブタイトル

対象学年　**１年**　**２単位**　**選択**

教科書
参考書

予備知識

特に仮定しない

講義内容

大学に入って高校までの数学とのギャップに悩まされながらそれを解決できずに数学から逃避する学生が多数いる.（たとえ数理学科に進んだとしてでもである.）そういった学生に対しては何らかの culture shock absorber 的な役割をする授業がほしい．また一方, 数学に対する興味を持続できる学生にとっても大学初年度に物が解るという感覚，或いは問題が本当に解けるという感覚を掴む事は多大の自信を得る機会であり，それ以降の授業における難関をも突破するだけの弾みをつけることにもなろう．以上のことを念頭に可能な授業形態はと考えると少人数に対しての演習の形式の授業以外には想像しがたい．そういった理由で１年生に対して試験的に少人数演習クラスを導入した.

講師としては前もって担当が決まっていた２名の教官（佐野，古田）の他，この試みに賛同してくれた３名の教官（土屋，梅村，小林）と木村の計６名で分担した．予想以上に多数の学生が履修したので（金井教授による数学展望Ｉの後の時間であったことが大きかったと思われる.）１クラスあたり２０名程度の学生が割り当てられた．演習の形態は従来の問題を解く人のみが問題を理解し，なるべく多数の問題を消化するタイプではなく全く逆にむしろ問題数は少なくしぼり，全員の学生がまず問題の背景や重要性を理解するように自由に議論ができる雰囲気をつくることを心掛けた．教官の間で細かい運営方法や問題を統一することはなかったが目的および基本精神だけは何度も確認した.

佐野助手が纏め役となって基礎数学 I, II の担当教官から授業内容が頻繁に伝えられており，授業の進行程度を知るのに役立った．木村のクラスは数学展望Ｉがむしろ解析的な赴きを持っていたので線形代数を主に題材に選んだ．内容としては

1. 線形変換としての行列
2. 行列の基本変形
3. 連立方程式の解法と解空間
4. 行列式の意味

などをなるべく丁寧に教科書に書いてない心の部分を伝えるように心掛けた.

講義の感想

出席状況や学生の反応を見る限りかなりの手ごたえを感じた．今回の試みがどのような実質的な成果を上げたのか或いは上げるのか大変興味がある．すこし時間が立ってからの学生からのフィードバックをモニターしたいと思う．少人数クラス演習はある意味では非常に贅沢な授業形態であるが，今回の試みがある程度の効果を上げるのであれば研究科の理解が得られる限り積極的に続けることが重要だと思う．

科目名　数学基礎 V　　**担当教官**　谷川 好男

サブタイトル

対象学年　２年　　**1.5 単位**　**必修**

教科書　複素解析，高橋礼司（東京大学出版会）
参考書

予備知識

1 年生の微積分

講義内容

複素関数論（1 変数）の基礎．Cauchy の積分定理を中心に，それから導かれる重要な諸定理を解説した．具体的な講義内容は以下の通り：

1. 複素関数
   - 複素級数の収束．
   - 指数関数の性質，とくに Euler の公式．
2. 解析関数
   - 微分可能性，Cauchy-Riemann の条件．
   - 正則関数，解析関数．
   - 解析接続の原理．
3. Cauchy の積分定理
   - 線積分の定義．
   - Cauchy の積分定理の証明．
4. Cauchy の定理のもたらすもの
   - 平均値の定理．
   - 最大値の原理．
   - 孤立特異点と Laurent 展開．
   - 留数定理，および留数定理による定積分の計算．

講義の感想

時間が足りないせいもありますが，演習不足を痛感します．

科目名　　抽象ベクトル空間　　　　**担当教官**　向井 茂

サブタイトル

対象学年　　２年　　　　**４単位**　　**必修**

教科書　　齋藤　正彦「線型代数入門」
参考書

予備知識

講義内容

1. 体の公理とベクトル空間の公理
2. 内積空間と直交多項式
3. Caylay-Hamilton の定理
4. ベキ零行列の Jordan 標準形
5. 一般固有空間への分解
6. 実対称行列の直交行列による対角化
7. エルミート行列とユニタリ行列
8. 双対ベクトル空間

講義の感想

参考資料

中間試験　2000.06.21

問題 1.　次の行列 A に対して次の各問に答えよ．

$$ア）\quad A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 8 & -6 & -4 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad イ）\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) ア）の場合に A^2 を計算せよ．

(2) 固有値と一般固有空間の次元を求めよ．

(3) A の Jordan 標準型と，$P^{-1}AP$ が Jordan 標準型になる正則行列 P を求めよ．

(4) イ）の場合に

$$\vec{v} = P_1\vec{v} + P_2\vec{v} \qquad (\vec{v}\text{は勝手な３項縦ベクトル})$$

で，$P_1\vec{v}, P_2\vec{v}$ がともに A の一般固有ベクトルとなる３次正方行列の対 P_1, P_2 を求めよ．

問題 2.　行列 $A = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ のベキ乗 A^n を求めよ．

問題 3.　(1) 次を証明せよ．

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n! \qquad n \geq 0$$

(2) 内積

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x} dx$$

に関して，$1, x, x^2, x^3$ の Schmidt 直交化を行え．

期末試験　2000.09.20

問題 1.　次の行列 A の Jordan 標準型と $P^{-1}AP$ を Jordan 標準型にする正則行列 P を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

問題 2. 次の対称行列 A に対して $P^{-1}AP$ を対角行列にする直交行列 P を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

問題 3. (1) ベキ零行列 A の固有値は０であることを示せ．

(2) 対角化できない複素対称行列が存在する．例を一つあげよ．また，それが対角化不可能なことを示せ．

問題 4.　次を論じよ．

(1) エルミート行列．その対角化とユニタリ行列．

(2) ベクトル空間の双対と線型写像の双対．

(3) 一般固有空間への直和分解と Cayley-Hamilton の定理．

科目名　解析学序論　　**担当教官**　尾畑 伸明

サブタイトル

対象学年　２年　　**４単位**　**必修**

教科書　杉浦：解析入門 I，東大出版会
参考書　杉浦他：解析演習，東大出版会

予備知識

講義内容

すでに既習とは思われる事項も多々あるが，復習の意味をかねながら，解析学の初歩を講じた．特に，多変数 (実際は２変数) 関数についての微分積分の基礎と，実数や極限に関する厳密な論証に慣れることを目的とし，計算ではなく概念的な理解の必要性を説いた．

1. 実数と連続（３回）
    - 実数の公理.
    - ϵ-δ 論法による数列の極限.
    - 実数の連続性.
    - ϵ-δ 論法による連続関数.
    - 連続関数の基本的性質 (最大値の存在，中間値の定理).
2. １変数関数の微分法（２回）
    - 微分可能性.
    - ロルの定理，平均値の定理.
    - テーラーの定理.
    - テーラー展開.
3. 多変数関数の微分法（３回）
    - 微分可能性 (偏微分と全微分).
    - テーラーの定理.
    - テーラー展開.
    - 極値問題.
4. 多変数の積分法（４回）
    - リーマン積分.

- 一様連続性にもとづく連続関数の積分可能性.
- 微分積分学の基本定理 (１変数関数について).
- 不定積分と原始関数.
- 広義積分.
- 積分の計算 (極座標，累次積分への変換など).
- Γ-関数，B-関数，球の体積.

講義の感想

学期末試験に加え，中間試験によって合否を判定すると明言し，答案も返却しているのであるから，不可となった学生はあまりにも不勉強であるといわざるをえない.

参考資料

中間試験 I　2000.05.25

問題 1.　実数列 $\{a_n\}$ が次の性質をもつときコーシー列と呼ばれる:

任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある番号 N が存在して,

$m, n > N \implies |a_m - a_n| < \epsilon.$

(1)$a_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$ $(n \geq 1)$ とおくとき, $\{a_n\}$ はコーシー列であることを示せ.

(2) $|a_{n+1} - a_n| \leq \dfrac{1}{n}$ をみたす実数列はコーシー列か? 正しければ証明, 誤りならば反例によって説明せよ.

問題 2.　逆三角関数に関する次の公式を証明せよ.

(1) $\arcsin \dfrac{3}{5} + \arcsin \dfrac{4}{5} = \dfrac{\pi}{2}$

(2) $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2} \quad (-1 \leq x \leq 1)$

問題 3.　$x \in \mathbf{R}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \lim_{m\to\infty} (\cos(n!\pi x))^{2m} \right\}$$

を求めよ.

問題 4.　次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}.$

(2) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x + y) \sin\frac{1}{x} \sin\frac{1}{y}.$

中間試験 II　2000.07.06

問題 1.　$\mathbf{R^2}$ 上の関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

について, 次のことを証明せよ.

(1) $f(x,y)$ は $(0,0)$ において連続.

(2) $f(x,y)$ は $(0,0)$ において偏微分可能.

(3) $f(x,y)$ は $(0,0)$ において全微分不可能.

問題 2.　(1) 1 変数関数に対するテーラーの定理を正確に (仮定・結論を明確に) 述べよ.

(2) 次の不等式を証明せよ.

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \qquad x \neq 0.$$

(3) テーラー展開が

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$$

となる関数 $f(x)$ を求めよ.

問題 3.　一定の表面積 S をもつ直方体のうち体積最大のものを, 微分法を応用して求めよ.

定期試験　2000.09.14

注意 以下の 5 題から 4 題を選択して解答せよ. 式を羅列するだけで論理の展開が明確でないもの, 文字や文章の解読のために過大な努力を要するものは零点とする.

問題 1.　区間 $[0,1]$ 上で定義された連続関数 $f(x)$ が有理数の値しかとらないものとする. $f(1) = 2$ のとき $f(0)$ の値を求めよ.

問題 2. 平面 $\mathbf{R^2}$ 上の C^2-級 $f(x,y)$ に対して極限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2} \equiv \alpha$$

が存在するとき,

$$f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0, \qquad \Delta f(0,0) = 4\alpha,$$

であることを示せ. ただし, 関数 $f(x)$ が C^2-級であるとは, 2 階偏導関数が連続関数になるものをいい, Δ はラプラシアン

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

である.

問題 3. $n \geq 1$ を整数とする．2 次元平面の極座標 (r, θ) を用いて表示された領域

$$D = \{(r, \theta)\,;\, 0 \leq r \leq |\sin n\theta|,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

を考える．

(1) 領域 D の概形を描け．

(2) 領域 D の面積を求めよ．

問題 4. 関数 $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x$ を考える．

(1)$f(x, y)$ の極値をすべて求めよ．

(2)c を定数とするとき，$f(x, y) = c$ で定まる曲線の概形を描け．

問題 5. $D = \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$, $a > 0$, $b > 0$ とするとき，次の積分を計算せよ．

$$\iint_D \frac{dxdy}{a^2x^2 + b^2y^2}$$

科目名　集合と位相　　**担当教官**　橋本 光靖

サブタイトル

対象学年　２年　　**２単位**　必修

教科書
参考書　松坂和夫，集合・位相入門，岩波書店.

予備知識

特に仮定しない

講義内容

現代数学を学ぶ基礎として，集合と位相について解説を行なった．集合，位相ともに，この講義の内容を理解しなければ，その後の数学の学習に大いに支障を来す必須事項に重点をおいて講義した．集合については，集合の基本操作，関係，同値関係，商集合，順序, 濃度，カントールの定理などを，位相については，位相空間，連続写像，閉包と開核，近傍，誘導位相，商位相，積位相，連結性，コンパクト性，Hausdorff 性，距離空間，$\mathbf{R}^n$ の位相などを講義した.

具体的な講義内容は以下の通り：

I. 集合　（６回）

1. **論理記号** 命題，否定，かつ，または，ならば，同値，対偶，背理法，$\forall$ と $\exists$
2. **集合** 集合，集合論における命題，集合の例，外延的記法，内包的記法，ラッセルの逆理，部分集合の公理，集合の相等，空集合，部分集合 (4/17)
3. **集合算** 集合系，和集合，共通部分，差集合，全体集合，補集合，巾集合，特性関数
4. **写像** 順序対，有限列，有限直積，対応，一意存在，写像，対応と写像の例，写像の相等は各元の像の相等
5. **写像に関する緒概念** 像，逆像，これらの基本性質，$\cup$や$\cap$との関係，全射，単射，全単射，合成，恒等写像，自然な埋め込み (埋入写像) (4/24)

   合成に関する全射・単射の振る舞い，逆写像，全単射であることと逆写像を持つことの同値，制限，Map(A,B)
6. **集合族と直積** 族，集合族，置換の公理，集合族の和集合，共通部分，直積，選出公理 (選択公理)，全射は分裂する，Source が空集合でない単射は分裂する, 算法
7. **同値関係** 関係のグラフによる定義，反射律，対称律，推移律，反対称律，擬順序, 同値関係，順序，同値関係の例 (5/8)

   直和分割，類別，同値類，商集合，商写像，商集合の例，誘導写像
8. **自然数** 無限の公理，正則性の公理，ZFC 公理系，自然数の定義，数学的帰納法の原理 (5/15)

9. 集合の濃度 対等，対等な集合の例，濃度，濃度の大小，Bernstein の定理

10. 濃度の演算 濃度の和・積・巾，可算集合 (5/22)

実無限濃度，Cantor の定理

11. 順序集合 全順序，Hasse 図，最大元・最小元，極大元・極小元，上界・下界, 上限・下限，順序を保つ写像，順序単射，順序同型，双対順序, a.c.c.，極大条件，極小条件，整列集合 (5/29)

II. 中間試験 （１回） (6/5)

III. 位相 （６回）

1. 位相 位相，位相空間，離散位相，密着位相，位相の強弱

2. 開集合と開核 開集合，開核，開核作用子，擬順序の定める位相

3. 閉集合と閉包 閉集合，閉包，閉包作用子

4. 準開基と開基 生成する位相，準開基，開基，第２可算公理 (6/12)

5. 距離と距離空間 距離，距離空間，$\mathbf{R}^n$ の例，離散距離，開球，距離の定める位相

6. 境界，触点，その他 内点，外点，外部，触点，収束列，触点の特徴づけ，閉点，孤立点，集積点，近傍，開近傍，基本近傍系，第一可算公理，稠密，可分性 (6/19)

7. 連続写像 連続写像，定義の様々な言い換え，例，距離空間の間の連続写像，合成に関する振る舞い

8. 同相写像 開写像，閉写像，同相写像，例，同相，位相不変性

9. 部分空間，商空間，直積空間 誘導位相，相対位相，部分空間，像位相，商位相，商空間，直積位相，初等開集合 (6/26)

$\mathbf{R}^n$ の Euclid 距離による位相は直積位相，$\mathbf{R}$ の四則演算の連続性，行列のなす空間

10. 連結性 連結性，連結空間の連続像・閉包の連結性，連結成分，連結空間の直積の連結性 (7/3)

$\mathbf{R}$ の連結部分集合は区間，中間値の定理

11. 弧状連結性 弧，道，弧状連結成分，弧状連結，局所連結，局所弧状連結，例，局所弧状連結かつ連結ならば弧状連結

12. コンパクト性 被覆，開被覆，部分被覆，有限被覆，有限部分被覆，コンパクト，簡単な例，有限交叉性，コンパクト性の閉集合への伝播，連続像への伝播, Tychonoff の定理 (7/10)

13. Hausdorff 性 Hausdorff 空間，距離空間は Hausdorff，部分空間への伝播，T_1 性, 対角線とグラフ，Hausdorff 空間のコンパクト部分集合は閉，$\mathbf{R}^n$ のコンパクト部分集合の特徴づけ，いくつかの例, 最大値・最小値の原理 (7/17)

Zorn の補題，整列可能定理，順序数には触れなかった．Bernstein の定理，連結空間の直積空間の連結性，Tychonoff の定理は証明はしなかった．

講義の感想

これまでの相場から見て，最小限の講義内容だったが，それでも多すぎたと感じている．レポートの講評等，丁寧にやったつもりだが，好きで努力して食い下がって頑張った人と何となく分からなくなってしまっ

た人との距離が開いただけになった感がある．積み重ねの学問である数学の勉強の一番大事な入り口で安易に物事を考えている者が多かったように思う.

参考資料

中間試験

問題 1.　A, B が集合，P は A の部分集合，Q は B の部分集合とする．$f : A \to B$ は写像とする．この時，次が成立することを証明せよ.

(1)$f(f^{-1}(f(P))) = f(P)$

(2) $f^{-1}(f(f^{-1}(Q))) = f^{-1}(Q)$

問題 2.　A が集合で，$f : A \to A$ は写像とする．自然数 n に対して，$f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n 回の合成) と定義する．次の問いに答えよ.

(1) ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して f^n が全射であれば，f は全射であることを示せ.

(2) ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して f^n が単射であれば，f は単射であることを示せ.

(3)A が有限集合の時，条件

(i)　$f(B) = B$

(ii) ある自然数 n が存在して，$f^n(A) \subset B$

をみたす A の部分集合 B が一意的に存在する.

問題 3.　A, B が順序集合，$f : A \to B$ は順序を保つ単射とする．A が全順序集合とするとき，f は順序単射であることを示せ.

問題 4.　実数の全体 $\mathbb{R}$ に関係 $\sim$ を $a \sim b$ とは，$a - b$ が有理数であることと定めることにより定義する．次に答えよ.

(1)$\sim$ は同値関係であることを証明せよ.

(2)$\mathbb{R}/\sim$ は無限集合であることを証明せよ.

(3) より詳しく，$\mathbb{R}/\sim$ は実無限濃度 $\aleph$ を持つことを示せ.

科目名　数学演習 III　　**担当教官**　千代延 大造

サブタイトル

対象学年　２年　　**２単位**　必修

教科書

参考書　尾畑先生の講義で指定されているもの

予備知識

特に仮定しない

講義内容

尾畑先生の解析学序説にできるだけ沿いながら演習をおこなった．とくにεδ論法を使えるようになることと，平均値の定理，テイラーの定理を理解して使えるようになることに，演習の力点をおいた．途中3回小テストをおこなった．

講義の感想

科目名　　**数学演習 IX その１**　　**担当教官**　**吉田 健一**

サブタイトル　線形代数, 集合位相

対象学年　　**２年**　　**２単位**　**必修**

教科書
参考書　集合・位相入門 (松坂和夫 著)

予備知識

特に仮定しない

講義内容

演習をA, Bの２クラスに分割 (名簿の前半と後半) し, 鍜島が線形代数を担当し, 吉田が集合位相を担当した．演習の回数はそれぞれのクラスに５回ずつで, 他に１回合同演習を行った (集合位相の基本事項を解説).
(I) 線形代数 : 前半では, 高校生のときからなじみの深い２次正方行列なども例として提示しつつ, 線形空間, 線形写像の基本概念の復習を行った．後半では, ジョルダン標準形の計算例を出題した.
(II) 集合位相：講義 (集合位相) の進み具合を考慮して, 前半では集合の演習を行った．ここでは従来のスタイル (生徒に黒板に解いてもらい, 解説をしてもらう) をベースに行ったが, 30 分程度の時間を割いて, 全員に１〜２題の演習問題を解いてもらった．解けなかった問題については, レポートとして提出してもらい添削して返却した．内容は以下の通り (おおむね参考書にそった).

- 集合と写像の基本概念 (種々の概念, 直積, 写像, 関係)
- 選出公理, 集合の濃度 (濃度の概念, Bernstein の定理, 可算集合, 濃度の和, 巾)
- 順序集合, Zorn の補題

(注意) 順序数については, 講義の方でも割愛されたので, 演習でも割愛した.

後半は位相の演習を行った．位相については, 夏休み前後２回 (30 題ほど指定) に分けてレポートとして提出してもらった．また, 基本的な問題 (位相の定義, 開球は開集合であること, 閉区間のコンパクト性など) を解説した．位相の演習問題のキーワードは, 例えば, 以下のものがあげられる :
3 点より成る位相, ザリスキ位相, 半開区間による位相, 位相の導入, 距離による位相, 開集合と閉集合, ユークリッド空間, ハウスドルフ性, 開球, コーシー列と完備性, 閉包の収束列による表現, 相対位相, 連続写像の定義と ϵ-δ 論法, 同相写像, 位相の強弱, 開基底, 逆像位相, 像位相, 商空間, 直積位相, 対角線集合とハウスドルフ性, コンパクト空間の実例, 点列コンパクト性, コンパクトハウスドルフ空間上の連続写像, 一様収束と連続関数, ℓ^2 の可分性, 連結集合, $\mathbf{R}$ の連結性, 連結成分, 中間値の定理, 弧状連結と凸集合

講義の感想

集合位相の演習 (レポート) で気になった点をいくつか列挙すると,

- 逆像 f^{-1} を逆写像が存在するかのように扱うケースが多い.
- 論理式の順序に対する認識が甘い.

- 開集合の否定は閉集合であると勘違いするケースが多い.
- 開基底と位相の区別がつかない.

参考資料

試験問題 2000.09.22

問題 1. $\mathbf{R}$ (実数全体のなす集合) において, 次の４つの部分集合族を考える.

- $B_1 = \{(a,\, b) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$
- $B_2 = \{[a,\, b] \mid a, b \in \mathbf{R}\}$
- $B_3 = \{(a,\, b] \mid a, b \in \mathbf{R}\}$
- $B_4 = \{\mathbf{R} \setminus A \mid A$ は $\mathbf{R}$ の有限部分集合 $\}$

各 $i = 1, 2, 3, 4$ に対して, $\mathcal{O}_i$ を「B_i の任意個数の和集合からなる集合族 (空集合を含む)」とすると, $(\mathbf{R}, \mathcal{O}_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ はいずれも位相空間になる．このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 上の４つの位相を弱い順番に並べ, その理由を述べよ.
(2) 上の位相空間のうち, ハウスドルフ空間であるものとそうでないものを１つずつあげ, それぞれ理由を述べよ.
(3) 上の位相空間を１つ選び, その位相に関して, 原点 0 の連結成分 C_0 を求めよ.

問題 2. 次の (a),(b) のどちらかを選択して答えよ.
(a) 円 $S^1 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ はユークリッド空間 $\mathbf{R}^2$ (平面) の compact 部分集合であることを示せ.
(b) ユークリッド空間の中で, compact でない有界部分集合の例を１つあげて, その理由を述べよ.

科目名　数学演習 IX その２　　**担当教官**　鍜島 康裕

サブタイトル　線形代数

対象学年　**２年**　　**２単位**　**必修**

教科書　なし
参考書　なし

予備知識

一般的な教科書に書いてある程度

講義内容

今までに習った線形代数の復習と現在習っている線形代数に関する問題を出題した.
具体的な講義内容は以下の通り：

1. ベクトル空間と行列（２回）
   - ベクトル空間，行列，行列式との関係.
2. 行列式，線形写像と特殊な行列の標準形（２回）
3. 行列式の特徴付け，多重線形写像（２回）
4. 標準形（２回）
   - ジョルダンの標準形
   - 二次形式（特に正値）
5. その他（２回）
   - 準同型写像
   - 行列の exp

講義の感想

出てきてはいるのに，そしてこちらで「この問題やってみたら」と促しているのに全然解かない人が数人いたようです．なにもやらないと点の付けようがありません.

科目名　　代数学要論　　**担当教官**　行者 明彦

サブタイトル

対象学年　　３年　　**６単位**　　**選択**

教科書　（参考書のみ）
参考書　松村英之著「代数学」朝倉書店
松坂和夫著「代数系入門」岩波
森田康夫著「代数概論」裳華房

予備知識

講義内容

2 年次前期の「抽象ベクトル空間」および 2 年次後期の「代数学序論」の内容をふまえて，群・環・体・加群について講義した．環論の部分は可換環に話を限り，Hilbert の零点定理を目標とした．最初の 90 分を講義にあて，残りの 90 分を演習にあてるかたちで講義をすすめた．項目１から６までが済んだところで一回目の試験をし，残りを定期試験の範囲とした．ネーターの正規化定理やヒルベルトの零点定理は定期試験の範囲に入れなかった．

具体的な講義内容は以下のとおり．

1. 群の定義．

   群，アーベル群（可換群），指数，位数，準同形，同型，自己同型，自己同型群，内部自己同型群，外部自己同型群，剰余群，剰余集合，準同形写像の核・像．

   以上の言葉を導入し，準同形定理を説明した．

   また，群の実例として一般線形群，特殊線形群，直交群，特殊直交群，シンプレクティク群，対称群をあげた．

   また，演習問題のなかで，中心化群，正規化群，部分群の生成，交換子，交換子群，直積群特性部分群という言葉を導入した．

2. 自由群．生成系と関係式による群の表示．

3. ジョルダン・ヘルダーの定理．群の作用．

   講義の前半で，正規列，組成列，組成因子といった言葉を導入し，シュライアーの細分定理を紹介し，そこからジョルダン・ヘルダーの定理がすぐに従うことを説明した．（シュライアーの細分定理の証明は演習にまわした.）

講義の後半で，群の作用，軌道，軌道分解，固定部分群，推移的作用（均質作用，可移的作用）といった言葉を導入し，作用が推移的であれば，剰余集合と同一視できることを解説した．

4. R-加群

「環」および環 R に対して「R-加群」を導入した．

またイデアル，イデアルの生成系，単項イデアル，単項イデアル環という言葉を導入し，整数環や多項式環が単項イデアル環であることを演習問題として出した．

5. 単因子，アーベル群の基本定理

単項イデアル整域についての定理というかたちで，単因子およびアーベル群の基本定理を紹介した．証明は整数環の場合のみにした．

6. ジョルダン標準形

これを単因子論を用いて証明した．

7. 環論の基礎的概念

素イデアル，極大イデアルという言葉を導入し，ツォルンの補題を紹介したあと，これらの剰余環が整域，体になることを示した（同値性）．最後に局所環の定義を与えた．また演習のなかでイデアルの根基，準素イデアル，中山の補題を紹介した．

8. ネーター環

ネーター加群（環），アルティン加群（環），有限生成加群という言葉を導入し,「ネーター環のイデアルが有限生成であること」と「多項式環がネーター環であること」を示し，これらの定理の不変式論における意味を解説した．

9. ヒルベルトの零点定理

整域，体，R-代数などの定義から始めて，４回の授業でネーターの正規化定理とヒルベルトの零点定理を証明した．

導入したキーワードは以下の通り：整域，体，R-代数，拡大体，拡大次数，有限拡大，代数拡大，超越拡大，代数閉体

講義の感想

項目８で話したことに触発されて T.A.Springer 著 「Invariant Theory」 の勉強会を始めたグループがいて嬉しかった．演習にあてた時間には気軽に質問が出ていたので，出席していた人たちにとっては，それなりに勉強になったと思う．

参考資料

試験問題 I

問題 1. 二つの群 G と H に対し，$G \times \{1\}$ は $G \times H$ の正規部分群になり $G \times H/G \times \{1\}$ と H は同形になることを示せ.

問題 2. 群 G の部分集合 S に対し

$$N_G(S) := \{g \in G \mid gSg^{-1} = S\}$$
$$Z_G(S) := \{g \in G \mid \text{すべての } s \in S \text{ に対し } gsg^{-1} = s\}$$

とおく． $N_G(S)$ は，G の部分群であり，$Z_G(S)$ は $N_G(S)$ の正規部分群であることを示せ.

問題 3. 加法群 $\mathbb{Q}$ と 加法群 $\mathbb{Z}$ とは同形でないことを示せ.

ただし，$\mathbb{Q} = \{$ 有理数全体 $\}$, $\mathbb{Z} = \{$ 整数全体 $\}$

問題 4. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$E = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}, \qquad F = \{A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$$

とおく． E/F は，巡回群であることを示せ．また，その位数を求めよ.（ E, F は加法により，群の構造を定める．位数とは群の元の個数のこと.）

試験問題 II

問題 1. R, S を環とし， $f : R \to S$ を準同形写像とする.（すなわち，$f(r + r') = f(r) + f(r')$, $f(rr') = f(r)f(r')$ がすべての $r, r' \in R$ に対して成立する）この時，$\ker f := \{r \in R | \ f(r) = 0\}$ は，R のイデアルであることを示せ.

問題 2. $I := \{(x^2 - 1)f(x) | \ f(x) \in \mathbb{C}[x]\}$ は，多項式環 $\mathbb{C}[x]$ のイデアルであることを示せ．また，I は素イデアルではないことを示せ.

問題 3. K を体とし 1_k をその単位元とする． $\{n \in \mathbb{Z} | \ n1_k = 0\}$ は，$\{0\}$ であるか，または，$\mathbb{Z}_p$ （p は素数）とあらわせることを示せ.

問題 4. $x^2 + x + 1 = 0$ をみたす複素数のひとつを ω とする． $\mathbb{Q}(\omega) := \{a + b\omega | \ a, b \in \mathbb{Q}\}$ は体になることを示せ.

科目名　微分方程式　**担当教官**　石毛 和弘

サブタイトル

対象学年　３年　**６単位**　**選択**

教科書　笠原晧司著，微分方程式の基礎，朝倉書店
参考書　Coddington-Levinson 著，常微分方程式論 (上)，吉岡書店

予備知識

特に仮定しない

講義内容

常微分方程式における解の存在，一意性，解の延長性などの基本的な事柄を理解する．また，これらによって，線形常微分方程式の解空間の構造について理解し，また，求積法で得られた解についての考察を加える．また，簡単な場合についての解軌道について理解し，一般的な結果として，また，講義の目標として，Poincaré-Bendixon の定理をあげた．

講義の基本的目標はあくまでも，常微分方程式の基礎定理，線形常微分方程式の２つの章の内容を理解するとし，進んだ内容として，常微分方程式の大域理論を講義した．

具体的な講義内容は以下の通り：

1. 常微分方程式の基礎定理
    - 常微分方程式とその解
    - 求積法
    - 解の存在 (Cauchy-Peano の定理)
    - 解の一意性
    - 逐次近似法
    - 解の延長
    - 初期値又はパラメータに関する解の連続性
    - パラメータに関する解の微分可能性
    - 解析的常微分方程式
2. 線形常微分方程式
    - 解空間の構造
    - 非同次線形連立系
    - 定数係数の線形連立系
    - 線形高階微分方程式

- 定数係数の高階微分方程式

3. 常微分方程式の大域理論

- 大域理論とは？
- 連立線形方程式の解軌道 (次元２)
- 安定行列
- 自励系
- 線形近似
- リヤプノフの方法
- ω-limit set と limit cycle
- Poincaré-Bendixon の定理

講義の感想

参考資料

試験問題　2000.09.19

問題 1.　$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への連続写像 f に対して，正定数 L が存在し

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \qquad x, y \in \mathbb{R}^n$$

が成立したとする．このとき，$x_1(t)$, $x_2(t)$ $(t \in \mathbb{R}^n)$ が微分方程式 $x'(t) = f(x(t))$ の解ならば,

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq |x_1(0) - x_2(0)|e^{L|t|}, \qquad t \in \mathbb{R}^n$$

を満たすことを示しなさい.

問題 2.　微分方程式

$$x" + 4x = 0$$

の解 $x = x(t)$ をすべて求めなさい.（すべての解を求めたことになっている理由についても詳しく説明する.）

問題 3.　区間 $I = [-1, 1]$ 上の連続関数列 $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，正定数 L が存在して

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq L \left| \int_0^t |x_n(s) - x_{n-1}(s)| ds \right|, \qquad n = 2, 3, \ldots, \quad t \in I$$

が成立しているとする．このとき，関数列 $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ が区間 I 上である連続関数 $x(t)$ に一様収束することを証明しなさい.

問題 4.　任意の $n \times n$ 行列 A に対して,

(i)　行列 $\exp A$ の定義を書き，その定義が意味を持つことを証明しなさい.

(ii)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して，$\exp(tA)$ を求めなさい.

問題 5.　常微分方程式

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -6x - y - 3x^2 \end{cases}$$

の平衡点をすべて求め，その点が安定平衡点かどうか考察しなさい.

科目名　**ルベーグ積分論**　　**担当教官**　**長田 博文**

サブタイトル　測度と測度に基づく積分

対象学年　**３年**　　**６単位**　**選択**

教科書　なし
参考書　伊藤清三 ルベーグ積分入門, 裳華房
溝端茂 ルベーグ積分，岩波書店

予備知識

特に仮定しない

講義内容

測度の概念を導入しそれに基づく積分論を展開した．具体的な講義内容は以下の通り：

1. 測度の基礎概念 1,5 回 （4/19，4/26）
   - motivation　（なぜルベーグ積分が必要か）
   - σ-加法族，可測空間
   - 測度の定義，測度の一般的性質，測度の例（Lebesgue-Stieltjes 測度）
   - $\cdots$ を含む最小の σ 加法族.
2. 可測関数 0,5 回 （4/26）
   - 可測関数の定義と性質
   - 可測関数の階段関数による近似
   - Borel 可測関数
   - エゴロフの定理
3. 積分 1 回 （5/10）
   - 積分の定義
   - （簡単な場合の）定義に基づく積分計算の例
   - 狭義リーマン積分とルベーグ積分の一致
   - 積分の性質
4. 収束定理 1 回 （5/17）
   - ３つの収束定理（Fatou の補題，Lebesgue の収束定理，単調収束定理）
   - 収束定理に関する様々な例

- 微分と積分の順序交換

5. 測度論の２つの定理 0.5 回 （5/24）
    - E.Hopf の拡張定理 （証明は後回しにして，ここでは主張だけを紹介）
    - 単調族定理 （証明も込めて）
6. 直積測度と Fubini の定理 1 回 （5/24，5/31）
    - 可測空間の直積
    - 直積測度
    - Fubini の定理
7. Borel 測度と Borel 可測関数 1,5 回 （5/31，6/7）
    - 距離空間
    - Borel 集合の開集合，閉集合による近似
    - Borel 可測関数の連続関数による近似
    - R^d の可測関数の convolution
8. L^p 空間の完備性 1 回 （6/14）（服部教官）
    - 同値関係
    - L^p 空間，L^p 収束，概収束
    - Hölder の不等式，Minkowski の不等式
    - Banach 空間の定義，L^p 空間の完備性
9. 中間試験 ２回 （6/28，7/5）
    - 測度の性質，可測関数の性質，収束定理 (6/28)
    - 収束定理，Fubini の定理，可積分関数の連続関数による近似，から L^p 空間 (7/5)
10. Lebesgue-Stieltjes 測度の構成 1.5 回 （7/12，7/19）
    - 外測度
    - E.Hopf の拡張定理の証明
    - Lebesgue-Stieltjes 測度の構成
    - 測度の完備化
11. その他 0.5 回 （7/19）
    - R^d の関数空間
12. 期末試験 １回 (9/13)

講義の感想

参考資料

中間試験 I　2000.06.28

問題 1. $a_n, b_n,\ n \in \mathbb{N}$ を $[-\infty, \infty]$ で値を取る数列とする．$\infty - \infty$ の形のものが出てこない限り，

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \le \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \tag{1}$$

が成り立つことを示せ．また，

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) < \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \tag{2}$$

となる例を与えよ．

問題 2. $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とし，μ を有限測度とする．

$$\{\ \mathrm{x} \in \mathrm{X}\,;\, \mu(\{x\}) > 0\} \tag{3}$$

となる集合の濃度は高々加算であることを示せ．

問題 3. $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とし，$\mu(X) = 1$ とする．加算個の可測集合 $A_n \in \mathcal{B}$ が $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$ を満たす時次を示せ．

$$\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0 \tag{4}$$

問題 4. δ_a を点 a における delta 測度つまり

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & a \in A \\ 0 & a \notin A \end{cases}$$

で定義される測度とする．この時非負可測関数 f に対する積分 $\int f d\delta_a$ を定義に従って求めよ．

中間試験 II　2000.07.05

問題 1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ がルベーグ可測関数とする．$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx < \infty$ ならば $\varphi(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} f(x)dx$ は連続関数であることを示せ．

問題 2. $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間する．f をその上の非負可測関数とする．$\int_X f d\mu = c$ かつ $0 < c < \infty$ とする．また a を定数とする．次を示せ．

$$\lim_{n\to\infty} \int_X n \log\{1 + (\frac{f}{n})^a\} d\mu = \begin{cases} \infty & \text{if } 0 < a < 1, \\ c & \text{if } a = 1, \\ 0 & \text{if } 1 < a < \infty. \end{cases}$$

問題 3.　A を正かつ有限のルベーグ測度をもつ Borel 可測集合とする．

(1)$F(z) = \int_{\mathbf{R}^d} 1_A(z+y) 1_A(y) dy$ が有界連続関数であることを証明せよ．

(2) 集合 $B = \{z \ in \mathbf{R}^d\, ;\, z = x - y \quad \text{for some } x, y \in A\}$ は原点を内点として持つことを証明せよ．．

問題 4.　ある定数 M に対して

$$|f_n(x)| \le M \qquad \text{for all } n, x \tag{1}$$

を満たす時，次は成立するか．証明もしくは反例を上げよ．

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \tag{2}$$

期末試験　2000.09.13

問題 1.　$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ がルベーグ可測関数とする．$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|(1+|x|)dx < \infty$ ならば $\varphi(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} f(x) dx$ は連続微分可能関数であることを示せ．

問題 2. $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間する．f_n をその上の非負可測関数列で

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \infty \quad \text{for all } x \in X \tag{1}$$

とする．次は成り立つか？　証明もしくは反例を示せ．

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu \tag{2}$$

問題 3. $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間，f, f_n をその上の可積分関数とする．また

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{for all } x \in X \tag{3}$$

$$\mathrm{M} := \sup_n \int_X |f_n|^2 d\mu < \infty \tag{4}$$

を満たすとする．次の命題を考える．

$$\lim \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu \tag{5}$$

(a) $\mu(X) = \infty$ の時，(5) は成り立つか？　証明もしくは反例をあげよ．

(b) $\mu(X) < \infty$ の時，(5) は成り立つか？　証明もしくは反例をあげよ．

問題 4.　$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が可積分関数とする．もし任意の $-\infty < a < b < \infty$ に対して $\int_a^b f(x)dx \ge 0$ であれば，$f(x) \ge 0$, $a.e.$-x であることを示せ．

科目名　**幾何学要論**　**担当教官**　**江尻 典雄**

サブタイトル　曲線と曲面の幾何学

対象学年　**３年**　**６単位**　**選択**

教科書　A. グレイ，Mathematica 曲線と曲面の微分幾何，トッパン
参考書

予備知識

線形代数学，微分積分学

講義内容

曲線，曲面の幾何学的性質を調べるために，微分幾何学的定義を与え 1 年，2 年で学んだ線形代数学，微分積分学を用いてその微分幾何学的性質（長さ，面積，曲がり方）を調べることを目的とします.

具体的な講義内容は以下の通り：

1. Introduction
   - 表面積一定で体積最大の缶詰の作り方，升では？ 古升と京升，最小原理 屈折の法則，定円に内接する面積最大の五角形
2. 曲線
   - 洋服の袖の作り方，円錐曲線，代数曲線，パラメトリックな表現，Bezier 曲線
3. 曲線の長さ
   - 曲線，曲線の長さ，弧長関数，楕円の弧の長さ，第 1 種楕円積分 レムニスケートの長さ，楕円積分，ヤコビの楕円関数 sn, cn, dn, 加法定理
4. いろいろな曲線
   - Gerono のレムニスケート，対数螺旋，サイクロイド，ベルヌーイのレムニスケート，カージオイド，cissoido of Diocles，トラクトリクス，クロソイド，リサージュ，リマソン，Cassinian oval，極座標を用いた平面曲線 アルキメデスの螺旋，フェルマーの螺旋，双曲的螺旋，Lituus の螺旋，カテナリー 懸垂線
5. 凸凹道を滑らかに走る法
   - 車輪と道の微分方程式，車輪が線分のとき
6. 変分問題における曲線
   - 曲線 $y = b\mathrm{sn}(x/c)(b = 2kc/(1-k^2))$ の長さ，変分原理（縄跳びのロープ），アーベルの問題とサイクロイド振り子

7. 曲線の曲率
   - 曲率，平行曲線，平面曲線の自然方程式
8. グラフとしての曲面
   - グラフ，カタストロフ曲面，$\mathbf{R}^3$ 内のパッチあるいは局所曲面
9. いろいろなパッチ
   - Coons 曲面，双曲放物面 (hyperbolic paraboloid)，猿の腰掛け (Monkey saddle)，楕円面 (ellipsoid)，トーラス (torus)，放物面 (paraboloid)，８の字曲面 (figure eight surface)，ホイットニーの傘 (Whitney umbrella)，懸垂面 (catenoid)，ヘリコイド (helicoid)，エンネッパーの曲面 (Enneper's surface)，シャークの極小曲面 (Scherk's minimal surface)，ヘンネベルグの極小曲面 (Henneberg's minimal surface)，カタランの極小曲面 (Catalan's minimal surface)，トラクトイド (tractoid)，クエンの曲面 (Kuen's surface)
10. 地図投影
    - 投射方位図法，投射円筒図法，投射円錐図法, 正角円筒図法（メルカトル図法），正角円錐図法＜１基本＞（ランベルト正角円錐図法＜１基本＞），正角円錐図法＜２基本＞（ランベルト正角円錐図法＜２基本＞），正距方位図法，正距円筒図法，正距円錐図法＜１基本＞（トレミー図法），正積方位図法（ランベルト正積方位図法），正積円筒図法（ランベルト正積円筒図法＜正射円筒図法＞），正積円錐図法＜１基本＞（ランベルト正積円錐図法＜１基本＞），ボンヌ図法
11. リーマン計量
    - 曲面上の曲線の長さ，角度の計算，面積の計算
12. ガウス曲率と平均曲率
    - 第２基本形式，ガウス曲率，平均曲率，グラフのガウス曲率
13. ガウスの驚くべき定理
    - ブリオシの公式，ガウスの驚くべき定理

講義の感想

できるだけ興味をもってほしいと思いつつ授業をしたつもりですが微分幾何学に興味をもった学生が現れることを期待しています．黒板の板書がきれいではなかったこととときどき早口になってしまったことが反省されます．

参考資料

演習問題

問題 1. 尺貫法の歴史を調べる．

問題 2. いろいろな最大値，最小値問題でおもしろいと思うものを収集して発表する．

問題 3. 円錐曲線論について調べる．

問題 4. デカルトの葉状曲線の良いパラメター表示を作る．

問題 5. Bezier 曲線についての deCasteljau のアルゴリズムを証明する．

問題 6. Bezier 曲線の制限したときの Bezier 曲線の制御点を初めの与えられた Bezier 曲線の制御点で表す式（授業でやった）の証明を与える．

問題 7. 曲線の長さについて調べよう．

問題 8. Gerono のレムニスケートの長さについて調べよう．陰関数表示を求めよう．

問題 9. 対数螺旋についてトリチェリの発見した長さについての結果を証明せよ．

問題 10. 4 匹の虫の問題を考えよ．

問題 11. 万有引力の法則が 2 乗に逆比例しないで 3 乗に逆比例するとき太陽の周りを回る惑星の軌道としての可能性の 1 つに対数螺旋がある．これはニュートンが Principia の第 1 巻の中で証明している．これを証明せよ．

問題 12. トロコイドの長さについて調べよう．

問題 13. ギリシャ人達は立方体倍積問題や 3 等分問題の解決のために cissoid of Diocles を用いたといわれている．この歴史的なことがらについて調べよう．

問題 14. clothoid 語学的意味はなにか．

問題 15. クロソイド曲線がどうして高速自動車道路に応用されているかを調べよう．

問題 16. Lissajous の陰関数表示を求めよう．

問題 17. リマソンの長さを調べよう．

問題 18. base が直線，rollomg curve が放物線，pole が放物線の焦点である場合のルーレットがカテナリーであることを示そう．

問題 19. 外サイクロイドと内サイクロイドのパラメータ表示を求めよう．

車輪と道の組み合わせについて
問題 20. 円（車輪は円周上）と逆さの円

問題 21. 等角螺旋と斜めの直線（等角螺旋のつなぎ合わせと鋸の歯）

問題 22. 楕円（車軸は焦点）と余弦曲線

問題 23. 放物線と放物線

問題 24. カージオイドとサイクロイドをひっくり返したもの

問題 25. リマソンとトロコイド

問題 26. 他のおもしろい車輪と道を発見しよう.

問題 27. 周期の半分 以外でも sn のグラフが縄跳びのロープの満たす Euler-Lagrange 方程式の解であることを示そう.

問題 28. 8 の字曲線を正則曲線のまま連続的に円に変形できるだろうか.

問題 29. カテナリー，クロソイド，対数螺旋の自然方程式を求めよ.

問題 30. 渦巻き線は自分自身と交わらないことを示せ.

問題 31. 4 頂点定理を証明せよ.

問題 32. いろいろな曲線を正と負の渦巻き線に分解しよう.

問題 33. “ 心が切れる ”という状態を楔型カタストロフでで証明できないか．パラメータ a, b をなににすればよいのだろうか.

問題 34. Coons 曲線を定める三次式 $h_0(u), h_1(u), h_2(u), h_3(u)$ 以外にも同様の性質を持つ三次式は有るか？

問題 35. 楕円的トーラスの正則性を調べよう.

問題 36. エンネッパーの曲面の正則性を調べよう.

問題 37. 各 4 つの直線についての reflection で 1 つの部分は隣り合う 4 つの部分に移ることを示そう.

問題 38. ヘンネベルグの極小曲面の正則性を調べよう.

問題 39. カタランの極小曲面の正則性を調べよう.

問題 40. クエンの曲面の正則性を調べよう.

問題 41. 球面三角法の余弦，正弦法則を証明しよう.

問題 42. 正角円錐図法〈2 基本〉は角度を保つことを証明しよう.

問題 43. ランベルト正積方位図法が実際正積図法であることを示そう.

問題 44. ランベルト正積円錐図法〈1 基本〉が実際正積図法であることを示そう.

問題 45. ボンヌ図法が実際正積図法であることを示そう.

小試験 I　 2000.04.28

問題 1. (1) 次の曲線を x 軸上のグラフ，y 軸上のグラフとして再パラメータ表示をしなさい.

$$\alpha(t) = (\sin^{-1}(t), e^t),\ t \in (-0.5, 0.5)$$

定義も与えないと！

(2) 上の曲線の長さを t についての積分で表せ．求める必要はない．

(3) 次の曲線の弧長関数を求めて arc length parameter で再パラメータ表示しよう．

$$\beta(t) = (Rcost, Rsint),\ t \in (0, 2\pi)$$

但し，$(0, R)$ から反時計回りに長さを測ること．

小試験 II 2000.05.25

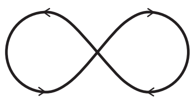
問題 1. 黒板に描かれたクロソイドを上から見た道路として考える．一定測度で車を運転するときハンドルをどのように動かせば良いかを考えよ．但し，進む向きは 2 つある．

問題 2. 円の道路と，円でない楕円の道路で一定測度で車を運転するときハンドルの動かし方の違いはなにか？

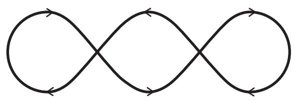
小試験 III 2000.06.15

問題. 次の正則閉曲線の回転数はいくつか.

(1)



(2)



小試験 IV 2000.07.07

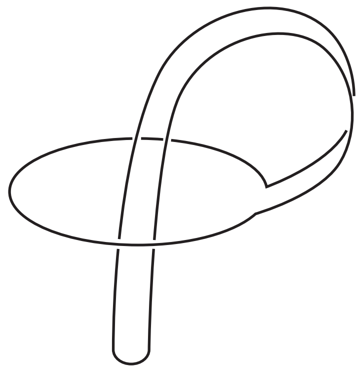
問題. 楕円面の次のパッチ

$$X(u, v) = (a\cos v\cos u, b\cos v\sin u, c\sin v)$$

の単位法ベクトル場を求めよう.

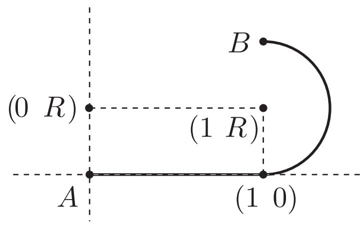
小試験 V 2000.09.01

問題. 次の空間曲線を境界とする自分自身と交わらない曲面を 1 つ描こう.



前期定期試験（曲線論）

問題 1. 長さ 1 の線分と半径 R の半円を次のようにつないで 1 つの曲線を作る．



(1)$A = (0,0)$ から $B = (1,2R)$ に至る曲線の弧長パラメターによる曲線のパラメター表示を与えよう．

(2) 正則（ C^∞ 級）曲線にならないことを示そう．

問題 2. $t \in [0, 2\pi]$ に対して $\alpha(t) = (\sin t, \sin t \cos t)$ で与えられる曲線を考える．

(1) 正則（ C^∞ 級）曲線であることを示せ．

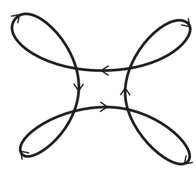
(2) 長さを積分で表そう．

(3) 陰関数表示を与えよう．

問題 3. (1) 中心 (1,0) 半径 1 の円の極座標表示を与えよう． $r(\theta) = ?\ -\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$

(2) 車輪が (1) の円で車軸が円周上（原点）にあるとする．この車輪を道 $(x(t), y(t))$ に沿って滑らずに動かすとき（但し，接地点は車軸の真下にあるものとする）車軸が x 軸上を動くように道を求めよう．

問題 4. 次の正則曲線を考える．



(1) 回転数を求めよう．

(2) 曲線から進行方向左に十分に小さい正の数 r だけ離れて平行曲線をつくる．その長さからもとの曲線の長さをひいた数を r を使って表そう．

問題 5. $A=(0,a),\ B=(1,b)$ とする． $f(0)=a,\ f(1)=b$ となる $[0,1]$ 上定義された無限回微分可能関数とする．

(1)f のグラフの長さを積分で表そう．

(2)(1) の積分を汎関数（f についての関数）と考えてそのオイラー（．ラグランジェ）の方程式を導き，解こう．

問題 6. $y=x^3$ のグラフを考えよう．

(1) このグラフの曲率を求めよう．

(2) 頂点を求めて，グラフを正と負のうずまき線に分解しよう（絵を描こう）．

前期定期試験（曲面論）

問題 1. $D=\{(r,\theta):\ 0\le r\le R,\ 0\le r\le\Theta\}$ は半径 R で角度 Θ の扇形を与えている．2 つの線分部分接着して円錐をつくる．このとき円錐を跡とする D から空間へのパッチ $X(r,\theta)$ を作ろう．

問題 2. メルカトール図法とランベルト正積円筒図法について考えたい．原点中心の半径 R の球面の緯度 $\phi,-\frac{\pi}{2}<\phi<\frac{\pi}{2}$, 経度 $\lambda,0<\lambda<2\pi$ の点を平面の座標 $(R\lambda,f(\phi))$ へ移す円筒図法を考えよう．但し， f は $f'>0$ を満たしている．

(1) この地図の逆写像としてのパッチ（f^{-1} を使って）を作ろう．但し，緯度 ϕ ，経度 λ の球面上の点は

$$(R\cos\phi\cos\lambda,R\cos\phi\sin\lambda,R\sin\phi)$$

で与えられているものとする．

(2) リーマン計量を与える E,F,G を求めよう．

(3)$E=G,F=0$ となる f を求めよう．

(4)$EG-F^2=1$ となる f を求めよう．

(5)(3),(4) とメルカトール図法とランベルト正積円筒図法との関係を述べよう．

問題 3. エンネッパー曲面

$$X(u,v)=(u-\frac{u^3}{3}+uv^2,\ v-\frac{v^3}{3}+vu^2,\ u^2-v^2)$$

について考えよう．

(1) 正則曲面であることを示そう．

(2) 単射でないことを示そう．

(3) リーマン計量を与える E,F,G を求めよう．

(4) 第 2 基本形式を与える e,f,g を求めよう．

(5) ガウス曲率を求め，負であることを示せ．このことはなにをいっているのか？

(6) 陰関数表示を求めよう．

問題 4. 正則パッチ $X(u,v)$ についてリーマン計量を与える E,F,G について $E=G=\lambda(u,v),\ F=0$ であるときガウス曲率 K は

$$K = -\frac{\Delta \log \lambda}{2\lambda}$$

を満たすことを示そう．但し，Δ はラプラシアンである．

科目名 **数学演習 VII** **担当教官 佐藤 周友**

サブタイトル

対象学年 **３年** **１単位 選択**

教科書
参考書

予備知識

2 年生までの線形代数と 2 年後期の群論

講義内容

2 年次後期の群論の復習に始まり, 単因子論, 初歩の可換環論に関する演習問題を出し, 黒板で解いてもらった. 個人的な都合で 2 回休講にし, 計 10 回の演習を行った. また, 演習時間内に 70 分の中間試験を 1 回行った. 演習問題は全部で 8 回分配布したが, 内容は以下の通り:

1. 2 年次の復習 (2 回分)
   - 群の直積, 正規化群, 中心化群, 有限群の例.
   - 共役類, 類等式, シローの定理, 準同型定理, 自由アーベル群.
2. 群の可解性, 群の作用 (1 回分)
   - 特性部分群, 交換子群, 正規鎖と可解群, 中心列とべき零群, 群の作用, 安定化群.
3. 環上の加群 (2 回分)
   - 環上の加群の準同型と同型, ユークリッド整域 (体上の 1 変数多項式環, ガウスの整数環).
   - 単因子論 (行列の基本変形, 単因子).
4. 可換環（3 回分)
   - 剰余環, 環の準同型定理, 環の直積, 多項式環の剰余環の例, イデアルの根基,
   - 整拡大 (整な元, 整な拡大, 多項式の根による拡大, Eisenstein の既約性判定法).
   - 分数環 (積閉集合, 分数化, 全商環, 分数体, 局所環).

講義の感想

抽象的な問題はなるべく避け, 具体例を扱う問題が多くなるよう心がけました. ただ,「群の可解性」や「環の拡大」など, 止むを得ずやや抽象的な問題を出した所もありました. 新しい概念を理解するのに時間がかかるのは仕方の無い事ですが, 全体を通して, 後半は特に, 消化不良気味でした. 私自身による問題の解説が不足していた所為もあるのでしょう.

参考資料

中間試験　2000.06.16

問題 1.　n を正の整数とする. 複素数体 $\mathbb{C}$ 上の n 次元ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の $\mathbb{C}$-線形写像全体のなす集合を $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ で表す. $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ の元 f, g に対して

$$(f+g)(v) := f(v) + g(v) \qquad (v \in \mathbb{C}^n),$$

$$(f \circ g)(v) := f(g(v)) \qquad (v \in \mathbb{C}^n)$$

と定義すると, $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ は $+$ を加法, $\circ$ を乗法とする環になる. (加法に関する単位元は零写像, 乗法に関する単位元は恒等写像である.) $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ が $n \times n$ 行列全体のなす環 $M_n(\mathbb{C})$ と環として同型であることを証明せよ.

問題 2.　次の整数係数行列の単因子と (複素数係数の範囲での) ジョルダン標準形を求めよ.
(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

問題 3.　n を正の整数とするとき, 2 面体群 $D_n := \langle a, b |\ a^n = e,\ b^2 = e,\ ab = ba^{-1} \rangle$ から 2×2 型の実直交行列の群

$$O_2(\mathbb{R}) := \left\{ g \in GL_2(\mathbb{R}) |\ {}^t g \cdot g = I_2 \right\}$$

への埋め込み (=単射な群準同型) を一つ構成せよ. 但し, 行列 g に対して ${}^t g$ は g の転置行列を表す.

レポート 課題　2000.07.14

以下の項目に該当するする人はレポートを提出して下さい.

(A) 6 月 16 日の試験を届出の上で欠席した, 又は試験で 18 点未満であった.

$\Longrightarrow$ 以下の問題を全て解いて下さい.

(B) 演習の時間中に黒板の前で 3 問以上解いていない.

$\Longrightarrow$ 演習用の問題で「まだ解かれていない」問題から {4 – (自分が演習時間中に解いた問題数)} 問を選んで解いて下さい.

(C) 既に「可」の条件を満たしているが良い成績を望んでいる.

$\Longrightarrow$ 演習用の問題から好きなだけ選んで解いて下さい. 上記の (A), (B) に該当していない人は下の問題から選んでも結構です. 但しあまり簡単な問題ばかり解いても評価は上がりません. お勧めは問 49 (1)–(5), 65 (1)–(4), 66, 及び 6 月 30 日, 7 月 7 日のプリントの問題です.

提出期限: 9 月 1 日 (金)

提出場所: 理 1 号館 1F 事務室前のボックス

(A-1) 整数係数の 2×2 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の単因子は $\{g,(ad-bc)/g\}$ (但し g は a,b,c,d の最大公約数) である事を証明せよ.

(A-2) 次の群を考える:

$$GL_2(\mathbb{Z}):=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\middle|\, a,b,c,d\in\mathbb{Z},\ ad-bc=\pm 1\right\}$$

この群のねじれ元 (=ある整数 n に対して $A^n=I_2$ となるような行列 A) の位数は必ず 1, 2, 3, 4, 又は 6 のいずれかである事を示せ. また $n=1,2,3,4,6$ に対して位数 n の 2×2 行列を一つずつ求めよ.

いきなり解けない人は次の方法で考えましょう:

(1) スカラー行列でない行列 A が 2 以上のある自然数に対して $A^n=I_2$ を満たすならば A の特性多項式 $\Phi_A(T)$ は多項式 T^n-1 を割り切る事を示せ.

(2) 多項式 T^n-1 が整数係数の 2 次式を因数に持つような自然数 n (≥ 2) の素因数を決定せよ. (ヒント: 問 78 (3))

(3) 1 の原始 n 乗根 (= n 乗して初めて 1 になるような複素数) が整数係数の 2 次方程式の解であるような自然数 n (≥ 2) をすべて求めよ.

(4) (3) で求めた自然数 n 達の各々に対して $A^n=I_2$ を満たすような 2×2 行列 A を一つ求めよ.

(A-3) $X=\{P,Q,R\}$ を 3 つの元から成る集合とする.

(1) 集合 X から複素数体 $\mathbb{C}$ への写像全体のなす環 (問 67 参照) が環として $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ と同型である事を示せ.

(2) X に入り得る位相の各々について開集合の集合を記せ.

(3) X に離散位相を入れ, $\mathbb{C}$ には通常の距離から決まる位相を入れる. この時, X から $\mathbb{C}$ への連続写像全体のなす環が環として $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ と同型である事を示せ.

(4) X に $\{\phi,X,\{P\},\{P,Q\}\}$ を開集合とする位相を入れる. ($\mathbb{C}$ の位相は前問と同様.) この時 X から $\mathbb{C}$ への連続写像全体のなす環を求めよ.

(5) X に $\{\phi,X,\{P\},\{Q\},\{P,Q\}\}$ を開集合とする位相を入れる. ($\mathbb{C}$ の位相は前問と同様.) この時 X から $\mathbb{C}$ への連続写像全体のなす環を求めよ.

(ヒント: X にどのような位相が入っていても求める環は (1) により $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ の部分環である.)

科目名　数学演習 IX　**担当教官**　梁 淞

サブタイトル

対象学年　３年　**１単位**　**選択**

教科書

参考書　伊藤清三，ルベーグ積分入門，裳華房
溝畑茂，ルベーグ積分，岩波全書
折原明夫，測度と積分，裳華房

予備知識

特に仮定しない

講義内容

これは長田教官のルベーグ積分の演習であり，授業の進度に合わせて進められた．位相空間や，関数の連続性などルベーグ積分論を勉強するにあたり必要となる基本な知識の復習（計１１問）から始まって，測度空間と可測関数（１４問），ルベーグ積分の定義と性質（２１問），収束定理（１９問），フビニの定理（７問），L^p 空間（６問）までやった．与えた演習問題を学生に黒板で解いて解説してもらった．また，ほぼ毎回（ヒントを与えて）小テストを行い，回答を添削して返した．演習問題を計７５問を配付し，小テストを９回行った．

講義の感想

演習問題や小テストに関するヒントを与え，分からない学生にはできる限り平易に解説し，学生の意欲を出させるよう心がけた．

科目名　**数学演習 X**　**担当教官**　**佐藤 猛**

サブタイトル　幾何学要論の演習

対象学年　**３年**　**１単位**　**選択**

教科書　なし
参考書　講義に準じた

予備知識

線型代数と微積分

講義内容

講義の内容とまったく同じである．問題プリントの表題は以下の通り：

1. 空間ベクトルの復習
2. 曲線の長さとパラメトリゼーション
3. いろいろな曲線
4. いろいろな曲線（２）
5. 凸凹道を滑らかに走る法
6. 変分法
7. 平面曲線の曲率
8. 曲面を描く
9. 曲面の曲率

講義の感想

講義を通じて，できる限り平易に解説を心がけた．

科目名　**体とガロア理論**　　**担当教官**　**岡田 聡一**

サブタイトル　体と Galois 理論

対象学年　**３年**　　**６単位**　**選択**

教科書
参考書　松坂 和夫，代数系入門，岩波書店
藤崎 源二郎，体と Galois 理論，岩波書店

予備知識

2 年生「代数学要論」，3 年生「群論」,「多項式論」で学習した群論，環論の基礎（剰余群，剰余環，準同型定理，群の作用，多項式の性質など）.

講義内容

Galois 理論の基礎的な内容を以下の順序で講義した.

1. 体論の基礎（2.5 回）
   - §1 環と体（剰余環，準同型定理，商体）
   - §2 体の拡大（素体，標数，拡大次数）
   - §3 最小多項式（代数的元，超越的元）
   - §4 代数拡大（単純拡大，超越拡大，$\overline{\mathbb{Q}}$）
   - §5 作図可能性（三大作図問題，正多角形の作図）
2. 代数拡大（3.5 回）
   - §6 分解体，代数的閉体（代数学の基本定理の証明，ただし代数的閉包の存在の証明はしなかった.）
   - §7 同型写像とその延長（最小分解体の一意性）
   - §8 共役元，正規拡大
   - §9 分離多項式
   - §10 分離拡大（分離次数，有限次分離拡大の単純性）
   - §11 有限体（存在，性質）
3. Galois 理論（2.5 回）
   - §12 Galois 拡大（定義，固定体，Aritin の定理）
   - §13 Galois の基本定理
   - §14 有限体の拡大，対称式（対称式の基本定理）
   - §15 具体例（Galois 群の決定など実例の計算）

4. Galois 理論の応用 (3.5 回)

§16 1 の巾根（円分多項式）

§17 円分体（正多角形の作図）

§18 巡回拡大（2 項方程式）

§19 巾根拡大と可解拡大（可解群）

§20 方程式の可解性（一般方程式の Galois 群，Galois の定理，Abel の定理）

§21 根の置換（判別式）

§22 3 次方程式，4 次方程式の解法

講義の感想

超越拡大（1 変数有理関数体，超越次数など）についても講義する予定だったが，時間的に余裕がなかった．

参考資料

試験問題　2000.09.18

問題 1.　次の問に答えよ．
(1)K/F を体の拡大とする．拡大次数 $[K:F]$ が有限ならば，K/F は代数拡大であることを示せ．
(2)$\mathbb{Q}$ の代数拡大体 K で，$[K:\mathbb{Q}]=\infty$ となるものの例をあげ，$[K:\mathbb{Q}]=\infty$ となる理由を簡単に説明せよ．
(3)$\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}$ は正規拡大であるかどうか，理由とともに答えよ．
(4)$\mathbb{F}_p(T)/\mathbb{F}_p(T^p)$ は分離拡大であるかどうか理由とともに答えよ．ここで，$\mathbb{F}_p$ は p 個（p は素数）の元からなる有限体であり，$\mathbb{F}_p(T)$ は $\mathbb{F}_p$ 上の 1 変数有理関数体である．

問題 2.　多項式 X^3-2 の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体を K とするとき，次の問に答えよ．
(1)K の $\mathbb{Q}$ 上の線型空間としての基底を 1 組求めよ．
(2)Galois 群 $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ を決定せよ．
(3)$K/\mathbb{Q}$ の中間体をすべて求めよ．

問題 3.　$\mathbb{F}_2$ 上の 1 変数多項式環 $\mathbb{F}_2[X]$ の，イデアル (X^4+X+1) による剰余環を $K=\mathbb{F}_2[X]/(X^4+X+1)$ とするとき，次の問に答えよ．
(1)$X^4+X+1\in\mathbb{F}_2[X]$ は既約多項式であることを示せ．
(2)K は有限体となることを示し，K に含まれる元の個数を求めよ．
(3)Galois 群 $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{F}_2)$ を決定せよ．
(4)$K/\mathbb{F}_2$ の中間体の個数を求めよ．

問題 4.　$\zeta=\exp(2\pi\sqrt{-1}/20)\in\mathbb{C}$ を 1 の原始 20 乗根とし，$K=\mathbb{Q}(\zeta)$ とおくとき，次の問に答えよ．

(1) 拡大次数 $[K:\mathbb{Q}]$ を求めよ.

(2)Galois 群 $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ の構造を決定せよ.

(3)$\beta=\sin(2\pi/5)\in K$ となることを示せ.

(4)$\mathbb{Q}(\beta)/\mathbb{Q}$ は Galois 拡大であることを示し，Galois 群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\beta)/\mathbb{Q})$ の構造を決定せよ.

科目名　多様体のトポロジー　**担当教官**　佐藤 肇

サブタイトル

対象学年　４年　**６単位**　**選択**

教科書

参考書　位相幾何 (岩波講座 現代数学の基礎)

予備知識

講義内容

位相同型，ホモトピー同値の定義，セル複体，単体的複体の定義．多様体，特に曲面の構成．基本群，ホモトピー群．単体的ホモロジー群とその性質．完全系列．

講義の感想

科目名　近代解析　**担当教官**　大沢 健夫

サブタイトル　多変数関数論入門

対象学年　４年　**６単位**　選択

教科書

参考書　L.Hörmander, Complex Analysis of Several Variables, North Holland

予備知識

２年後期の関数論，３年の幾何学，ルベーグ積分

講義内容

与えられた特異性を有する正規関数をつくる方法の概説をし，とくにその中でも L^2 評価式の方法の詳説を行った.

具体的には,

1. Weierstrap の乗積定理，Mittag-Leffler の定理，Runge の定理（復習）
2. 多変数の正規関数と Cauchy の積分公式（Hartogs の拡張定理）
3. 正規領域と正規凸領域の擬凸性，Cousin 型問題の可能性と正規凸性との関係（割算問題と拡張問題）
4. $\bar{\partial}$ 方程式の可解性と領域の正規凸性との関係
5. Koszul 複体と $\bar{\partial}$ コホモロジー，Dolbeault の補題
6. 複素多様体と正規ベクトル束，$\bar{\partial}$ 作用素と複素ラプラス作用素，中野の公式
7. 完備多様体上の L^2 空間と $\bar{\partial}$ 作用素の閉拡張
8. Hörmander の補題（Hilbert 空間と閉作用素の複体が完全系列になるための条件）
9. $\bar{\partial}$ 方程式の L^2 弱解としての正規関数の特徴づけ
10. 完備多様体上の L^2 評価式とコモホロジー消滅定理
11. 強多重劣調和皆既関数の存在から正則凸性が導かれることの証明（Levi の問題の解）

講義の感想

科目名　数理解析・計算機数学 I　　**担当教官**　内藤 久資

サブタイトル　アルゴリズムとプログラミング

対象学年　４年　　**３単位**　選択

教科書

参考書　B.Kernighan, D.Richie, プログラム言語Ｃ（第２版）, 共立出版

予備知識

特に仮定しない

講義内容

【講義シラバスに記載した内容】

コンピュータ・プログラミングを行うために必要な種々のアルゴリズムに関して解説を行う.

これらのアルゴリズムの中で, これまでに学習した数学が生かされているがわかる形で講義を進めたい.

また, それらのアルゴリズム利用したプログラミングを行うために, Ｃ言語によるプログラミング実習も行う.（実習は坂上貴之が担当する.）

【講義の目的】

この講義は, 単にコンピュータの利用法を学ぶのが目的なのではなく, UNIX 上でＣ言語によるプログラミングを通して, コンピュータの動作, 概念の基礎的な感覚を掴むのを目的としている. また, プログラムは単に動くだけのプログラムではなく, 言語の基本的な構造, 正確な規格を通じて, アルゴリズムを正確に記述し, 正確かつ, きれいなプログラミングを学ぶことを目的としている.

【具体的な講義内容は以下の通り】

4月17日（第１回）

- 授業の心構え.
- コンピューターの基礎知識.
  コンピュータのハードウェアとそれを駆動するためのソフトウェアとの関連, オペレーティング・システムの概念.
- 文字コード

4月24日（第２回）

- 計算機内部での整数の表現方法.
- ディレクトリの概念などの UNIX の基礎知識.
- ”Hellow World” を実例としたＣのプログラミング
- Ｃでの簡単な計算.
  変数の定義, 変数への値の代入と演算.

5月　8日（第３回）

- 型, 算術変換, 演算子
- 条件文と繰り返し文.

【各自で自習する内容】

- ◦ 1 から 10 までの偶数の和を計算するプログラムを, `for` 文, `while` 文, `do-while` 文を用いてそれぞれ書きなさい.

5月１５日 （第４回）

- 型変換, 符号拡張 (`char` の定義), 定数式, `sizeof` 演算子.
- 四則演算のアルゴリズム
- ユークリッドの互除法

【課題】

- ◦ ユークリッドの互除法を利用して, ２つの正の整数の最大公約数を求めるプログラムを書きなさい.
- ◦ ユークリッドの互除法を利用して, ２つの正の整数の最小公倍数を求めるプログラムを書きなさい.

5月２２日 （第５回）

- 「ユークリッドの互除法」の続き
- 関数, 変数のクラス.

【各自で自習する内容】

- ◦ ２進ＧＣＤアルゴリズムによって, ２つの正の整数の最大公約数を求める関数を書きなさい.
- ◦ ３つの正の整数の最大公約数を求める関数を書きなさい.
- ◦ ３つの正の整数の最小公倍数を求める関数を書きなさい.

5月２９日 （第６回）

- 配列, ポインタとその関係.
- 文字列とその操作
- ポインタを引数とする関数

【各自で自習する内容】

- ◦ $N \times N$ 行列のトレースを計算する関数を書きなさい.
- ◦ ２つの $N \times N$ 行列の和・積を計算する関数を書きなさい.
- ◦ Ｃの標準関数 `atoi` を書きなさい.
- ◦ Ｃの標準関数 `strcat`, `strrchr` を書きなさい.

6月　５日 （第７回）

- 関数へのポインタ
- 再帰的関数呼び出し
- 位取り記数法と基数の変換
- エラトステネスのふるい
- 簡単な素因数分解

【各自で自習する内容】

- ◦ 再帰的関数呼び出しを用いて, ユークリッドの互除法を書きなさい.
- ◦ `unsigned int` 型の値に対して, その b 進数による表現を与える文字列を返す関数を書きなさい. ただし, b は２から３６までの整数とします.

- ○ エラトステネスのふるいを利用して, 100000 までのすべての素数を表示するプログラムを書きなさい.

6月１２日（第８回）

- 構造体,
- 自己参照構造体と線形リスト
- 共用体, ビットフィールド
- ファイル入出力

【課題】

- ○ `unsigned int` 型の値に対して, その b 進数による表現を与える文字列を返す関数を書きなさい. ただし, b は２から３６までの整数とします. さらに, 標準入力から一つの整数を読み取り, その b 進数による表現を与える文字列を表示するプログラムを書きなさい. これを一度に書くことが難しいのなら, 次のように分解して考えてください.
  1. 標準入力から文字列を読み, それを `unsigned int` 型の数値として格納すること.
  2. `unsigned int` 型の数値に対して, その b 進数による表現を表示するプログラムを書く.
  3. ２でつくったプログラムを, 文字列を返す関数の形にすること.
  4. １と３を組み合わせて, 最終的なプログラムを完成する.
- ○ 標準入力から空白で区切られた２個以上１０個以下の整数を読み取り, それらの最大公約数を標準出力に出力するプログラムを書きなさい. これも上のように, いくつかの部分に分解して, 順にプログラムを完成してください.
- ○ エラトステネスのふるいを利用して, 100000 までのすべての素数を表示するプログラムを書きなさい. ただし, 結果は, それぞれの素数を一つの空白で区切って, 小さい数から順に表示しなさい. 一番先頭には空白はなく, 最後には空白が入ってもかまいません. また, 表示する行は改行で終わることとします.
- ○ 標準入力から 100000 以下の整数値を読み, その素因数分解を表示するプログラムを書きなさい. ただし, 結果は, それぞれの素因数を一つの空白で区切って, 小さい素因数から順に（重複を含めて）表示しなさい. 一番先頭には空白はなく, 最後には空白が入ってもかまいません. また, 表示する行は改行で終わることとします.
- ○ １行に先頭から最初の空白文字までを氏名, そのあといくつかの空白文字があり, その後整数値があり, 改行文字. という行からなるデータで, 最大１００行のデータを標準入力から読み, その数値を「テストの点」と思い, テストの点の良い順に並び替えて, 標準出力にその結果を出力するプログラムを書きなさい. （ただし, 同一の得点がある場合, その順序は問いません）ここで, 出力結果は入力と同じ形式であり, 並び替え（ソート）のために標準関数 `qsort` を使っても良いとします.

6月１９日（第９回）

- 各種のソートのアルゴリズムとその計算量

【各自で自習する内容】

- ○ 標準関数 `random` を用いて生成した整数値の配列をソートしなさい. 利用するソートのアルゴリズムは, 講義で紹介したもののうち, 各自で一番わかりやすいと思ったものを使いなさい.

6月２６日（第１０回）

- 「ハノイの塔」のアルゴリズムと状態遷移
- 「ナイトの巡回」, 「８クイーン」とバックトラック・アルゴリズム
- 「ＮＩＭ」とゲームの戦略.

【各自で自習する内容】

- ○ ３段か４段程度の「ハノイの塔」のプログラムを書きなさい.
- ○ ナイトの巡回問題の解を求めるプログラムを書きなさい.

- ◦ ８クイーンの解を一つ求めるプログラムを書きなさい.

7月3日（第１１回）

- 浮動小数点数演算の誤差とその評価
- 数値的不安定性
- 区間縮小法
- ニュートン法

【各自で自習する内容】

- ◦ ニュートン法を用いて $\sqrt{2}$ の値を, 誤差 10^{-4} で求めるプログラムを書きなさい.

7月１０日（第１２回）

- 自然対数の底の計算.
- 円周率の計算. マチンの公式とテイラー級数の収束半径.

7月１７日（第１３回）

- レポート問題の配布と内容の解説,
- ネットワークとそのセキュリティに関するお話.

【講義時に配布した資料・レポート問題など】

これらは, 講義の WEB ページ `http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~naito/lecture/2000_SS/` から取得可能.

講義の感想

簡単な例から始めたつもりだったが, 各自でプログラムを入力して, それらの例から始めて, それを改良することでより複雑なプログラムを書くための努力が足りないように感じた. はじめは単純なプログラムを書くためにも, 多くの間違いやエラーを体験し, 時間をかけて習熟する経験が必要だが, そのような自習が少ないように思われた.

情報メディア教育センターのワークステーションを利用して実習を行ったが, システムが極めて不安定であり, 学生の環境にトラブルが多発した. それらの解決のためにＳＥに連絡を取るなどの手間が非常に多かった. やはり, この手の講義は担当者が完全に理解しているシステムでないと, このような手間が多すぎて非常に大変である. 研究科のシステムを講義に利用できる環境を構築することが, （少なくとも担当者にとって）効率のよい講義・実習を行うために必要なことと思われる.

１回目の講義で配布した資料
２０００年度前期「数理解析特論２」（計算機）

理学部数理学科４年

担当：内藤久資・坂上貴之

講義の目的

情報科学・計算機に関連する種々の数学及び, 計算機を利用した数学を概観する. 特に, その中に現れる各種のアルゴリズムを解説し, そのアルゴリズムの実現のための言語としてのＣ言語を解説する.

講義の目的ではないこと

単に「コンピュータの使い方がわかれば良い」とか, 「電子メールの使い方や「ホームページ」の書き方を知りたい」と言うのは, 本講義の目的ではない. また, 「使いやすいアプリケーションを教えてほしい」なんてのは論外である.

授業の進め方

基本的には, ３時間目を講義, ４時間目を「情報メディア教育センター」での実習とする. 講義は内藤, 実習は坂上が担当する.

実習について

講義で登場した各種のアルゴリズムをＣ言語を利用して, 実際にアルゴリズムを実装することを実習の内容とする. 最初の数回に関しては, 担当者（坂上）が実際に実習の場所に立ち会い, 各種の質問・トラブルに対応するが, 後半は, 特に実習の時間を指定せず, 自由な時間に各自で実習を行ってほしい. ただし, 実習時間に該当する時間帯（４時間目）の間は, 担当者（坂上）に連絡し, 呼び出しても良いこととする.

また, 実習で利用するアプリケーションに関しては, 各機種固有のものではなく, できる限り標準的と思われるものを利用する. （それ以外のものを利用するのは自由だが, そのことに起因するトラブルなどに対しては一切責任を持たない.）

勉強の方法

コンピュータを勉強する方法は, 基本的には数学を勉強する方法と全く同じである. すなわち,

- 単純かつ正確な論理を正しく積み上げて, 大きなものを作るという考え方.

  （“Building Block” という）

- アルゴリズムを正しく理解し, 筋の良い教科書を参考にしながら, 自力でプログラムを書くこと.

  （これを数学で言えば,

  「概念を正しく理解し, 筋の良い教科書を参考にしながら, 自力で問題を考えること」

  となる.）逆に, 正しいプログラムに到達することにより, アルゴリズムとそこに潜む数学をより深く理解できるはずである.

- 一発で正しいプログラムを書けるようなことはなく, 何度も失敗しながら, どこが間違っているのかを考えることが必要である. プログラムを書くことは非常に時間の掛る作業である.

  「プログラムを書き始めたら, 徹夜も覚悟！」

- プログラムは「動けば良い」という考え方は間違いである.

  数学だって, 「計算できれば良い」なんて考え方は間違っているのと同じである.

内容

- コンピュータの基礎知識
- Ｃ言語

  以下のアルゴリズムを解説する際に, Ｃ言語の構文, 解釈, 利用法などを同時に解説する.

- 各種のアルゴリズム

  以下に挙げたもののなかから, いくつかを取り上げて解説する.

  - 位取り記数法
  - Euclid の互除法
  - 素因数分解
  - 暗号
  - 多項式の演算と離散 Fourier 変換
  - 符合理論
  - 情報量とエントロピー
  - 数・関数の計算
  - 行列演算と連立一次方程式
  - 常微分方程式の数値解法
  - グラフに関するアルゴリズム
  - 整列・検索のアルゴリズム
  - 式の記述と構文木

評価の方法

講義・実習中に指示した内容で, 数回ほどレポートの提出を行う. また, 夏休み明けを締め切りとしたレポートの提出を行う.（場合によっては, ９月に試験を行うこともありうる）夏休み明けのレポート（と試験）で評価を行う. 基本的には, 夏休み明け以外のレポートは評価の対象としない.

レポートはＣ言語に依るプログラムの提出を求めることもある. その場合には, プログラムは以下の指示にしたがって, 電子メールで提出すること. いかなる場合でも, レポートは自力で作成すること. 他人のレポートまたは, 教科書・参考書を写したと考えられるものがあった場合には, 単位を出さない.

詳細に関しては, 別途指示する.

電子メールによるプログラムの提出方法

宛先 `computer-lecture@@math.nagoya-u.ac.jp`

プログラムが単一ファイルからなる場合には, プログラムを電子メール内に単なるテキストとして張り込んで送付して良い.（もちろん, プログラム・テキストを「添付ファイル」として送付しても良い.）プログラムが複数ファイルからなる場合には別途指示する.

その他

レポートの提出以外で, 担当教官に質問がある場合には, 以下の電子メールアドレスに質問を送付しても良い.

内藤 `naito@@math.nagoya-u.ac.jp`

坂上 `sakajo@@math.nagoya-u.ac.jp`

講義の WEB ページの URL は以下の通り.

URL `http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~naito/lecture/2000_SS/`

このページには講義で配布した配布物へのリンクを作成しておく.

２０００年度前期レポート問題等

1 評価の方法について

講義の評価は提出されたレポートをもとに行なう.

レポートについては, 講義中に述べたレポートを提出するかまたは, この後に書いてある, プログラムのうちいくつかを, 電子メールで指定した期日までに提出すること.

2 レポートの提出方法

ここに書かれた注意を守っていないレポートに関しては, 採点の対象としない.

2.1 提出方法

レポートのプログラムは, 電子メールで以下のアドレスに送ること.

`computer-lecture@math.nagoya-u.ac.jp`

レポートを提出する電子メールの内容は, 以下のようにしなくてはならない. （この規約を守らない電子メール形式で提出された場合には, 採点対象としないことがある.）

- プログラムは「添付ファイル」として電子メールに添付すること.
- 「添付ファイル」のファイル名は, `Prob_XX_96YYYYY.c` とすること. ただし, `XX` の部分には問題番号が入り, `96YYYYY` の部分には学籍番号が入る. たとえば, 学籍番号 `9600001` の学生の問題番号１０のプログラムは`Prob_10_9600001.c` となる.
- プログラムの先頭にコメントとして, 学籍番号, 氏名, 問題番号を明記すること.
- もし, 課題のプログラムが複数のファイルから構成されるような場合には, 内藤に相談すること.

同じ問題に対して複数回レポートを出しても良い. その場合, 最後に送られたもののみが採点対象となる.

2.2 一般的な注意

決して, 他人のプログラムのコピーを提出してはならない. そのようなことがあった場合は, 提出者だけではなく, コピーをさせた人についても, すべてのレポートを評価対象としない.

また, 「下手な鉄砲も数打ちゃ当たる」的にマトモでないプログラムを大量に出すのではなく, マトモなものを出すこと.

2.3 評価方法

それぞれの問題には, 難易度に応じたレベルが付けられる. level 1 がもっとも易しく, 数字が大きくなるほど難しいものである.

それぞれの問題に対する満点は, レベルの値の１０倍である.
各問題の評価は以下のように行なう.

- プログラムがコンパイルできなければ 0 点.
- プログラムが正常に動作しなければ 0 点.
- プログラムには, 他人がそれを見た時に, 何をしているかが良くわかるようなコメントをつけなければいけない. コメントが全くないもの, コメントの内容が適切でないものなどは減点対象とします.
- アルゴリズムも採点対象となります.
- 以下のような場合には減点対象となる.
  - 全くコメントをつけていない場合.
  - コメントが適切でない場合. （やたらに多かったり, 少なかったりした場合）
  - コンパイル時に Warning が出た場合.
  - 問題に示された仕様になっていない場合.
  - 予想されるような動作をしない場合. （要するに, バグがある場合）
  - 出題意図を理解していないと思われる場合.
  - アルゴリズムが適当でないと判断される場合.
  - 制御方法が適当でないと判断される場合.
  - プロトタイプ宣言がない場合.
  - 明らかにオリジナルなプログラムでない場合.

各問題とも, アルゴリズム等を本で調べるのは良いが, プログラムは自分で考えること. もし, どこかの本に載っているプログラムをそのまま出している場合には, 後ほど質問をすることがある.
単位を出すためのレポートの最低基準は**１００点**位と考えている. また, 最低３つの問題は解答しなくてはならない.
また, **すべての問題は全て ANSI の規格内の C 言語で記述すること. 利用できる標準関数は, K& R の付録Ｂに書かれているものだけとする. ただし, 特に指定のない限り数学関数 (`math.h` に定義されている関数) は利用してはならない.** 提出された問題を実際にコンパイルして実行する環境は, 多元数理科学研究科のワークステーションで gcc version 2.95.1 を用いて行なう. 多元数理科学研究科のワークステーションは, SUN Microsystems 社, EnterPrise 250, Solaris 2.6 である. （ほとんど情報メディア教育センターの機器と変わらない. ただ速度がものすごく速いだけ.）

2.4　問題に関する注意

特に指定のない限り, 入力は標準入力から行ない, 出力は標準出力に出力すること. それぞれの数値は, 特に指定のない限り, １０進数で表現すること. 入力も, 特に指定のない限り, １０進数である. また, それぞれの数の意味は, 特に指定のない限り, 以下の通り.

整数 入力においては, int で表現できる数であって, 先頭に + または - がつくことがある. 出力においては, 負の数の時にのみ符号をつけ, 正または０の時には符号をつけない. 文字列としての長さは最大で２０文字であるとする.

正の整数 入力においては, unsigned int で表現できる数である. 文字列としての長さは最大で２０文字であるとする.

実数 入力においては, double で表現できる範囲の数で, 12.345 などと書かれ, 先頭に + もしくは - がつくことがある. すなわち, 浮動小数点数の E を含んだ表示は用いない. 入力において, 実数と指定してある時には, 上の意味の「整数」を含む. 出力においては, 特に指定のない限り小数点以下第５桁までだけを表示し, 第６桁めを四捨五入せよ. （整数部の桁数は必要なだけ出力すること.）この場合も, 浮動小数点数の E を含んだ表示は用いてはならない. 符号に関する注意は, 整数の時と同じ. すなわち, printf 関数の %f フォーマットで, 小数点以下の部分に５桁を指定して出力して良い. また, 「小数点以下第５桁まで正しい値を求めよ」という時には, 第５桁まで正しい値を表示し, ６桁目以後は表示しないこと. （この場合は四捨五入ではない.）

複素数 入力においては, ***+***I という形であり, *** の部分は double もしくは int の数値である. また, 虚数部の符号は, 場合によっては - となることがある. 実数部には, 先頭に符号がつく場合がある. それぞれの数値, 符号, 記号の間には, 空白はない. 文字列としての長さは最大で２０文字であるとする. 出力においても, 同様に出力すること. ただし, 実数部が正または０の時には, 先頭に符号をつけないこと. また, 結果の実数部または虚数部が整数で表現可能な時には, 整数で表現すること.

有理数 入力においては, ***/*** という形であり, *** の部分には, 整数が入る. 符号は分子にのみつく. 文字列としての長さは最大で２０文字であるとする. 出力においても同様であるが, 結果は既約分数でなくてはならない. 整数で表現可能な時には, 整数として表現しなくてはならない. （すなわち, / を使ってはいけない.）

b **進数** 出力にしか利用しない. $10 < b \leq 36$ の場合には, それを表す文字として, A から始まる大文字の英字を利用すること. 負の数の場合には, 補数表現ではなく, 先頭に符号をつけて表す.

多項式 入力においては, ***+***X+***X^*** という形である. 符号は - となることがある. 係数はすべて整数. 文字列としての長さは最大で４０文字であるとする. 例えば 1+2X-3X^4 は $1 + 2X + 3X^4$ を表す. 出力においては, 必ず昇ベキの順とすること. 各項の符号は, これまでと同様である. それぞれの数値, 符号, 記号の間には, 空白はない. 入力においては, ベキ, 係数は整数である. また, 係数の絶対値が 1 の場合には, 係数は出力してはならない. 出力においては, 係数は有理数となり得る.

行列 入力においては, 以下の形で入力される. （係数は整数.）

```
1 0 0 0 0
0 1 0 0 0
0 0 1 0 0
0 0 0 1 0
0 0 0 0 1
```

各係数の間はただ一つの空白で区切られている. また, 行列すべて正方行列とし, サイズはは最大で５次とする. ランクを求める問題, 行列式を求める問題等明らかなものを除いては, 正則行列とする. 出力においても, その形式は, 同様である.

桁の長い数 （出力する数値が５０桁を越えるもの.）出力にしか用いない. 整数部を一行に５０桁, 左詰めで出力した後, 小数点を整数部の最後の行にうち, 小数部を一行に５０桁, 左詰めで出力する. 符号は, 整数部の先頭に, 出力する数が負の場合のみつける. 具体的には, 以下のようにする.

```
11234567980123456789012345678901234567890123456789
1189085029803480583085038.
11234567980123456789012345678901234567890123456789
11234567980123456789012345678901234567890123
```

その他, 特に指定のない限り, 次のような注意がある.

- 入力行の１行の最大文字数は, 行末の改行コードを含め, １０２４文字と仮定して良い.
- 出力行の先頭に空白を入れてはならない.
- 出力行の最後には一つだけの改行を入れること.
- 出力行の最後に不要な空白が入ることはかまわないとする.
- 出力する数値等は, その問題に適した形の数のフォーマット（上記を参照）で出力すること.
- 長い桁の数値を求める問題以外は, **桁溢れ（オーバ・フロー）は考慮しなくて良い**.
- 「空白」とは, 空白文字（ASCII コード 0x20 ）のことである. （タブコードはここでは「空白」とはみなさない.）
- 「空白で区切られた」という表現は, すべて一つ以上の空白で区切られているものとする.
- 複数の数値を入力する時には, それぞれの数値は一つ以上の空白で区切られ, すべてが一行で表現されている. 複数の数値を出力する時には, それぞれの数値は**一つの空白**で区切られ, すべてを一行に出力すること.
- 必要なもの以外の出力を行なってはならない.
- コード体系は ASCII と仮定してよい.
- 「文字」とは, 非印字文字を含む, １バイトのデータのことである.
- 「英字」とは, `ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZabcdefghijklmnopqrstuvwxyz` のことである.
- 「数字」とは, `0123456789` のことである.
- 「英数字」とは, 英字と数字のことである.
- 「単語」とは, 「英数字」とハイフン以外の文字を区切りとした連続した文字のことである.

- 「行」とは, 改行文字とファイル終端を区切りとした文字の並びのことである.
- 「空行」とは, 改行文字もしくはファイル終端しか含まない行のことである.
- 出力する答えが任意性を持つ場合には, 正の最小剰余を出力すること.
- 「テキスト」とは, 印字可能文字, 改行, 復帰, 改ページ, タブ文字からなるデータのことである.
- `/bin/XXX` を書けと指定された問題は, 情報メディア教育センターの Solaris の指定のコマンドと同等なものを書くこと.
- `sizeof(int) = sizeof(unsigned int) = 4` と, １バイト＝８ビットを仮定して良い.
- 入力行の解析において, １行の最大文字数が１０２４であること, １つの要素の最大文字数が「多項式」を除いては２０であること, １行に含まれる最大要素数が２０であることは利用して良い.

また, 必要に応じて関数に分割すること. 関数に分割した場合は, 何をするものかをコメントとして書き, プロトタイプ宣言をすること.

また, アルゴリズムについては, そのアルゴリズムに対する説明をコメントとして書くこと. 特に, 正しい入力データが与えられる限り, プログラムが必ず終了する根拠を明確に述べること.

2.5 提出期限

提出期限は**２０００年９月１３日（水）**とする.

電子メールで提出するレポートに関しての締切の意味は, その提出日の２３時５９分５９秒（日本標準時）以前の時刻でメールが発信されていれば良いこととする.

また, 紙で提出するレポートに関しては, 提出日の午後５時までに, 内藤のオフィスの前の提出箱に提出すること.

2.6 標準入力からのデータの入力方法

標準入力からデータを入力する際には, 以下の方法で行うのがもっとも簡単である.

たとえば, 標準入力から２つの整数 `100`, `-500` をプログラム`prog_test` に入力する際には, 次のいずれかを行う. （ここでは, シェルとして, `csh` を利用していることを仮定する.）

1. コマンド `echo` を利用する.

   ```
   echo␣"100␣-500"␣|␣./prog_test
   ```

2. 入力するデータをファイルとして作成する. たとえば, データのファイル名を `test_data` とし, その中身を

   ```
   100␣-500
   ```

   とする. （最後に改行が入る.）このようなファイルを作成しておき, `cat` コマンドからのパイプを利用する.

```
cat␣test_data␣|␣./prog_test
```

または標準入力からのリダイレクションを利用する.

```
./prog_test␣<␣test_data
```

2.7　サンプル・プログラム

標準入力からデータを受取り, それを「一つ以上の空白」で区切られた部分に分解するためには, 次のコードを利用しても良い.

```
int get_chars(char *line, char word[MAXCOMP][MAXCHAR])
{
  char *p, *q ;
  int  count = 0 ;

  p = line ;
  while(*p) {
    q = word[count] ;
    while(*p&&(*p != ' ')&&(*p != '\n')) *q++ = *p++ ;
    *q = 0x00 ; count += 1 ;
    while((*p == ' ')||(*p == '\n')) p++ ;
  }
  return count ;
}
```

この関数を利用したプログラム例は以下の通りである.

```
#include <stdio.h>

#define MAXLINE 1025     /* １行最大文字数 = 1024 */
#define MAXCHAR 21       /* １つの要素の最大文字数 = 20 */
#define MAXCOMP 20       /* 要素数の最大 = 20 */

extern int get_chars(char *, char word[][]) ;

int main()
{
  char line[MAXLINE], word[MAXCOMP][MAXCHAR] ;
  int  result, i ;
```

```
  if (fgets(line,MAXLINE,stdin) != NULL) {
    result = get_chars(line,word) ;
    for(i=0;i<result;i++) printf("%s\n",word[i]) ;
  }
}

int get_chars(char *line, char word[MAXCOMP][MAXCHAR])
{
  char *p, *q ;
  int  count = 0 ;

  p = line ;
  while(*p) {
    q = word[count] ;
    while(*p&&(*p != ' ')&&(*p != '\n')) *q++ = *p++ ;
    *q = 0x00 ; count += 1 ;
    while((*p == ' ')||(*p == '\n')) p++ ;
  }
  return count ;
}
```

3 レポート問題

以下のレポート問題は, どれか一つでも完全なレポートを提出すれば単位は保証する. （ただし, 成績は別.）

レポート問題 1

講義中に説明した NIM について, そのゲームの解析を行いなさい. 特に, 「最後の石を取ったほうが勝ち」というルールと, 「最後の石を取ったほうが負け」というルールの両方について考察しなさい.

さらに, $n \geq 2$ に対して, $n+2$ 個の以上の山があり, 同時に n 個以下の山から石をとっても良いという「拡張された NIM」について, 同様の考察を行いなさい.

レポート問題 2

IEEE 浮動小数点規格で演算を行う計算機上で,

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \\ a_1 &= \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \\ a_{n+1} &= a_n + a_{n-1} \end{aligned}$$

に従う数列 $\{a_n\}$ を, この帰納的定義（漸化式）によって計算したとき, その結果は期待したものと異なる挙動を示す. この事実を説明しなさい.

レポート問題 3

円周率 π の値を小数点以下第 7 桁まで計算しなさい.

レポート問題 4

滑らかな関数 $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ に対して, 方程式 $f(x)=0$ の解を求めるためのニュートン法を考える. この時, ニュートン法による解 α の近似列 $\{x_n\}$ の収束の速度は, α が $f(x)=0$ の単根であれば,

$$|x_n - \alpha| \leq C|x_{n-1} - \alpha|^2$$

をみたし, α が $f(x)=0$ の m 重根 $(m \geq 2)$ であれば,

$$|x_n - \alpha| \leq C|x_{n-1} - \alpha|$$

をみたすことを証明しなさい.

レポート問題 5

クイック・ソートで n 個の要素をソートするときの, 平均比較回数は $O(n \log n)$ であることを証明しなさい.

4 レポート問題（プログラム）

プログラム問題 1 (Level 1)

２つの正の整数を入力する．それらの最大公約数を出力するプログラムを書け．

プログラム問題 2 (Level 1)

２つの正の整数を入力する．それらの最小公倍数を出力するプログラムを書け．

プログラム問題 3 (Level 2)

100000 までのすべての素数を小さいものから順に出力するプログラムを書け．

プログラム問題 4 (Level 2)

２つの正の整数 (a, b) を入力する． a の b 進数による表示を出力するプログラムを書け．ただし, b は $2 \leq b \leq 36$ を満たす整数とする．

プログラム問題 5 (Level 2)

正の整数を一つ入力するそれが９の倍数かどうかを判定するプログラムを書け．ただし, その整数を９で割ったり, 剰余をとったりしてはならない．出力は入力された整数の９で割った余りとする．

プログラム問題 6 (Level 2)

正の整数を一つ入力する．その整数の素因数分解を求めるプログラムを書け．出力は, 素因数を小さい順に出力せよ．すなわち, $12 = 2^2 \cdot 3$ の時には, ２ ２ ３ と出力する．

プログラム問題 7 (Level 2)

２つの正の整数 (u, v) を入力する．それらに対して,

$$au + bv = \gcd(u, v)$$

を満たす a ,b を順にただ一組だけ出力するプログラムを書け．

プログラム問題 8 (Level 2)

$\sqrt{2}$ の値を誤差 10^{-10} で出力するプログラムを書け．

プログラム問題 9 (Level 3)

最大２０個の正の整数を入力する．それらの最大公約数を出力するプログラムを書け．

プログラム問題 10 (Level 3)

最大２０個の正の整数を入力する．それらの最小公倍数を出力するプログラムを書け．

プログラム問題 11 (Level 3)

２つの正の整数 (a, b) を入力する．a が $b-1$ の倍数かどうかを判定するプログラムを書け．ただし, a を $b-1$ で割ったり, 剰余をとったりしてはならない．また, b は $3 \leq b \leq 36$ を満たす整数とする．出力は a の $b-1$ で割った余りとする．

プログラム問題 12 (Level 3)

正の整数を一つ入力する入力した整数を n とするとき, n 段のハノイの塔の円盤の移動の様子を記述するプログラムを書きなさい. ただし, n は 5 以下とする. ここで, 移動の様子は, 以下のように記述する. 棒には `A`, `B`, `C` という名前をつけ, 円盤には, `1` から `n` まで, 小さい順に名前をつける. はじめはすべての円盤は `A` にあるし, 最終的に円盤は `B` に移動することとする. この時, $n = 2$ の場合の解として,

```
1 A C
2 A B
1 C B
```

と出力する. すなわち, １行に１回の移動を書き, 先頭には移動する円盤の名前, 一つの空白を開けた後, 元の棒の名前, 一つの空白を開けた後, 移動後の棒の名前, 最後に改行を入れる.

プログラム問題 13 (Level 3)

２つの複素数を入力する. それらを順に a, b とした時, $a+b$, $a-b$, ab, a/b, $|a|$, $\arg(a)$, $\bar{a}$, $\sqrt{a}$ を表示するプログラムを書け. 出力は $a+b$, $a-b$, ab, a/b, $|a|$, $\arg(a)$, $\bar{a}$, $\sqrt{a}$ それぞれを１行ずつ表示せよ. 即ち, 出力は８行となる.

注意. この問題は, それぞれの演算を必ず関数で書くこと. ただし, b として 0 を代入することはない. この問題は, 数学関数ライブラリを用いて良い.

プログラム問題 14 (Level 4)

方程式 $x^4 + x^3 - x - 1 = 0$ の正の解をすべて求めるプログラムを書け. ただし, 解は実数で表示することとし, 相対誤差 10^{-10} で求めよ.

プログラム問題 15 (Level 4)

１つの有理数を入力する. それを単位分数の和で表すプログラムを書け. ただし, 入力される有理数は 0 より大きく, 1 より小さいとする. ここで現れるすべての単位分数は相異なるものであるとする. 出力は, 単位分数の分母を空白で区切って出力せよ. 例えば, $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ である.

プログラム問題 16 (Level 4)

整数を一つ入力する. その数を平衡３進展開して出力せよ. 但し各桁の値は $-1, 0, 1$ に対して、それぞれ `n`, `z`, `p` を出力するものとする. 例えば, 3 が入力された時, 出力は `pz` となる. （出力中に空白は入っていないことに注意.）

プログラム問題 17 (Level 5)

$0 < x < 1$ を満たす有理数 x を以下の形の連分数に展開する.

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}$$

これを x の正則連分数展開と呼ぶ. 有理数を一つ入力する時, この数の正則連分数展開の係数 $\{a_n\}$ を空白で区切って出力するプログラムを書け.

プログラム問題 18 (Level 5)
標準入力から１行に１つのデータからなる, 最大１００行のデータを入力する. データ形式は, 行の先頭に空白はなく, 次の空白までが文字列（このフィールドを「氏名」と呼ぶことにする）一つの空白文字を挟んで, 次の空白までが８文字からなる「数字」（このフィールドを「学籍番号」と呼ぶことにする）一つの空白文字を挟んで, 行末までが最大３文字からなる「正または０の整数」（このフィールドを「得点」と呼ぶことにする）であるとする. このような形式のデータを, 「得点」の大きい順に並び替えるプログラムを書け. ただし, 「得点」が同じ場合には, 「学籍番号」の小さい順に並べることとし, 入力は必ずしも「学籍番号」の順には並んでいないとする. さらに, 出力は並び替えた順に, １行に１つのデータを入力と同じフォーマットで出力することとする.

注意. この問題は, Ｃの組み込み関数 `qsort` を使ってはならない.

プログラム問題 19 (Level 5)
自然対数の底 e を小数点以下第５桁まで求めるプログラムを書け.

プログラム問題 20 (Level 6)
円周率 π を小数点以下第５桁まで求めるプログラムを書け.

プログラム問題 21 (Level 8)
最大２０個の正の整数 $\{u_i\}_{i=1}^k$ を入力する. それらに対して,

$$a_1u_1 + \cdots + a_ku_k = \gcd(u_1, \cdots, u_k)$$

を満たす $\{a_i\}_{i=1}^k$ を順にただ一組だけ出力するプログラムを書け.

プログラム問題 22 (Level 8)
行列を一つ入力する. その行列の行列式の値を出力するプログラムを書け. 出力は整数であること.

プログラム問題 23 (Level 10)
$\mathbb{Z}[i] := \{x + iy; x, y \in \mathbb{Z}\}$ とする. $\mathbb{Z}[i]$ の素元のうち, $x^2 + y^2 \leq 100$ を満たすものをすべて出力するプログラムを書け. ただし, 出力する順序は $x^2 + y^2$ の値の小さいものから順であるとし, $x^2 + y^2$ の値が等しい時には, x の値が小さいものから順であるとする. （注意： $\mathbb{Z}[i]$ の中では $2 = (1 + i)(1 - i)$ と分解できる.）

プログラム問題 24 (Level 13)
有理数を一つ入力する. その有理数の１０進小数表示を出力せよ. 答が有限小数で表示可能な時には, 有限小数として, 表示すること. （桁はいくら長くなってもよい. その場合には, 「長い桁の数」の表示方法に従うこと.）もし, 循環小数として表現される時には, 循環節を { } ではさむこと. 例えば, 1/7 = `0.{142857}` である.

ただし, この問題は入力する有理数を既約分数で表したときの分母は 1024 以下であると仮定する.

プログラム問題 25 (Level 15)
実数を一つ, 正の整数を一つ, この順に入力する. 入力された実数を x, 正の整数を b として, x の b 進数による表示を出力するプログラムを書け. ただし, $2 \leq b \leq 36$ とする. 答が有限小数で表示可能な時には, 有

限小数として, 表示すること. （桁はいくら長くなってもよい. その場合には, 「長い桁の数」の表示方法に従うこと.）もし, 循環小数として表現される時には, 循環節を { } ではさむこと.

ただし, この問題は入力する実数を既約分数で表したときの分母は 1024 以下であると仮定する.

プログラム問題 26 (Level 15)

８クイーン問題の解をすべて出力するプログラムを書きなさい. ただし, 一つの解を１行に出力することとし, その解は,

```
1 2 3 4 5 6 7 8
```

と表示したとき, それは１行めの１列目, ２行めの２列目.. にクイーンが置かれていることを意味することとする.

プログラム問題 27 (Level 15)

騎士巡回問題の $N = 8$ の時の解を一つ出力するプログラムを書きなさい. その解は,

```
01␣06␣15␣10␣21
14␣09␣20␣05␣16
19␣02␣07␣22␣11
08␣13␣24␣17␣04
25␣18␣03␣12␣23
```

と表示する. （これは $N = 5$ の時の一つの解である.）その意味は, $N \times N$ の盤上で移動する順序を記入していく. ただし, 盤上の各位置は２桁の整数が表し, それらの間は一つの空白を入れること. また, 各行の最後には, 一つの空白が入っても良い.

プログラム問題 28 (Level 20)

`/bin/grep` を書け.

grep とは, 第一引数に指定された文字列を含む行を第二引数以後に指定されたファイルから検索するものである. この時, 第二引数が省略された場合には, 標準入力となり, 入力ファイルが複数指定された場合には, 出力にはファイル名も付け加えなくてはならない. （出力の実際は, grep コマンドを使って調べよ）.

また, 検索すべき文字列は, 通常は文字列そのものであるが, 以下の正規表現をサポートすること.

正規表現の表:

`^`	行の先頭を表す.
`$`	行の末尾を表す.
`.`	任意の１文字に match する.
`\`	次に続く特別な文字（`^$.\`）の意味をなくす.

以上.

プログラム問題 29 (Level 20)

バイナリファイルのデータを前から順に６ビットずつとりだし, その６ビットのデータを６桁の２進数として,

```
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZabcdefghijklmnopqrstuvwxyz0123456789+/
```

という文字にマッピングする.

即ち, その６ビットのデータが 0 ならば, `A` とし, 63 なら `/` とする. このマッピングを行なったデータを先頭に `I` をつけた一行に７７文字のテキストファイルとして出力する. この操作と, その逆を行なうプログラムを書け. ただし, この操作で, 入力ファイルで６ビットに満たない余りが出た場合には, 必要な分だけ 0 を付け加える.

この時, ２４ビットごとにひとまとまりとなるが, 入力ファイルで最後に１バイト（８ビット）余った場合には, ２つの `=` を付け加え, ２バイトが余った場合には, １つの `=` を付け加えよ. （このようなことを「パディング」と呼ぶ）. また, 出力ファイルで最後の行は７７文字に満たなくても良い. また, 出力ファイルの先頭には, その出力ファイルの行数（先頭に `I` を含む行数）を整数として, １行に出力せよ. 即ち, テキストとして出力されるデータは

```
2
I01234567890123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890123456
I0123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890123456789
```

などなる.

このプログラムを書く際に, 次のような仕様を満たすようにせよ. 例えば, プログラムの名前を `base64` とすると,

`base64` [`-r`] 入力ファイル名 出力ファイル名

- `-r` がない場合には, バイナリからテキストの変換を
- `-r` がある場合には, テキストからバイナリの変換を

することとする.

プログラム問題 30 (Level 25)
自然対数の底 e を小数点以下第１０００桁まで求めるプログラムを書け.

プログラム問題 31 (Level 30)
円周率 π を小数点以下第１０００桁まで求めるプログラムを書け.

プログラム問題 32 (Level ∞)
以下にある仕様のオセロのプログラムを書け.

このプログラムに関しては, 対戦を行ない, 優勝者には単位を出す. ただし, 対戦は（多分）総当たりのリーグ戦で行ない, 一人の相手あたり, 先手・後手を同数だけゲームを行なう. （回数は未定.）また, この対戦には, 大学院生や担当教官も参加する. 詳しい対戦方法は, このプログラムの提出人数による. なお, 優勝しなくても成績が良い場合には単位を出す可能性もあるので, できるだけ提出して欲しい.

なお, 担当教官, 大学院生等の作成したプログラムの実行コードは

`/mdhome/homet/hnaito/Othello/bin`

にある. ただし, これらのプログラムは不定期にバージョン・アップされる.

【/mdhome/homet/hnaito/Othello/bin 内のプログラム】

user	支援プログラム（コマンド・ライン・インターフェース）
xuser	支援プログラム（Ｘ１１インターフェース）
single	支援プログラム（思考レベル０）
double	支援プログラム（思考レベル１）
random	支援プログラム（ランダムに手を打つ）
kubo	支援プログラム（久保氏作成のプログラム）
naito	支援プログラム（内藤作成のプログラム）

また, オセロのプログラムコードの著作権は, 久保仁氏にあり, 勝手な改変, 複製は認められていません.

【 対戦オセロプログラム othello について 】

● オセロ (TM ツクダオリジナル) のルールについて

一般的なオセロのルール

・８×８マスの盤面と、表、裏がそれぞれ黒、白になったコマを用いる。
・盤面の中央４マス (２×２マス) に互い違いに黒、白を置き、あとはなにも置いていない状態からゲームを開始する。
・先手は黒で、一手づつ黒、白交互に置き、ゲームを進める。
・盤面にコマを置いてとき、そのコマとすでに置いてあった自分の色のコマとで、すき間なく相手の色のコマを直線的 (縦横斜めの８方向) にはさんだ場合、それら相手の色のコマは裏返して自分の色のコマとなる。
・すでにコマが置いている場所にコマを置くことはできない。
・一枚も裏返すことができない場所にコマを置くことはできない。
・コマを置くことのできる場所がない場合はパスとなり、相手の手番となる。
・盤面がコマで埋め尽くされた場合、あるいは双方パスとなり先に進めない状態になったらその時点でゲーム終了となる。
・ゲーム終了時に、自分の色のコマが多い方が勝ちとなる。
・コマを置く場所があるにもかかわらず、パスした場合はその時点で負けとなる。
・コマを置くことのできない場所にコマを置いた場合（すでにコマが置いてある、もしくは１枚も裏返らない）はその時点で負けとなる。

今回の特殊ルール

・ゲーム終了までの持ち時間はＣＰＵ時間で１０秒。

● サンプルプログラム

次のプログラムは最も簡単な思考ルーチン (思考していないけど…) です。コマを置くことのできる場所を検索し、その中からランダムに次の手を選択するプログラムです。

―― ここから ――

```
#include <stdio.h>
#include <sys/time.h>
#include <sys/types.h>
#include <othello.h>

int main(void)
{
  int i, n;
  int color;
  char board[8][8];
  struct trick list[60];

  srandom((int)time(NULL));

  /* 初期化 */
  init(&color);

  /* メインループ */
  while (waitturn() == WT_MYTURN) {
    getboard(board);

    n = gettricklist(board, list, color);

    if (n == 0) pass();
    else {
      i = random() % n;
      nexttrick(list[i].x, list[i].y);
    }
  }

  return 0;
}
```

—— ここまで ——

いちおう上記のプログラムの解説をしておきます。

1 行目	おやくそく。
2〜3 行目	`time()` を使うために必要。
4 行目	※必ず必要。オセロ関係の関数の情報が入っている。
6 行目	コマンドライン引数は用いないので `int main(void)` でよい。
8〜11 行目	
13 行目	`srandom()` で乱数の初期化を行なう。
16 行目	※必ず必要。オセロプログラムの初期化を行なう。 自分のコマの色が `color` に代入される。
19 行目	※必ず必要。自分の手番が廻ってくるまで待機する。ゲームが終了すると `waitturn()` は 0 を返すので、ループを抜ける。
20 行目	現在の盤面を `board[8][8]` に代入する。 盤面の構成は `board[y][x]`（0 ≦ x, y ≦ 7）で、0 が黒 1 が白 2 がなにも置いていない場所を示している。

22 行目	`gettricklist()` は盤面 `board` 上に 色 `color` のコマを置くことのできる場所すべてを得る関数。`n` には置ける場所の総数が入り、`list[i]`（0 ≦ i ≦ n - 1）には座標と裏返る枚数が入る。`trick` 構造体は
	
	`struct trick {`
	`  int x;`
	`  int y;`
	`  int n;`
	`};`
	
	と定義されているので、 `list[i].x, list[i].y, list[i].n` にはそれぞれ X 座標、Y 座標、裏返る枚数がはいっている。

24 行目	`n == 0` ならば置ける場所がない、 ということなのでパスをする。`pass()` は単にパスをするだけの関数。
26 行目	パスでない場合は `random() % n` で 0〜n-1 をランダムに選択する。
27 行目	`nexttrick()` は `list[n].x, list[i].y` にコマを置くことを決定する。
29 行目	19 行目にもどり、自分の手番まで待機する。
31 行目	`while` ループを抜けたら、ゲームセットなのでプログラムを

終了する。

ここで使われた以外にも、次のような関数が準備されています。詳しくは次章を参照して下さい。

getscore()	盤面上にある白い (あるいは黒い) コマの総数を得る関数。
nreverse()	ある場所にコマを置いた時、何枚裏返るかを返す関数。
printboard()	盤面を画面に出力する関数。
putpiece()	盤面上にためしに手を置いてみる関数。
remainedtime()	残り時間数を得る関数。

● Makefile の書き方

オセロプログラムを書くには特殊なライブラリ (関数の集まり) を組み込む必要があります。コマンドラインから直接指定しても良いのですが、かなり長い命令を打ち込まなければならないので大変です。 以下に示す Makefile というファイルを作ると、その手間を省くことができます。

```
—— ここから ——
CC=gcc
CFLAGS=-I/mdhome/homet/hnaito/Othello/lib
LDLIBS=/mdhome/homet/hnaito/Othello/lib/othellolib.o

all: program1 program2
—— ここまで ——
```

上の例ではコマンドラインから make と入力すると、 program1.c と program2.c をコンパイルし、program1 と program2 という実行形式を作ります。

● 対戦のやり方

自分のつくったプログラムを対戦させるには少々準備が必要です。
コマンドラインから次の二つのコマンドを入力して下さい。

```
% /mdhome/homet/hnaito/Othello/lib/setup.sh
```

```
% source ~/.cshrc
```

これで準備は終りです。

```
othello program1 program2
```

を実行すると先手 (黒) が program1、 後手 (白) が program2 で対戦を行ないます。program1 program2 を指定する場合には、相対パスまたは絶対パスにより、プログラム名を明示的に指定する必要があります。
たとえば、下の支援プログラム "user" と "xuser" で対戦するには

```
othello /mdhome/homet/hnaito/Othello/bin/user /mhhome/homet/hnaito/Othello/bin/xuser
```

と明示的に指定するか、カレント・ディレクトリにそれらをコピーする必要があります。 (othello は /mdhome/homet/hnaito/Othello/lib にあります。)

・特殊な対戦プログラム
　プログラム開発支援用に特殊な対戦プログラムを用意してあります。

- user　ユーザ用のインターフェース。これでコンピュータ対人間の対戦ができます。テキストベースなのでどのような端末でも利用できます。
- xuser　ユーザ用のインターフェースのX版。これでコンピュータ対人間の対戦ができます。情報メディア教育センターの端末等、ウインドウシステム等のグラフィカル端末で利用できます。左クリックでコマを置き、右クリックでパスします。ゲームが終了したら一度クリックするとプログラムは終了します。

サーバプログラム othello にはいくつかのオプションがあります。 以下にオプションの解説を行ないます。

- -try num　num 回繰り返して対戦します。偶数回目は先手と後手を入れ換えて対戦します。
- -verbose num　いくつかの段階で画面にゲームの進行状況を表示します。
  num には以下の数値が入ります。
  - 0　トータルの勝敗分の数を表示します (デフォルト)。
  - 1　各試合の勝ち負けも表示します。
  - 2　各試合の最終盤面も表示します。
  - 3　全手順も表示します。

4　全盤面も表示します。

● 関数一覧

オセロプログラムを書くにあたって必要と思われる関数の一覧です。備考欄に「計算時間は遅い」と書いてある関数はわざと遅くしてある関数です。同じ機能を持つ関数を自分で作った方がより強いプログラムを作ることができます。

int init(int *color)

用途:　各種初期化を行なう。
引数:　color　自分のコマの色のポインタ (WHITE_PIECE, BLACK_PIECE のいずれかが返される)。
戻値:　正常に動作した場合は 0,
エラーの場合は -1 が返る。
備考:　プログラムの先頭で必ず実行すること。

int waitturn(void)

用途:　自分の手番まで待つ。
引数:　なし。
戻値:　自分の手番が回ってきた場合は 0, ゲームが終了した時は 1,
エラーが発生した時は -1 が返る。
備考:　なし。

int getboard(char board[8][8])

用途:　現在の盤面が board に書き込まれる。
引数:　board　盤面を表す 8 × 8 の char 型の配列。
戻値:　正常に動作した場合は 0,
エラーの場合は -1 が返る。
備考:　board[y][x] には WHITE_PIECE, BLACK_PIECE, NO_PIECE のいずれかが入っている。

int nexttrick(int x, int y)

用途:　次の手を決定する。
引数:　x, y　コマを打つ座標 ($0 \leqq x,y \leqq 7$)。
戻値:　置ける場合は 0, 置けない場合は -1 が戻る。
備考:　次に waitturn を実行するまでの間に、pass 関数も含めて 2 回以上実行してははいけない。

`int pass(void)`

用途:　次の手をパスする。

引数:　なし。

戻値:　パスができる場合は 0，パスができない場合は -1 が返る。

備考:　次に waitturn を実行するまでの間に、nexttrick 関数も含めて 2 回以上実行してははいけない。

`int remainedtime(void)`

用途:　持ち時間の残りを返す。

引数:　なし。

戻値:　残り時間が単位 msec で返る。ただし制限時間オーバーの場合は -1 が返される。

備考:　なし

`int printboard(char board[8][8]);`

用途:　オセロ盤 (8 × 8) を画面に出力する。

引数:　board　盤面を表す 8 × 8 の char 型の配列。

戻値:　正常に終了した場合は 0，エラーが起こった場合は -1 が返る。

備考:　なし

`int gettricklist(char board[8][8], struct trick *list, int color)`

用途:　盤面 board 上、色 color の手番で打つことのできる場所の配列を得る。

引数:　board　盤面を表す 8 × 8 の char 型の配列。

list　手の情報を返すための構造体 trick へのポインタ。list[n].x，list[n].y，list[n].n にそれぞれ、x 座標，y 座標，裏返るコマの枚数が代入される。(n = 0,1,...,戻値-1)

color　打ちたいコマの色 (WHITE_PIECE，BLACK_PIECE)。

戻値:　置ける位置の個数が返る。

備考:　2 次元配列 list は各自十分なサイズを用意する。
計算時間は遅い。

`int nreverse(char board[8][8], int x, int y, int color)`

用途:　オセロ盤 board 上の (x, y) に色 color のコマを打ったとき、何枚裏返るかを得る。

引数:　board　盤面を表す 8 × 8 の char 型の配列。

x，y　コマを打つ座標 ($0 \leqq x,y \leqq 7$)。

color　打つコマの色 (WHITE_PIECE，BLACK_PIECE)。

戻値:　裏返るコマの枚数が返る。

備考:　計算時間は遅い。

`int putpiece(char board[8][8], int x, int y, int color)`

用途:　盤面 board 上の（x，y）に色 color のコマを打ち、
必要ならコマを裏返す。

引数:　board　盤面を表す 8 × 8 の char 型の配列。

x，y　コマを打つ座標 ($0 \leqq x,y \leqq 7$)。

color　打つコマの色 (WHITE_PIECE，BLACK_PIECE)。

戻値:　裏返ったコマの枚数が返る。

備考:　思考ルーチン用であり、実際に自分の手を決定するものでは
ない。

計算時間は遅い。

`int getscore(char board[8][8], int color)`

用途:　オセロ盤 board 上、色 color のコマがいくつあるかを得る。

引数:　board　盤面を表す 8 × 8 の char 型の配列。

color　コマの色 (WHITE_PIECE，BLACK_PIECE)。

戻値:　色 color のコマの個数が返る。

備考:　計算時間は遅い。

以上.

科目名　**数理物理学Ｉ／数理物理学概論Ｉ**　**担当教官**　**中西 知樹**

サブタイトル　力学と場の古典論

対象学年　**４年／大学院**　**２単位**　**選択**

教科書
参考書　ランダウ＝リフシッツ,「力学」,「場の古典論」, 東京図書

予備知識

大学初年級における Newton 力学と電磁気学の素朴な知識のみ

講義内容

講義の目標 (コースアウトラインより) — 現代理論物理学の根幹をなす Symmetry Principle (対称性の原理), 特に時空対称性とゲージ対称性とは何かを解説するのが本講義の目的である.

広く数学専攻の学生を対象とし, 大学初年級における Newton 力学と電磁気学の素朴な知識のみを仮定して Lagrangian formalism の初歩から講義を始める.

講義は, Yang-Mills 理論を除いては, おおむね古典的教科書であるランダウ＝リフシッツ著,「力学」,「場の古典論」(東京図書) に沿う. むろん数学的定式化を積極的に行うが，かならずしも物理理論の厳密な数学的定式化自体を最重要視する立場にはたたない. むしろ根底にある物理的な picture の解説を丁寧におこなうことを主眼とする. これは, 複眼的な視点, すなわち数学と物理学の双方からの観点から対象を観察することが数理物理学の本質であると信じるからである.

この講義は理論物理学の速成コースの前半とでもいうべきものであり, この講義を終えた学生はさらに量子力学, 統計力学, 量子的場の理論の基本概念を習得することにより一通りの理論物理学の俯瞰を持つことができるはずである.

実際に行った講義の内容

Lecture 1. Newton 力学 (4 weeks)

1. **一粒子の運動.** Newton の運動方程式, 自由粒子, 最小作用の原理
2. **Lagrangian formalism.** 一般座標, Lagrangian, Lagrange 方程式
3. **物理法則の不変性.** 物理法則の等価性, 物理法則の不変性の二つの等価な述べ方 (時空変換と座標変換)
4. **Newton 力学の対称性.** Galilei 変換, 慣性系, Galilei の相対性原理, 一粒子系の Lagrangian, 二粒子系の Lagrangian
5. **対称性と保存量.** 時間の一様性とエネルギー保存則, Noether の定理, 運動量の保存則, Lie 群 SO(3) と Lie 環 so(3), 角運動量の保存則
6. **Hamiltonian formalism.** 一般運動量, Legendre 変換と Hamiltonian, 正準方程式, Poisson bracket, 保存量, Noether の定理 (Hamiltonian version), 正準変換

Lecture 2. 相対論的力学 (3 weeks)

1. **Einstein の相対性原理.** Newton 力学の限界, Minkowski space, 曲線の長さ, Poincaré 変換, Einstein の相対性原理, 1 粒子系
2. **Lorentz 変換.** Lorentz 変換
3. **慣性系の間の変換則.** Lorentz boost, 非相対論的極限, 同時性の相対性, Lorentz 収縮, 速度の合成, 時計の遅れ, 固有時間,
4. **4 次元ベクトル形式.** 反変ベクトル, 共変ベクトル, 縮約

5. 相対論的力学. N 粒子系の lagrangian, 保存量, 運動量 4-vector, 角運動量 4-tensor Einsten の関係式と静止エネルギー

Lecture 3. 電磁気学 (3 weeks)

1. Maxwell 方程式. Coulomb 力と Lorentz 力, Maxwell 方程式, 電磁ポテンシャルと de Rhanm コホモロジー
2. 相対論的定式化. 4 次元形式 (ポテンシャル, 電磁場, 電流密度), 運動方程式の導出, 電磁場の作用, 場の方程式, Maxwell 方程式の導出
3. gauge 対称性. ポテンシャルの gauge 変換, 粒子の量子力学的描像と波動関数, Dirac 行列, Feynman の記号, Dirac spinor, Dirac 方程式, gauge 変換と gauge 対称性

Lecture 4. Yang-Mills 理論 (2 weeks)

1. SU(n) **gauge 理論.** Lie 群 SU(n) と Lie 環 su(n), 可換 gauge 理論としての電磁気学, 内部空間, gauge 場, gauge 変換と共変微分, Yang-Mills 場, gauge 変換と gauge 対称性, Yang-Mills 方程式
2. vector bundle と gauge 変換. (trivial) vector bundle と section, gauge 変換, 接続, gauge 不変性の原理
2. spinor とスピン束. Spin(1,3), spin bundle と Dirac spinor

講義の感想

なし

科目名　**代数学概論 I**　**担当教官**　**齊藤 博**

サブタイトル　ワイエルシュトラースの代数函数論

対象学年　**大学院**　**２単位**　**選択**

教科書

参考書　Weierstrass, Karl., Mathematische Werke, IV, Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transcendenten
岩沢健吉，代数函数論，岩波書店

予備知識

特に仮定しない

講義内容

ワイエルシュトラースによる１変数代数函数論について解説する．その特徴は，原理的にはなんでも計算できるアルゴリズムを与えていることである．理論の要である H-函数を導入し，それにより与えられた極を持つ（実際は，それと種数個の点での１位の極を除き一致する）有理函数を計算するアルゴリズムを与える．加法的クザン問題＝リーマン・ロッホの定理は，種数個の点での１位の極が消える条件として得られる．そして，第一種微分，第二種微分，第三種微分の積分がテーマである．乗法的クザン問題＝アーベルの定理まで「具体的に」計算して示すことを目指したが，時間が足りなかった．予備知識は，学部２年前期の函数論と若干の代数とトポロジーの知識である．

具体的な講義内容は以下の通り：

1. 函数要素（１．５回）
   - 特異点を許す平面曲線（考える「 Riemann 面」）
   - 函数要素=べき級数
2. blowing up (０．５ 回)
3. 解析接続（１回）
4. 有理函数の位数（１回）
5. 留数定理（０．５回）
6. H-函数の定義，簡単な性質と種数（１．５回）
   - H-函数は，g 個の点と一般の点で極を持つ有理函数で g 最小のもの.
   - H-函数の具体的構成法.
   - 種数 g の双有理不変性.
7. H-函数の性質（２回）

8. H-函数による有理函数の表示と Riemann-Roch の定理（１回）

    - 一般の点で与えられた位数の極を持ち H-函数の種数個の極 (=1 位）以外で正則な有理函数の H-函数からの計算できる形での構成.
    - 有理函数の上記有理函数による表現
    - Riemann-Roch の定理

9. 第１種微分と第２種微分（１回）

    - H-函数から，第１種微分，第２種微分の基底の構成.
    - 第１種微分の数 =（本来の）第２種微分の数 = 種数

10. 第１種，第２種，第３種微分の基本関係（１回）

11. 第１種，第２種，第３種微分の分解とガウス・マニン接続への応用（１回）

    - 微分を第１種，第２種，第３種微分 (本質的に H-函数) の和として表すこと．（標準的な基底に対し，微分形式からの係数の計算法）
    - 楕円函数体の場合のガウス・マニン接続（Picard Fuch 方程式）の係数の計算.

12. アーベルの定理とその証明の方針（１回）

講義の感想

レポートの提出状況を見ると，例えば，初めから，Riemamm-Roch の定理を目標にして演習などを交えれば良かったかも知れない.

科目名　**幾何学概論 I**　　**担当教官**　**土屋 昭博**

サブタイトル　多様体の交点理論

対象学年　**大学院**　　**２単位**　**選択**

教科書
参考書　服部晶夫，位相幾何学 I，II，岩波書店

予備知識

特に仮定しない

講義内容

大学院初年度の学生が多様体の交点理論の基本的理解を得ることを目的として講義をした．最終目的は，多様体内の部分多様体の双体コホモロジー類の具体的把握，およびその cup 積と部分多様体の交わりの双体コホモロジー類の一致定理である．

具体的な講義内容は以下の通り：

1. 曲面上での例
    - ガウス・ボンネの定理の種々の形
    - ベクトル場の零点に関するホップの定理
2. 特異（コ）ホモロジーの定義と基本的性質
3. 胞複体のホモロジー群，グラスマン多様体の胞体分割
4. 積の理論，クロス積，キャップ積およびカップ積
5. ベクトル束についてのトムの同型定理，トム類とオイラー類
6. ポアンカレの双体定理，多様体の向きづけ可能性，基本類の存在，双体定理
7. 部分多様体の双体コホモロジー類，交点定理
8. 曲面上の例再論

講義の感想

講義を通じて，できる限り平易に解説を心がけた．

科目名 **解析学概論 I** **担当教官 名和 範人**

サブタイトル 非線形発展方程式入門

対象学年 **大学院** **２単位 選択**

教科書

参考書 H. Brézis, 関数解析, 産業図書
L.C. Evance, R.F. Gariepy: Measure Theory and Fine Properties of Fun ctions, CRC
T. Cazenave & A. Haraux, An Introduction to Semilinear Evolution Eq uations (revised edition), Oxford
O.A Ladyzhenskaia, 非圧縮粘性流の数学的理論, 産業図書
田辺 広城, 発展方程式, 岩波
宮寺 功, 非線形半群, 紀ノ国屋
増田 久弥, 発展方程式, 紀ノ国屋
宮寺 功, 関数解析, 理工学社
田辺 広城, 関数解析 (上), 実教出版
K. Yosida, Functional Analysis, Springer
H. Brézis, Opératurs Maximaux Monotones et Sémi-Groupes de Con tractions dans les Espaces de Hilbert , North-Holland

予備知識

Lebesgue 積分, 関数解析, 常微分方程式

講義内容

Hille-Yosida による半群の生成定理，その応用として，半線形の熱，波動，Schrödinger 方程式および Navier-Stokes 方程式の解の存在定理について講議する．

具体的な講義内容は以下の通り：

1. §1 序章 (4/17, 4/24)
   - これからやること（講義の目標）: 偏微分方程式の初期値-境界値問題を Hilbert 空間内の 常微分方程式と見なして，解の存在を証明する．
   - 基本的な参考書，試験の日程.
   - Sobolev 空間とその性質.
   - 関数解析からの準備 : Banach の不動点定理，Lax-Milgram の定理.
2. §2 (線形) 抽象論 (具体例を含む) (5/8, 5/15, 5/21, 5/28, 6/5, 6 /19, 6/26)
   - 極大単調作用素とその性質
   - (半線形) 熱，波動，Schrödinger , 及び Navier-Stokes 方程式の初期値-境界値問題の Hilbert 空間における定式化.

- 極大単調作用素の具体例-極大性および単調性の証明 (線形楕円型方程式の解の存在と滑らかさの議論について幾分詳しく述べた)
- Hille-Yosida の定理：Yosida 近似を用いて証明した．常微分方程式の解の存在と一意性についても復習した

3. §3 Hille-Yosida の定理 の摂動論と各論 (7/3, 7/10, 7/17, 7/17, 9/4)

    - Hille-Yosida の定理 の摂動論：半線形の熱，波動，Schrödinger 方程式および Navier-Stokes 方程式の解の存在定理 に応用できるように二つの定理 (Theorem A と Theorem B) を準備した．Theorem B の証明をレポートとした．
    - 半線形熱方程式の初期値-境界値問題.
    - 半線形波動方程式の初期値-境界値問題.

4. 試験（9/11）

    - ノート持ち込み可，コピー不可
    - 試験後に提出するレポートを参考にしても良い.

講義の感想

講義を通じて, できるだけ平易な解説を心がけたが，くどかったかもしれない．その分，予定していた分量 (自己共役な極大単調作用素や個別の半線形方程式に対する細かな計算) をこなせなかった.

２０００年度 後期講義内容要約

２０００年度後期時間割表（数理学科）

		１年生	２年生	３年生	４年生
月	1			多様体と微分型式（金井）	
	2				基幹数理特論３（藤原）
	3				社会数理特論３（内藤）
	4				
火	1			関数解析（名和）	
	2				高次位相特論１（大和）
	3		ベクトル解析（藤原）	数学展望 III・IV（金井・梅村・長田・佐藤猛・斎藤秀・小林）	
	4				
水	1		関数論（松本）	確率論（服部）	
	2				数理解析特論３（石毛）
	3				
	4				
木	1		解析学要論（太田）	基本群と被覆空間（江尻）	
	2				自然数理特論３（粟田）
	3	数学展望 II（斎藤秀）			
	4	数学演習 II（浪川・木村・佐野・古田・糸）			
金	1		代数学序論（齊藤博）	代数系と表現（岡田）	
	2				
	3		数学演習 V・VI（向井・土屋・梁・鍜島・佐藤周）		
	4				

２０００年度後期時間割表（大学院）

		４年生と共通	大学院のみ
月	1		幾何学特論 II（小林）
	2	代数学概論 II（藤原）	
	3		
	4		
火	1		
	2	幾何学概論 II（大和）	
	3		代数幾何学特論 II（金銅） 応用数理特論 II（大澤研）
	4		
水	1		
	2	解析学概論 II（石毛）	
	3		
	4		
木	1		
	2	数理物理学概論 II（粟田）	
	3		確率論特論 II（長田）
	4		
金	1		
	2		大域解析特論 II（ウエン）
	3		数理物理学特論 II（キリロフ）
	4		

２０００年度後期時間割表（大学院昼夜開講コース）

月	5	
	6	
火	5	基礎数学 I 担当：寺西 鎮男
	6	
水	5	
	6	
木	5	基礎数学 II 担当：大沢 健夫
	6	
金	5	
	6	

科目名　**数学基礎 III**　**担当教官**　**寺西 鎮男**

サブタイトル　微分積分学

対象学年　**１年**　**1.5 単位**　**必修**

教科書　三宅ー市原　理系の基礎数学　微分積分学
参考書

予備知識

特に仮定しない

講義内容

多変数の微分法および積分法

具体的な講義内容は以下の通り：

1. 偏微分法（７回）
   - 全微分可能性と偏微分可能性.
   - 高階偏導関数.
   - 合成関数の偏微分.
   - テイラーの定理と極値問題.
   - 陰関数の定理と逆写像の定理.
   - Lagrange の未定乗数法.
2. 多変数積分法（６回）
   - 重積分の定義.
   - 重積分の計算（累次積分法）.
   - 重積分の計算（変数変換）.
   - ガンマ関数とベータ関数.

講義の感想

講義を通じて，できる限り平易に解説を心がけた.

参考資料

中間試験

問題 1.　C^1-級の関数 $f(x, y)$ が与えられたとき，曲線 $C: \ f(x, y) = 0$ 上の点 $P = (a, b)$ に対し

grad $f(a,b)=(f_x(a,b),\ f_y(a,b))$ は点 P における法線上のベクトルである．このことを用いて，
点 $P=(a,b)$ における

(1) 曲線 C の接線の方程式を求めよ．
(2) 曲線 C の法線の方程式を求めよ．

問題 2. (1) 関数 x^3+y^3-3xy の極値を求めよ．
(2) $x^3+y^3-3xy=0$ の下で，x^2+y^2 の極値を求めよ．

問題 3. C^2-級の関数 $z=f(x,y)$ が $z_{x,x}=a^2z_{y,y}$ （ a は 0 でない定数） をみたすとき，
$u=y+ax,\ v=y-ax$ とおけば， $z_{u,v}=0$ であることを示せ．

問題 4. $\mathbb{R}^2$ 上で C^{n+1}-級の関数 $(n\geq 0)$， $f(x,y)$ の $n+1$ 階の偏導関数がすべて 0 であれば，$f(x,y)$ は n 次以下の多項式であることを示せ．

定期試験

問題 1. C^1-級の関数 $f(x,y)$ が $x+y$ のみの関数であるための必要十分条件は $f_x=f_y$ であることを証明せよ．

問題 2.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (a,b,c>0)$$

の下での $x+y+z$ の最大値と最小値を求めよ．

問題 3. f が連続関数のとき，次の等式を証明せよ．

$$\int_0^x dy\int_0^y f(z)dz=\int_0^x (x-y)f(y)dy.$$

問題 4. 次の積分値を求めよ．

(a)

$$\iint_{\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\}}(x^2+y^2)dxdy.$$

(b)

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1,\ y\geq 0} ydxdy.$$

科目名　**数学基礎 III**　**担当教官**　**尾畑 伸明**

サブタイトル

対象学年　**１年**　**1.5 単位**　**必修**

教科書　江尻・三宅：微分法＆積分法
参考書

予備知識

この講義は前期からの続き故，前期の内容は暗黙のうちに仮定される.

講義内容

前期に引き続き，微分積分学の初歩を講義した.

1. ベータ関数とガンマ関数（1 回）
   - 広義積分
   - ベータ関数とガンマ関数
2. 積分の応用（2 回）
   - 曲線の長さ
   - 級数の収束
3. 多変数の積分法（5 回）
   - リーマン積分による定義
   - 累次積分への帰着
   - 曲座標
   - 一般の変数変換
4. 多変数の微分法（3 回）
   - 方向微分と偏微分
   - 接平面
   - テーラーの公式
   - 極値問題

講義の感想

科目名　数学基礎 III　　**担当教官**　佐藤 肇

サブタイトル

対象学年　１年　　**1.5 単位**　**必修**

教科書　三宅, 市原著 「理系の基礎数学 微分積分学」 学術図書
参考書

予備知識

講義内容

シラバスどおり．多変数の微分，積分．陰関数，逆関数，微分形式，STOKES の定理の説明まで．

講義の感想

学生は私語も少なく，本当に理解しているかは不明ではあるが，多くの学生が熱心に聴いてくれたと思う．

参考資料

中間試験　2000.12.22

問題 1.　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^{2x}}dx$　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$　(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$　(4) $\displaystyle\int \sin(\log x)dx$

問題 2.　次の広義積分の収束を調べよ．

(1) $\displaystyle\int_1^\infty x^\beta \sin x^{-\alpha} dx \ (\alpha, \beta > 0)$　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{x^a}dx \ (0 < a < 1)$

問題 3.　次の関数 $f(x,y)$ の f_x, f_y を求めよ．

(1) $e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$　(2) $\sin^{-1}\dfrac{y}{x}$　(3) x^y

問題 4.　$3x^2 + 2xy + 2y^2 = 15$ の定める陰関数 y の極値を求めよ．

問題 5.　$x^2 + y^2 = 4$ のもとで，$f(x,y) = x^2 + 4xy - y^2$ の最大値，最小値を求めよ．

問題 6.　次の重積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\iint_D x^2y \, dxdy \, (D : 0 \le y \le \sqrt{1-x^2})$

(2) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\le 1} \log(x^2+y^2) \, dxdy$

期末試験　2001.02.02

問題 1.　次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$　　(2) $\displaystyle\int \sin(\log x)dx$

問題 2.　次の広義積分の収束を調べよ.

(1) $\displaystyle\int_1^{\infty} x^{\beta}\sin x^{-\alpha}dx\ (\alpha,\beta>0)$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{x^a}dx\ (0<a<1)$

問題 3.　写像 $(x,y)=(s^t,\ \tan^{-1}\dfrac{t}{s})$ の

ヤコビアン $J(s,t)=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}=\begin{vmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{vmatrix}$ を求めよ.

問題 4.　$x^2-xy+y^2=3$ の定める陰関数 y の極値を求めよ.

問題 5.　$x^2+y^2/4=1$ のもとで，$f(x,y)=2x^2-xy+y^2$ の最大値，最小値を求めよ.

問題 6.　次の重積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\le 3} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$

(2) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\le 1} \log\left(x^2+y^2\right)dxdy$

問題 7.　平面曲線 $C:\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos t \\ \sin t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5\cos t+2\sin t \\ \cos t+3\sin t\end{pmatrix}$，$t\in[0,2\pi]$ と 1 次微分形式 $\omega=ye^{xy}dx+xe^{xy}dy$ に対し，

(1) 外微分 $d\omega$ を求めよ.

(2) 線積分 $\displaystyle\int_C \omega$ を求めよ.

科目名　数学基礎 IV　　**担当教官**　金銅 誠之

サブタイトル　線形代数学

対象学年　１年　　**1.5 単位**　必修

教科書　江尻典雄，線形代数学，学術図書
参考書

予備知識

前期の内容

講義内容

だいたい教科書に沿って講義した．教科書の６章から９章（ベクトル空間，計量ベクトル空間，線形写像，固有値と固有ベクトル）を何らかの形で話したが以下の内容は時間の関係で省略した：直交補空間，直交変換とユニタリ変換，実二次形式の標準形

講義の感想

参考資料

演習問題　2001.01.18

問題 1.　(1) $\mathbf{R}^3$ の次のベクトル組 $(a), (b)$ はそれぞれ一次独立であることを示せ（これより，$\mathbf{R}^3$ の基底にもなっていることに注意せよ）．

$$(a)\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\} \;;\; (b)\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

(2) 基底 (a) を基底 (b) で表したときの変換行列を求めよ．

問題 2.　次のベクトル空間 V の部分集合 W は部分空間かどうか調べよ．部分空間の場合，その次元を求めよ．

(1) $V = \mathbf{R}^3,\ W = \{x \in \mathbf{R}^3 :\ Ax = 0\},\ A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$

(2) $V = \mathbf{R}^n,\ n \geq r,\ W = \{x = \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} :\ x_1 = \cdots = x_r = 0\}.$

(3) $V = \mathbf{R}^2,\ W = \{x = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} :\ x^2 + y^2 = 1\}.$

問題 3.　(1) $X \in M_n(\mathbf{R})$ に対し $t(X) = \mathrm{trace}(X)$ と定義すると

$$t:\ M_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}$$

は線形写像となることを確かめよ．

(2) $\mathrm{Ker}(t)$ の次元を求めよ．

問題 4.　次の行列はそれぞれ対角化可能か判定せよ．可能である場合，対角化せよ:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

試験問題　2001.02.01

問題 1.　(1) $\mathbf{R}^3$ の次のベクトルの組はそれぞれ一次独立かどうか理由をつけて答えよ．

$$(a)\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-9\\-4\end{pmatrix}\right\}\ ;\ (b)\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\6\\8\end{pmatrix}\right\}$$

問題 2.　(1) $\mathbf{R}^2$ の基底

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

からシュミットの直交化法により正規直交基底を作れ．

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ を直交行列 P と上三角行列 T との積として $A = PT$ と表せ．

問題 3.　V, W をベクトル空間，$f : V \longrightarrow W$ を線形写像とする．

(1) $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in V :\ f(x) = 0\}$ とするとき，$\mathrm{Ker}(f)$ は部分空間であることを示せ．

(2) f が単射であることと $\mathrm{Ker}(f) = 0$ は同値であることを示せ．（ただし f が単射であるとは，“ $f(x) = f(y)$ $(x, y \in V)$ ならば $x = y$ ” が成り立つときである．）

(3) $V = \mathbf{R}^4$, $W = \mathbf{R}^3$ で $f:\ \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ が行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ を用いて $f(x) = Ax$ $(x \in \mathbf{R}^4)$ で与えられているとする．このとき $\mathrm{Ker}(f)$ の次元を求めよ．

(4) f を (3) と同じものとする．このとき $\mathrm{Im}(f)$ の次元と基底を求めよ．ただし $\mathrm{Im}(f) = \{f(x) :\ x \in \mathbf{R}^4\}$ である．

問題 4.　行列 $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 6 \\ -3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を考える．

(1) A, B の固有値をそれぞれ求めよ．

(2) 行列 A, B はそれぞれ対角化可能か論ぜよ．対角化可能な場合，対角化せよ．

科目名　**数学基礎 IV**　**担当教官**　**小林 亮一**

サブタイトル　線形代数の続き

対象学年　**１年**　**1.5 単位**　**必修**

教科書　佐武一郎, 線形代数, 共立講座２１世紀の数学
参考書　斉藤正彦, 線形代数入門, 東大出版会

予備知識

数学基礎 II でやった内容

講義内容

置換とその符号．行列式の公理的導入．行列式の面白い性質とその幾何学的意味．線形写像とその階数の概念．階数のいろいろな特徴づけ．線形形式とクラメルの公式から双対空間の概念へ．行列の初等変形とその応用．合同の概念と直交変換．２次形式とその平方完成への変分法的アプローチ.

講義の感想

時間が足りなくて，固有値と固有ベクトルについて一般的な話はできなかった.

参考資料

演習の一例

テーマ：２次曲線

$$2x^2 - 2\sqrt{3}xy = 1$$

の概形を描く. 問題は, この方程式が cross term を含んでいることである.

多くの学生は, cross term がない 2 次曲線の概形を描ける. そこで, 私は, 平方完成すれば cross term を消すことができるということを指摘して, 実際に平方完成して cross term を消してみせた. 次に, 平方完成を, 1 次変換による平面の座標変換と考えることができるということを指摘した. 座標変換によって新しい座標系に移ると, 一般には曲線の合同の意味で形が変ってしまうことを例で見せた. こうして, 合同の意味で曲線の概形を知るには, 平方完成しても形が変らない 1 次変換を探さなければならないことを納得してもらった. このような座標変換は直交変換であることを, 3 角形の合同条件から導いて見せた. 演習では, これらのことを教師がやってみせるのではなく, すべて学生がやるのが良いのだろうが, 私の時間配分が下手くそで理想は果たせなかった. ここまでは（本当はそうするべきではないが）私がやっておいて, 1 年生の試験問題として出す予定の問題を解いた.

(i) (x, y)-座標系を角度 θ だけ回転して得られる座標系を (u, v)-座標系とする．このとき，これらの座標系

の間には

$$\begin{cases} u = x\cos\theta + y\sin\theta, \\ v = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

の関係がある．このことを証明しなさい．
(ii) (i) の座標変換 $(x, y) \mapsto (u, v)$ において角度 θ をうまく選ぶことによって 2 次形式

$$2x^2 - 2\sqrt{3}xy$$

を平方完成しなさい．

何とか, 時間内に１１名の出席者全員がこの問題を解き, はじめの曲線の絵が描けた．この問題の背景にある幾何学を理解してもらうために, cross term を消すときに何が起きているかを, x, y の一般的な 2 次式に (i) を代入して cross term $= 0$ の式を導かせた．いろいろとヒントを示唆しながら待っていたら, 何人かの学生が既に習った Lagrange の未定乗数法との関連に気づいた．長くなるので以下どのように演習をすすめたかは省略する．このテーマひとつで２時間の演習の時間を全部使った．それでも, 教師がやらないで学生がやる方が望ましいことが多くあった．

科目名　**数学基礎 IV**　　**担当教官**　**浪川 幸彦**

サブタイトル　線型代数学

対象学年　**１年**　　**1.5 単位**　**必修**

教科書　「線型代数入門」齋藤正彦著
参考書

予備知識

数学基礎２の講義内容

講義内容

前期に続いて，線型代数学の基礎的な事項を学ぶ．内容は統一シラバスに従う．
具体的な講義内容は以下の通り：

1. 第４章　線型空間（７回）
   - §１．集合と写像
   - §２．線型空間（教科書と少しやり方を変える）
     - 線型空間
     - 線型写像
   - §３．基底と次元
   - §４．線型部分空間［一部分教科書と異なる］
   - §５．線型写像特に線型変換
   - §６．正規直交系
2. 第５章　固有値と固有ベクトル（２回）
   - §１．固有値と特性根
   - §２．対称行列とその対角化（教科書§２ ·§３）
   - §３．２次曲線・２次曲面［教科書§５］

講義の感想

教科書が全く学生に理解できなかったようなのには驚いた．数学の文章が読めないのだ．

また学習態度が受け身であって，自分が勉強しないから理解できないのを，こちらが教えていないからだと言って恥じない．教官を予備校の教師と思っているのではないだろうか．

科目名　数学基礎 IV　　**担当教官**　青本 和彦

サブタイトル　線形代数

対象学年　１年　　**1.5 単位　必修**

教科書

中岡稔. 服部晶夫，線形代数入門，紀伊国屋書店

参考書

予備知識

前期の講義内容

講義内容

(1) 2 次元 3 次元ユークリッド空間上の線形変換と行列による表示，線形変換の合成と行列の積との関係

(2) 内積と対称行列，歪対称行列，直交行列の定義およびそれらの基本的性質

(3) 正則行列とその逆，行列式との関係

(4) 基底の変換と相似な行列

(5) 固有値と固有ベクトル，その計算法

(6) 正方行列の対角化と固有値

講義の感想

線形代数を 2 次元 3 次元にかぎって行った．講義を通じて，できる限り平易に解説を心がけた．行列計算になれることを主眼とするためである．

科目名　数学展望 II　　**担当教官**　斎藤 秀司

サブタイトル　代数方程式と作図問題

対象学年　１年　　**２単位**　選択

教科書　特に指定しない．ただし演習問題集を配布
参考書　高木貞治，代数学講義, 共立出版
高木貞治，初等整数論講義, 共立出版

予備知識

特に仮定しない

講義内容

高校までの数学では与えられた問題が解けることを示すことを目的としてきた．この講義では代数方程式と作図問題を取り上げ，ある問題にしかるべき解答を与えることがことが不可能であることを示す数学の深さを味わってもらうことを目的とした．また作図問題という純粋に幾何の問題を方程式論の中で展開するのは多くの学生にとってはこれまで触れたことのない数学的観点であろう．彼等にとってはあたらしい数学的発想を味わってもらうことができたと思う．具体的には次の内容について解説した．また講義の内容に即した問題集を初回の講義の時に配ったので添付しておく．

1. 複素数とガウス平面.

2. 1 のべき乗根の極形式表示.
   1 と 2 は高校の復習のつもり.

3. 複素数と初等幾何.
   初等幾何を複素数を使って示すこと．添付した問題を参照.

4. 作図問題と 2 次方程式.
   あらかじめ与えられたガウス平面上の点から出発して定規とコンパスを使ってある点が作図できることと対応する複素数が 2 次方程式を繰り返し使って解く事が同値であることを示す.

5. 正 17 角形の作図.
   $X^{17}-1=0$ を実際に 2 次方程式を 4 回繰り返し解くことにより代数的に解放する．講義ではあらすじを説明して実際には学生に自分の手を使って解くことをレポートにしたが楽しんでいたようである.

6. 体の概念の導入.
   作図問題を通して体 (複素数の部分体) の概念が自然に導入される．0 と 1 から出発して作図できる複素数全体を考えるとこれは体になる.

7. 体の次元.
   丁度この頃，線型代数の講義で基底の概念を説明したと聞いたのでよいチャンスだと思った．1 年生

にとっては難しいかと思われたがレポートを出させたところ以外に理解できていたようである．

8. 1 の原始 n 乗根と円分多項式と円分体．
   円分多項式を定義し，$X^n - 1 = 0$ が円分多項式を使って有理数体上の既約多項式の積に分解することを示す．このような具体的な問題を通して多項式が規約であるという概念が定義されそれが考えている基礎体に依存することなども説明した．

9. オイラーの関数と正 n 角形の作図可能性．
   上のことを使い正 n 角形の作図可能性にとって $\varphi(n)$ が 2 のべきになることが必要であることが説明できる．これにより例えば正 7 角形が作図できないことが示される．

予定ではこのあと 5 次方程式の代数的解法の不可能性を解説するはずであったがかなり数学熱心な学生も数多くいたこともあり，無謀かとも思ったが志村ー谷山予想とフェルマー予想の解説をしてしまった．これにはさすがに多くの学生が呆然としていたようだがお話としては楽しんでいただけたようである．また何人かの学生がこの題材についても熱心に質問してきたり，もっと時間をかけて詳しく説明して欲しかったと言ってきたのは嬉しかった

講義の感想

熱心に聞いてもらって講義を楽しめた．もっともっと質問してほしい！

参考資料

演習問題 I

問題 1. $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ を頂点とする三角形が正三角形であるための必要十分条件は次で与えられることを示せ．

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha = 0.$$

問題 2. $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ を頂点とする三角形の面積は次で与えられることを示せ．

$$\frac{1}{4}|(\beta - \alpha)(\overline{\gamma} - \overline{\alpha}) - (\gamma - \alpha)(\overline{\beta} - \overline{\alpha})|$$

問題 3. 4 点 $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ が同一円周上にあるための必要十分条件は $\dfrac{\alpha - \gamma}{\alpha - \delta}\dfrac{\beta - \gamma}{\beta - \delta}$ が実数であることを示せ．

問題 4. 次の事実を複素平面を使って示せ．

(1) 円に内接する 4 角形 $ABCD$ にたいし $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$ が成り立つ．

(2) 同一の円周上にある 4 点から 3 点をとって作る 3 角形の垂心は同一円周上にある．

問題 5. n を自然数とし $\zeta = \cos\dfrac{2\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\dfrac{2\pi}{n}$ とおく．このとき

$$(1 - \zeta)(1 - \zeta^2)\cdots(1 - \zeta^{n-1}) = n$$

を示せ．

問題 6.　n を自然数とし $(1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots a_nx^n$ とするとき，次を示せ．

$$a_0 - a_2 + a_4 - a_6 \cdots = 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4},$$
$$a_1 - a_3 + a_5 - a_7 \cdots = 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}.$$

問題 7.　n を自然数，θ を実数とし $z + 1/z = 2\cos\theta$ とするとき $z^n + 1/z^n$ を θ を用いて表せ．

問題 8.　n を自然数とするとき，次の方程式の根を複素数の範囲で全て求めよ．

(1) $x^n - \binom{n}{1}x^{n-1} - \binom{n}{2}x^{n-2} - \cdots - 1 = 0.$

(2) $\binom{n}{1}x + \binom{n}{3}x^3 + \binom{n}{5}x^5 + \cdots + \begin{cases} \binom{n}{n}x^n & (n:\ \text{odd}) \\ \binom{n}{n-1}x^{n-1} & (n:\ \text{even}) \end{cases} = 0.$

演習問題 II

問題 1.　次式を示せ．

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 - \cos\frac{2\pi}{7}x + 1)(x^2 - \cos\frac{4\pi}{7}x + 1)(x^2 - \cos\frac{6\pi}{7}x + 1).$$

問題 2.　$\zeta = \cos\frac{2\pi}{7} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{7}$ とする．ζ, ζ^2, ζ^4 を 3 根とする 3 次方定式を求めよ．

問題 3.　$\cos\frac{2\pi}{7}$ を根に持つ有理数係数の 3 次方定式を求めよ．

問題 4.　3 次方定式 $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ の判別式を $D = (x_1 - x_2)^2(x_2 - x_3)^2(x_3 - x_1)^2$ で定義する．ただし x_1, x_2, x_3 は方程式の 3 根である．このとき

$$D = a_1^2a_2^2 - 4a_2^3 - 4a_1^3a_3 - 27a_3^2 + 18a_1a_2a_3$$

であることを示せ．

問題 5.　円分多項式 $\Phi_{36}(X)$ を求めよ．

問題 6.　$\varphi(n) = n/3$ なる n をすべて求めよ．

問題 7.　$\varphi(n) = 12$ なる n をすべて求めよ．

問題 8.　正 n 角形が作図可能な $n \leq 30$ をすべて求めよ．

問題 9.　自然数 n にたいし

$$f(n) = \sum_{\substack{1\leq x\leq n \\ (x,n)=1}} x^2, \quad g(n) = \sum_{\substack{1\leq x\leq n \\ (x,n)=1}} x^3$$

とおく．ただし x は自然数を表す．このとき

$$f(n) = \frac{\varphi(n)}{6}(2n^2 + (-1)^r p_1 p_2 \cdots p_r)$$

$$g(n) = \frac{\varphi(n)}{4}(n^3 + (-1)^r n p_1 p_2 \cdots p_r)$$

を示せ．ここで $p_1, p_2, \ldots, p_r$ は n の相異なる素因子のすべてである．

科目名　数学演習 II　　**担当教官**　浪川 幸彦

サブタイトル

対象学年　１年　　**２単位**　選択

教科書　なし
参考書

予備知識

前期講義内容

講義内容

数学展望，微分積分学および線型代数学の講義で出された問題を中心に演習を行った．
それぞれの講義の内容は次の通りである

1. 数学展望：円分体の理論
2. 微分積分学：多変数の微分積分
3. 線型代数学：ベクトル空間と線型写像，固有値と固有ベクトル

講義の感想

学生の態度はまじめであったが，積極的な学生でも基本的な事項を余りよく理解していないことに驚かされた．
また前期に習った事項を十分理解していないために，問題が解けない場合が多い．

科目名　　数学演習 II　　　**担当教官**　木村 芳文

サブタイトル

対象学年　　１年　　　**２単位**　　**選択**

教科書　　特になし
参考書　　特になし

予備知識

特に仮定しない

講義内容

前期に試験的に始めた少人数クラスの演習を後期にも受け持った．抽象的な数学に進む前段階として具体的なイメージを数学に対して大掴みで持ってもらうことを目標にして今期は多変数の微積分の基礎を解説し，問題を解くことで理解を深めていくように指導した．具体的内容としては

1. 多変数関数の連続性
   (a) 多変数関数の定義
   (b) 1 変数関数との違い（曲線と曲面，近さの意味）
2. 多変数関数の微分
   (a) 偏導関数の意味
   (b) 勾配ベクトル
   (c) Taylor 展開
3. 曲面と接平面
   (a) 平面の方程式
   (b) 3 次元のベクトル積
   (c) 接平面の導出（(１) Taylor 展開（２）偏導関数 $\rightarrow$ ベクトル積（３）勾配ベクトル）
   (d) 方向ベクトル
4. 多変数関数の極値
   (a) ２変数関数の極値の分類
   (b) Hess 行列の定義と意味
   (c) 条件付き極値問題
   (d) Lagrange の未定乗数法の定義とその意味

などをゆっくりと解説し重要な問題を時間を与えて考えてもらい前に出て説明をしてもらうようにした．８月から赴任した糸健太郎助手に補助をお願いし問題解法の際のアドバイスや講義の代講をお願いした．

講義の感想

前期はある程度教官内の話し合いを行うとともに授業との連携を念頭においたが後期は担当教官に全面的に任せる形をとった．前期同様，出席状況や学生の反応を見る限りかなりの手ごたえを感じた．少人数クラス演習はある意味では非常に贅沢な授業形態であるが，今回の試みがある程度の効果を上げるのであれば研究科の理解が得られる限り積極的に続けることが重要だと思う．学科分属における少人数演習の成果についてモニターして頂きたいと思う．

科目名 **数学演習 II** **担当教官 佐野 武**

サブタイトル

対象学年 **１年** **２単位** **選択**

教科書 特に無し
参考書 特に無し

予備知識

特に仮定しない

講義内容

具体的な講義内容は以下の通り：

1. 線形代数（５回）基本変形，連立１次方程式，１次独立 (従属)，基底，部分空間，シュミットの正規直交化法，線形写像，行列表現，基底変換
2. 微分積分（５回）2 変数関数の連続性，偏微分，Jacobi 行列，高階微分，テーラー展開，極大 (小)，極点の判定法，偏微分方程式，偏微分方程式の解，重積分の計算法

講義の感想

参考資料

試験問題

小問１つ１０点満点．[ ] 内は平均点です．

線形平均点	26.3/50
微分平均点	34.7/50
全体の平均点	61/100

問題 1． $\mathbf{R}^4$ の部分空間，ベクトルを次のように定義する．

$$V = \langle a_1, a_2 \rangle, \quad a_1 = (1, 0, 2, -1), \quad a_2 = (3, 1, 2, 0)$$
$$W = \langle a_3, a_4 \rangle, \quad a_3 = (5, 2, 1, 2), \quad a_4 = (-1, -2, 3, -2)$$

このとき次の空間の基底および次元を求めよ．

(1) [7.8] V, W

(2) [6.3] $V + W$

(3) [3.2] $V \cap W$

問題 2.　3 次以下の実数係数多項式全体のなす線型空間を $V = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 |\ a_i \in \mathbf{R}\}$ とおく.

(1) [6.7]　$f : V \to V;\ f(g) = g + g'$ によって定義される写像 f は、線形写像であることを確かめよ.

(2) [2.4]　V の基底を $\{x^3, x^2, x, 1\}$ としたとき，f の表現行列を求めよ.

問題 3.　$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ とおく．但し $\det A \neq 0$ とする．このとき関数 $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ を考える.

(1) [8.6]　この関数の停留点を求めよ.

(2) [6.8]　$a > 0$ かつ $\det A > 0$ ならば停留点は極小点となり，$a < 0$ かつ $\det A > 0$ ならば停留点は極大点となることを示せ.

(3) [6.1]　次の関数の極点を求め，それが極大点か極小点かを判定せよ.

$$f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

問題 4.

(1) [6.2]　極座標表示 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ において，$xz_x + yz_y = 0$ ならば，z は，角度 θ だけの関数であることを示せ.

(2) [7.0]　２つの曲線 $y = x^2$ と $y^2 = x$ が囲む領域を E とするとき，次の重積分を求めよ.

$$\iint_E y d(x,y)$$

科目名　数学演習 II　　**担当教官**　糸 健太郎

サブタイトル

対象学年　１年　　**２単位**　選択

教科書
参考書

予備知識

特に仮定しない

講義内容

私は木村先生のクラスに参加し，その補助をした.（木村先生が出張の時だけ私が代わって解説をし，そうでないときは生徒が問題を解いているときに見回りをして，個人的にアドバイスを与えた.）内容は多変数（主に２変数）の微積分の初歩の解説および演習である．連続性の定義，偏微分の定義，テイラー展開，曲面の接平面，曲面の極値問題（ヘッシアン），条件付き極値問題（ラグランジュの未定乗数法），最後にベクトル場（グラジエント）の線積分に触れた.

講義の感想

最後まで出席率もよく，問題を与えれば熱心に解いていた．講義とはまた違った雰囲気の数学に触れるという意味では，非常に良かったと思う.（ただしこれは木村先生の講義の上手さに負うところが大きい.）

科目名　**代数学序論**　　**担当教官**　**齊藤 博**

サブタイトル　代数系の初歩

対象学年　**２年**　　**４単位**　**必修**

教科書　松阪和夫著 代数系入門・岩波書店
参考書

予備知識

特に仮定しない

講義内容

代数系の初歩.
具体的な講義内容は以下の通り：

- 最大公約数，最小公倍数，素因数分解
- 合同式，中国剰余定理，Euler の φ，Euler の定理
- 群とその例
- 部分群
- 剰余類
- 正規部分郡，商群
- 群の作用
- 共役，巡回群，置換群
- 環とその例
- 準同型，剰余環，イデアル，準同型定理
- 分数体の構成，体上の一変数多項式環のイデアル

講義の感想

洩れ伝え聞いた話によると定義などが多すぎて消化不良を起こし，前期の「集合と位相」と共に最も分からない講義ということであった．演習の様子などを見ていて，途中で（内容を削って）もっと緩っくり進んだ方が良いかなとも思ったが，方針転換を決断する前に終わりになってしまった．

参考資料

試験問題　2001.02.02

次の４問に解答せよ．ただし，一問は解答用紙１枚（裏も可）に解答すること，解答用紙毎に学籍番号と名前を書くこと．

1. 環 $\mathbf{Z}/16\mathbf{Z}$ の可逆元全体 $(\mathbf{Z}/16\mathbf{Z})^*$ の作る群の乗積表を作り，各元の位数を求めよ．

2. 群 $\mathbf{Z}$ から３個の群の直積への準同型写像

$$f : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}, x \mapsto (x \bmod 2, x \bmod 3, x \bmod 5)$$

について，

(i) 核 $\ker f$ を求めよ．

(ii) 全射であることを示せ．

(iii) ３個の元 $e_2 = (\bar{1}, \bar{0}, \bar{0})$, $e_3 = (\bar{0}, \bar{1}, \bar{0})$, $e_5 = (\bar{0}, \bar{0}, \bar{1}) \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$ を考える，ここで，$\bar{?}$ は $? \bmod ??$（$?? = 2, 3, 5$ は位置によって変わる）を表す．$A_2 = \{x \in \mathbf{Z}; f(x) = e_2\}$, $A_3 = \{x \in \mathbf{Z}; f(x) = e_3\}$, $A_5 = \{x \in \mathbf{Z}; f(x) = e_5\}$ を求めよ．

(iv) 次の合同式を充たす整数 x, y の組を全て求めよ．

$$x + y \equiv 1 \pmod 2, \quad x + 2y \equiv 2 \pmod 3, \quad x + 4y \equiv 3 \pmod 5.$$

3. 平面上に正方形 ABCD がある．正方形を自分自身に動かす（裏返しを含む）運動全体のつくる群を G とする．特に頂点 A, B, C, D を B, C , D, A に重ねる回転を σ, 頂点 A, B, C, D を A, D, C , B に重ねる裏返しを τ とする．もちろん，e は恒等変換を表す．

(i) $\sigma^4 = e$, $\tau^2 = e$, $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}$ を示せ．

(ii) G の全ての元を列挙し（σ, τ の積で書け）それらの位数を求めよ．

(iii) G のすべての部分群を求めよ．

(iv) G のすべての正規部分群を求めよ．それ（ら）は同型を除き（互いに同型な群を同じとみなした時）何個あるか．

(v) (iv) で求めた各正規部分群による G の商群は，どんな群か．また，それ（ら）は同型を除き（互いに同型な群を同じとみなした時）何個あるか．

4. N を有限群 G の正規部分群で N の位数 $|N| = n$ と指数 $(G : N)$ は互いに素とする．

(i) $x^n = e$ を充たす $x \in G$ に対して，$x \bmod N \in G/N$ の位数が 1 であることを示せ．

(ii) $N = \{x \in G; x^n = e\}$ を示せ．

再試験問題　2001.02.13

次の 3 問に解答せよ．ただし，1 問は解答用紙１枚（裏も可）に解答すること，解答用紙毎に学籍番号と名前を書くこと．

1. 環 $R = \mathbf{Z}/20\mathbf{Z}$ の中の零因子（$a \in R$: $\exists b \in R, \neq 0\,(ab = 0)$）と，巾零元（ $a \in R : \exists n \in \mathbf{Z}_{>0} : a^n = 0$）を全て求めよ．

2. 加法群 $\mathbf{Z}$ から群の直積 $\mathbf{Z}/5\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$ への準同型

$$f : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}/5\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/7\mathbf{Z}, \quad x \mapsto (x \bmod 5, x \bmod 6, x \bmod 7)$$

について，

(i) その核 $\ker f$ を求めよ．

(ii) 集合

$$A_5 = \{x \in \mathbf{Z}; f(x) = (\bar{1}, \bar{0}, \bar{0})\}, \quad A_6 = \{x \in \mathbf{Z}; f(x) = (\bar{0}, \bar{1}, \bar{0})\}, \quad A_7 = \{x \in \mathbf{Z}; f(x) = (\bar{0}, \bar{0}, \bar{1})\}$$

を求めよ．ここで，$\bar{?}$ は，? の属する（それぞれ位置によって意味の異なる）同値類を表す．

(iii) 次の（連立）合同式を充たす $x, y \in \mathbf{Z}$ を（全て）求めよ．

$$x + y \equiv 1 \pmod 5, \quad x + 2y \equiv 2 \pmod 6, \quad x + 4y \equiv 3 \pmod 7.$$

3. （３次元）空間にある立方体をそれ自身に移す運動全体のつくる群を G とする．G の運動は，立方体の８個の頂点と中心を結んで出来る４本の対角線の置換を引き起こし，群の準同型 $\varphi : G \longrightarrow S_4$ を定義する（S_n は，n 個の文字の置換全体のつくる群）．例えば，立方体の一辺の中点と立方体の中心を結ぶ直線の周りの１８０°回転は，その辺の両端を通る２本の対角線を交換し，残りの２本の対角線を動かさない．また，立方体の全ての面に平行または垂直なように３本の（直交）座標軸（向きを無視する）を取ると G の運動は，３本の座標軸の置換を引き起こし，群の準同型 $\psi : G \longrightarrow S_3$ を定義する．さらに，φ が単射であること（即ち４本の対角線を動かさない運動は恒等変換のみ）を仮定してよい．（次の解答順は順不同でよい．）

(i) G の位数を求めよ．

(ii) $\ker \varphi$ の位数を求めよ．そしてその各元の位数を求めよ．[← 大失敗，$\ker \psi$ の誤り]

(iii) $S_4/\{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \cong S_3$ （同型）を示せ．

科目名　解析学要論　**担当教官**　太田 啓史

サブタイトル　多変数関数の微積分とその応用

対象学年　２年　**４単位**　**必修**

教科書
参考書　俣野 博著　微分と積分３・岩波講座 現代数学への入門（岩波書店）

予備知識

２年前期までの必修科目（微分積分学，線形代数学の基本的事項（数学基礎Ｉ～ＩＶ）抽象ベクトル空間，解析学序説，集合と位相）は既知とする，と授業案内には書いたが授業中に何度も復習した.

講義内容

多変数関数の微分法，特に陰関数定理を中心テーマにすえ，その意味や運用，制限極値問題への応用を述べ，あわせて曲線曲面論への入門的な話しもした．陰関数定理の証明を縮小写像の原理に基づき行い，それに続けて「縮小写像の原理」は数学の中で大切な考え方の一つであろうという考えのもとで，それにまつわるいくつかの初等的な話題にもふれた.

具体的な講義内容は以下の通り：

1. (1) 陰関数定理（３回）
   - 1.1)　動機，2 変数の例（微分の消える所，消えない所，両方の微分の消える例，独立変数と従属変数，局所的な問題であることの注意，陰関数の微分の計算，合成関数の微分の復習）.
   - 1.2)（２変数１関係式）陰関数定理，例，微分の条件の意味.
   - 1.3)（多変数１関係式）陰関数定理，勾配ベクトル.
   - 1.4)（多変数で複数の関係式がある場合の）陰関数定理，独立な関係式の個数と独立変数の個数，ヤコビ行列，陰関数の微分の計算例.
   - 1.5)　演習３題（1.2)，1.3)，1.4) それぞれの場合の陰関数の存在の判定とその時の陰関数の微分の計算).
   - 1.6)　逆関数定理（逆関数の定義，定理，証明，例，局所的に逆があっても大域的には逆はない例).
2. (2) 陰関数定理の応用—制限極値問題—（３回半）
   - 2.1)　制限なし極値問題の復習（1 変数，2 変数，多変数の場合，対称行列についての復習，ヘッシアンの固有値の正負と関数の増減との関係の幾何学的理解，2 変数（多変数）のテーラー展開の復習)．演習.
   - 2.2)　制限極値問題.（極値を与える候補の点を求める＝＞ラグランジュの未定乗数法，その証明，幾何学的意味，計算例，最大最小，陰関数について 2.1) に帰着し候補の点が極大か極小か

を調べる．途中で，線形写像の核や次元公式を知らないと言う人が多数いたので核，像，ランクとの関係，次元公式などの復習を行い，今やっていることとの関係をくり返し説明した)．ラグランジュ未定乗数法の演習．

- 2.3)　お話として，せっかくでた極値以外の点を捨ててしまうということはせずに，その情報も何か意味はないか，ということで，ヘッセ行列の負の固有値の個数とオイラー数との関係を２次元球面，２次元トーラスの場合にいくつかの関数で計算してみて関数によらず定義域の幾何学的な不変量が出てくることを話した．
- 2.4)　制限極値問題の演習．（候補の点を求め，その近くで独立変数と従属変数を陰関数定理で見極め，独立変数に関するヘッセ行列を計算し，極大極小をしっかり判定する．）
- 2.5)　球面上の 2 次形式の最大最小．（最大固有値最小固有値，固有ベクトルの意味，線形代数による証明との比較）．

3. 中間試験 （１回）
   - 多変数テーラー展開，ヘッセ行列の固有値の正負と関数の増減の理屈．
   - 陰関数の微分．
   - 制限極値問題．
4. (3) 曲線と曲面　（１回半）
   - 3.1)　滑らかな曲線（定義，例，反例，正則パラメータ，関数のゼロ点集合が滑らかな曲線になる条件（陰関数との関係），接空間，意味，例，法ベクトル，関数のゼロ点集合で定義された曲線の場合の接空間と法ベクトルを具体的に求める．勾配ベクトルとの関係)．
   - 3.2)　滑らかな曲面（定義（ヤコビ行列の階数が 2 である局所座標の存在)，例（２次元球面の場合に局所座標を具体的に与えた)，関数のゼロ点集合が滑らかな曲面になる条件（陰関数ちに関係)，局所座標のヤコビ行列の階数が 2 であることから，逆関数定理により，２つの局所座標の間に C^∞ 微分同相写像が存在すること．その意味．接空間（局所座標のヤコビ行列の像として定義)，法ベクトル，例，関数のゼロ点集合で定義された曲面の場合の法ベクトルを具体的に求める，勾配ベクトルとの関係，勾配ベクトルと呼ばれる所以)．$f(x,y)$ が (a,b) で極値をとるとき，f のグラフで定まる曲面の $(a,b,f(a,b))$ における接平面が (x,y) 平面に平行であることの再確認．
5. (4) 陰関数定理の証明と縮小写像の原理（２回）
   - 4.1)　陰関数定理の証明．縮小写像の原理に帰着させること．
   - 4.2)　縮小写像の原理．$\mathbf{R}^n$ 内の円板を円板に写す写像の１階微分の大きさが定数 C で押さえられていたら，C 倍の縮小写像であることの証明．（凸集合であればよいことの注意)．縮小写像の原理の証明．（不動点の存在と一意性，コーシー列の復習，閉集合内の収束点列の極限はまたその閉集合にはいること．）
   - 4.3)　縮小写像の原理の他の応用例．（近似解と誤差の評価．連分数展開．ニュートン法．p 乗根の近似．）

講義の感想

講義時間以外でも自分で復習なりして欲しい.

科目名　関数論　**担当教官**　松本 耕二

サブタイトル

対象学年　２年　**４単位**　**必修**

教科書　高橋礼司，複素解析，東京大学出版会
参考書

予備知識

前期の数学基礎 V の続きなので，当然数学基礎 V で学んだ内容は予備知識と見なされる．

講義内容

数学基礎 V では，複素関数論の基礎事項，即ち複素積分の定義と Cauchy の積分定理，留数解析といった内容を学んだ．上記のようにこれらは原理的には予備知識と見なされるべきものである．しかし，実際には十分な消化ができていない可能性を考慮し，かなりの時間を数学基礎 V の内容の復習と演習にあてた．

即ち，全授業時間のほぼ半分を演習の時間とし，配ったプリントや講義中に出した演習問題の解答を学生に板書させ，学生自身に解説させた．配ったプリントの問題は 3 分の 2 程度が前期の数学基礎 V の範囲から出題した．

新しく講義した題材は，楕円関数 (Liouville の基本諸定理，Weierstrass のペイ関数の基本的性質)，ガンマ関数，Riemann ゼータ関数である．これらの講義中にも前期に学んだはずの内容についても (反応が悪かったりするので) 適宜復習しながら進んだ．Riemann 面の極く基本的な事項についても触れた．

講義の感想

今回採用した演習についての方針は，一つの問題については最初に黒板に書いたものが勝ち，という仕組みになるため，(授業前に書いておくように，と言ったこともあって) 学生が黒板に答案を書く時間がどんどん早くなり，ついには前日の午後にはもう黒板が埋まってしまう，という状況になっていたそうだ．既に書いてある答案を消して自分の答案を書く，などという事件も発生し，せっかく前日に答案を書いたのに当日風邪をひいて解説が出来ず，加点してもらえなかったとか，解けないので友人にドーナツをおごって答案を連名にしてもらったとかいった悲喜劇もあったらしい．また一部の意欲的な学生が何問も解くので，他の学生が一問も出来ない，と言って困る，という状況も生じた．こうした状態がだんだん私にもわかってきて，授業の後半を演習にあてたり，一人の学生が解いていい問題数を制限したり，といった対策を講じたが，どうも対応が遅すぎた感がある．

意欲的な学生には，多分積極的に参加できる面白味のある授業になったのではないかと思う．演習の答案に対して私がコメントしている時に，こういう方法ではどうか，と別解を提案してくる学生とか，答案の解説中に私に突っ込まれて立ち往生している学生がいると，自分はそこはわかります，と発言してくる学生とかがいた．しかし一方，多くの学生が，解いても誰かに先を越されてしまう，ということで苦労したようだし，特に留年組などで，早々にあきらめてしまう学生などもいたりした．自主性に任せることで積極的にな

ることを期待したのだが，どうももともと積極的な学生だけがますます積極的になり，消極的な学生の中にはかえってやる気をなくした者もいたように思われる．

あと，やはり復習が多かったので授業のペースは遅く，本当は講義したかった等角写像論などは全く扱えなかった．

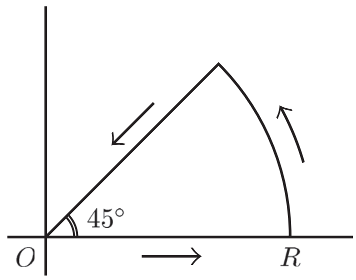
参考資料

試験問題　2001.02.07

問題 1.　右図の積分路をもちいて

$$\int_0^\infty \sin(x^2)dx = \int_0^\infty \cos(x^2)dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

であることを示せ．



問題 2.　等式　$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$

はいかなる時に正しいかを，正しい場合と正しくない場合をひとつずつ例示し，理由を明記して述べよ．（可能なら，複素関数としての $\log z$ の一般論まで解説せよ．）

問題 3.　級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(nz)}{n^2}$　$(z \in \mathbb{C})$ の収束・発散を調べよ．

問題 4.　次の実積分をもとめよ．

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9}dx$　　(ii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{1 + x^4}dx$

問題 5.　ガンマ関数の Weierstrass の表示

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{cz}\prod_{n=1}^\infty (1 + \frac{z}{n})e^{-z/n} \qquad (c : \text{Euler 定数})$$

から出発して，

(i) $\displaystyle\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\frac{1}{z} - c + \sum_{n=1}^\infty (\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n})$

(ii) $\Gamma(z)\Gamma(z + \frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\, 2^{1-2z}\Gamma(2z)$

(iii) $\Gamma(nz) = (2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} n^{nz-\frac{1}{2}}\Gamma(z)\Gamma(z + \frac{1}{n}) \cdots \Gamma(z + \frac{n-1}{n})$　　を示せ．

問題 6.　$E = \{(x, y, z) \mid x, y, z > 0,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1\}$　$(a, b, c > 0)$

とするとき，積分

$$\iiint_E x^{2p-1}y^{2q-1}z^{2r-1}dxdydz$$

の値をガンマ関数を用いて表せ．

問題 7.　位数が 0 あるいは 1 の楕円関数は存在しないことを証明せよ.（位数＝基本周期四辺形内の極の位数の和）

問題 8.　f, g が領域 D で正則で $fg \equiv 0$ ならば，D 上で $f \equiv 0$ または $g \equiv 0$ であることを示せ.

問題 9.　$f(z) = e^{1/z}$ を原点のまわりで Laurent 展開せよ.

問題 10.　Riemann のゼータ関数について知るところ，思うところを自由に記述せよ.

（以上）

（注意）この試験は総計 150 点満点で採点し，100 点以上とった者は全て「満点」とみなす.

科目名　**ベクトル解析**　**担当教官**　**藤原 一宏**

サブタイトル　物理学と線形代数の融合

対象学年　**２年**　**４単位**　**必修**

教科書
参考書　深谷賢治，電磁場とベクトル解析，岩波講座 現代数学への入門 17，岩波書店
ファインマン「電磁気学」(ファインマン物理学 III) 岩波書店

予備知識

特に仮定しない

講義内容

講義では力学，電磁気学 (特に静電場) をイメージとして持ちつつ，そして厳密性にあまりこだわらずに Gauss, Stokes の定理の説明まで行った．講義中は直感力を重視し，線形近似の考え方を強調した．高次の項を無視することで一次式の間の近似的な関係式を得る．この関係を極限操作することで和が積分に，差が微分になり，最終的には等式が得られるということは理解して欲しいポイントであった．ϵ-δ 論法を使わなかった点に不満な人もいるかもしれないが，微積分は単なる代数的な計算規則や記号操作ではないことを線形近似を通して把握して欲しいと思っている．

参考書 (深谷著) の半分ほど (電磁場に入る前) の内容を終えた．

具体的な講義内容は以下の通り：

1. ベクトル空間の復習（２回）
    - ベクトル空間の双対空間 (佐藤周友さんによる演習)
2. 平面ベクトル解析（４回）
    - Newton の運動方程式.
    - 平面でのベクトル場，線積分の定義と仕事.
    - ポテンシャル関数とエネルギーの保存.
    - 平面ベクトル場での rotation (回転)，Green の公式.
    - 平面上の form (微分形式).
3. 三次元空間と曲面（４回）
    - 三次元空間，平面の表示法 (一次式 $= 0$ とパラメータ表示).
    - ベクトルの外積，平面の法線，二つの表示法の関係.
    - 曲面の定義，接平面，関数の gradient (勾配ベクトル場).
    - 法線ベクトル場，曲面の向き.

- 面積，曲面の表面積，面積分の定義.

4. 空間ベクトル解析（３回）

- 面積分と表面積の関係.
- 空間ベクトル場の発散 (divergence)，物理的意味.
- Gauss の定理の直感的説明と数学的証明.
- 三次元空間上の form (微分形式).
- 空間ベクトル場の回転 (rotation)，Stokes の定理の説明．回転の直感的説明.
- 外積代数の初歩.

講義の感想

聴講した学生の皆さんへ:

数学は具体的で直感的なものであること，自分で問題を解いて頑張ればそれに見合った実力がつくことを実感してもらえましたか? 私にとっても皆さんと一緒に楽しめて，思い出に残る講義になりました．3 次元空間までの解析幾何にはだいぶ慣れたことと思います．この講義をステップとして，皆さんがより広い世界に踏み出していくことを期待しています.

P.S. 試験の際，感想を書いてくれた皆さんへ

今後の参考にさせてもらいます．中には私の励みになるものも少なからずありました．どうもありがとう.

参考資料

レポート　2000.12.21

以下のコース 1, コース 2 のいずれかを選び, レポートを提出すること．提出期限は 2001 年 1 月 9 日, 事務室とする．この掲示は決して取り外してはならない.

コース 1

次の問題 4 問中 2 問に解答せよ.

(1) 次の平面領域 D で定義されたベクトル場はポテンシャルを持つか．持つ場合には具体的に求めよ.

$$\mathbf{V}(x,y) = (4x^3 - 10xy^3,\ -15x^2y^2) \quad (D = \mathbf{R}^2 \text{ 全体})$$

$$\mathbf{V}(x,y) = (-e^{-x}\sin y,\ -e^{-x}\cos y) \quad (D = \mathbf{R}^2 \text{ 全体})$$

$$\mathbf{V}(x,y) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},\ \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \quad (D = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$$

(2) 講義中で述べた単位球面のパラメータ表示

$$(x,\ y,\ z) = (\cos u \cos v,\ \sin u \cos v,\ \sin v)$$

を証明せよ. また, $u \in (0, 2\pi)$, $v \in (-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2})$ の範囲で得られない球面の点はどこか.

(3) 次の $\mathbf{R}^3$ の部分集合 S は講義で述べた意味で曲面になるか. 曲面になるときにはその上の点 $P = (\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ における接平面と法線ベクトルを求めよ. 曲面にならないときはどの点を抜けば曲面になるかを示し, それ以外の点 P で同様に接平面と法線ベクトルを求めよ.

$$S = \{(x, y, z);\ x^2 - 2y^2 + 3z^2 - 4xy + 5yz - 6xz = 7\}$$

$$S = \{(x, y, z);\ x = s^2 t,\ y = st^2,\ z = st, \quad s, t \in \mathbf{R}\}$$

(4) 曲面

$$S = \{(x, y, z);\ 4x^2 + y^2 + z = 1,\ z > -3\}$$

上のベクトル場

$$\mathbf{V}(x, y, z) = (3yz + 7y + x,\ y,\ z + 3)$$

の面積分

$$\int_S \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}$$

を定義に従い直接計算せよ. ただし, S の向きは適当につけてよい.

コース 2

コース 1 では物足りない人は, ベクトル解析に出てくる公式をいくつか選び, 物理との関係を論ぜよ.

レポート 講評　2001.01.22

解答 (答のみ)

(1) 小問 1 : 考えている領域 $\mathbf{R}^2$ 全体でポテンシャル関数は存在して $5x^2y^3 - x^4 + C$ (C は任意の実数).

小問 2 : 存在しない

小問 3 : 領域 $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 全体でポテンシャル関数は存在して $\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} + C$ (C は任意の実数).

(誤解を招きやすい点があるので注意: 講義では, 力学との関係から始めたため, ベクトル場 $\mathbf{V}(x, y)$ のポテンシャル関数 ϕ とは $\mathbf{V} = -\operatorname{grad}\phi$ となる ϕ とした. 上の解答もこれに準じている. この流儀だと符号が負になるが, ポテンシャル関数が即力学でのポテンシャルエネルギーを与えるという利点がある. この問題ではあまり細かいことを言わず, $\mathbf{V} = \operatorname{grad} f$ となる f をポテンシャル関数としていてもいいことにした. ただし他の本と比較する場合には注意すること.)

(2) 後半部分のみ : $u \in (0, 2\pi)$, $v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ に対応する球面上の点は $\{(x, y, z);\ x \geq 0,\ y = 0,\ x^2 + z^2 = 1\}$ という半円を単位球面から除いた部分.

(3) 小問 1: S は至る所で曲面になる. 点 (α, β, γ) での接平面は

$$(2\alpha - 4\beta - 6\gamma)(x - \alpha) + (-4\alpha - 4\beta + 5\gamma)(x - \beta) + (-6\alpha + 5\beta + 6\gamma)(z - \gamma) + 0.$$

小問 2: S は $(0,0,0)$ 以外で曲面になる．点 (α,β,γ) での接平面は

$$-\beta(x-\alpha)-\alpha(y-\beta)+3\gamma^2(z-\gamma)=0.$$

(4)12π (向きが逆の場合は -12π).

講評

コース 1: 全体的にいうと, とても良くできていたと思う．みんな二変数以上の微積分の計算にも慣れてきたな, という印象を持った.

他人のレポートを単純に丸写し, というのも減っていて, 読んでいて気持ちがよかった．今後もレポートを作成する際には, 自分が書きたい内容をきちんと理解してから書くことを心がけて欲しい．　いうまでもないことだが, 心がけがよろしくない人は結局のところ評価がさがっていくだけである.

(1) とりあえず $\mathrm{rot}\,\mathbf{V}$ を計算して恒等的に 0 になっているかどうかを見るということは皆つかんでいるようで, 安心した．ただし, これが $\mathbf{R}^2$ のような単連結領域では十分条件であることもできれば述べて欲しい．この点まで踏み込んでいる解答もあり, 心強かった．(例えば小問 3 にでてくるような $\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ のような領域では十分条件ではない．ここまできちんと押さえているものもあり, 感心した.) 計算に自信がついてきたら, こういう理論的な側面にも目を向けて, どんどん理解を深めていって欲しい.

(2) 既に注意したが、問題の解釈にかなり誤解があったように思う．「パラメータ表示」というのは確かに曖昧な表現ではあるが, 単に与えられた表示式が $x^2+y^2+z^2=1$ を満たしているだけでは駄目である．これだけでは (u,v) を動かしていったときに球面上のどの点が本当に得られるのかがわからない．解き方は講義中に述べたので, ここでは略す.

(3) 典型的な問題であり, 出来はとても良かった．ただ細かいことではあるが, 小問 1 ではせっかく $(0,0,0)$ 以外で $\mathrm{grad}\,f\neq(0,0,0)$ となるこ とを言っているのだから, $(0,0,0)$ が S にのっていないことまで言い切って 欲しい.

Taylor 展開の一次までの項で幾何学的な接平面が決まってしまう, という線形近似の考え方にまで触れている解答もあり, 大変良かったと思う．線形近似 (C^∞-関数は局所的には一次関数に見える) と極限操作 (差 $\Rightarrow$ 微分, 和 $\Rightarrow$ 積分) を直感的に理解してもらうのがこの講義の目的の一つでもある．ぜひ講義ノートで復習しておいて欲しい.

(4) の直接計算は最後まで実行するのはかなり大変である．一つの方法では $x=s,\ y=t$ をパラメータとして使い, 適当に向きをつけると面積分は

$$\int_D(-96s^3t-24st^3+80st+4s^2+t^2+4)dsdt \quad (D=\{(s,t);4s^2+t^2<4\})$$

と変形されるので, あとは三角関数で置換して重積分を計算するといい (最初から三角関数で置換してもよい)．計算力のチェックのつもりで臨んで欲しい．重積分の変数変換公式を忘れないこと.

コース 2: 極めて少数だが, コース 2 を選んだ人がいた．非常によくまとまったものもあり, 高い評価を与えた．自分から問題を設定していく姿勢は素晴らしいと思う．気持ちの余裕ができたら, 枠組みにとらわれず勉強することをいつも目指して欲しい.

以上, 質問があれば fujiwara@math.nagoya-u.ac.jp まで.

補遺　2001.01.25

記号
ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の内積は $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, 外積は $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ で表す.

$\mathbf{R}^3$ の上のベクトル場 $\mathbf{V}$, $\mathbf{R}^3$ の向きづけられた曲面 $S \subset \mathbf{R}^3$ に対し面積分は

$$\int_S \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}$$

または

$$\int_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, dS \quad (\mathbf{n} \text{ は単位法線ベクトル場})$$

のこと. 形式的に $d\mathbf{S} = \mathbf{n}\, dS$ と思って良い.

$$S = \{\phi(u,v) = \begin{pmatrix} \phi_1(u,v) \\ \phi_2(u,v) \\ \phi_3(u,v) \end{pmatrix},\ (u,v) \in D \subset \mathbf{R}^2\}$$

とパラメータ表示されているときは法線

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u}\phi_1(u,v) \\ \frac{\partial}{\partial u}\phi_2(u,v) \\ \frac{\partial}{\partial u}\phi_3(u,v) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial v}\phi_1(u,v) \\ \frac{\partial}{\partial v}\phi_2(u,v) \\ \frac{\partial}{\partial v}\phi_3(u,v) \end{pmatrix}$$

の定める向きに関して

$$\int_D \mathbf{V}(\phi(u,v)) \cdot (\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v}) dudv$$

と計算される.

なめらかな道 $\ell : [a,b] \to \mathbf{R}^3$ に沿っての線積分は

$$\int_\ell \mathbf{V} \cdot d\ell \overset{def}{=} \int_a^b \mathbf{V}(\ell(t)) \cdot \ell'(t) dt$$

のこと.

関数 (スカラー場) f の勾配 (gradient) とは

$$\mathrm{grad}\, f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$$

で定まるベクトル場のこと.

三次元ベクトル場 $\mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3)$ の回転 (rotation) とは形式的に

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

で定まるベクトル場のこと.

発散 (divergence) とは

$$\mathrm{div}\,\mathbf{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}$$

できまる関数 (スカラー場) のこと.

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,f = 0$$

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{V} = 0$$

が成立する.

Remark. grad, rot, div は微分形式 ω に対する外微分演算 d の特別な場合で (それぞれ 0-form, 1-form, 2-form に対する演算に相当), 上記公式は $d(d\omega) = 0$ に相当する.

$\mathbf{R}^3$, 平行六面体の内部, 球の内部 (ball) などでベクトル場 $\mathbf{V}$ が与えられているとき

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{V} = 0 \Rightarrow \text{ある関数 } f \text{ があって } \mathbf{V} = -\,\mathrm{grad}\,f \quad \text{(スカラーポテンシャルの存在)}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{V} = 0 \Rightarrow \text{あるベクトル場 } \mathbf{B} \text{ があって } \mathbf{V} = \mathrm{rot}\,\mathbf{B} \quad \text{(ベクトルポテンシャルの存在)}$$

平面の Green の定理, 空間の Gauss, Stokes の定理: 各自復習のこと.

問題補遺

(1)$\mathbf{R}^3$ の中の直円柱 $\{(x,y,z);\ x^2+y^2=1\}$ と平面 $\{(x,y,z);\ x+z=1\}$ の交わりのうち $(1,0,0)$ から $(0,1,1)$ へ至る部分を ℓ とする. $\mathbf{R}^3$ のベクトル場 $\mathbf{V}(x,y,z) = (x, yz, xz^2)$ の ℓ に沿っての線積分 $\int_\ell \mathbf{V}\cdot d\ell$ を求めよ.

(2)$\mathbf{R}^3$ の中で質量 m の質点 P が力

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (3x^2y,\ x^3+z,\ y+3z^2)$$

を受けながら運動している. このとき, エネルギー保存則は成り立っているか. もし成り立っているならその形も示せ.

試験について

試験は 2 月 6 日 (火) 午後一時から四時まで (三時までになっている掲示もあるが, こちらが正しい), 509 号教室にて行う. 持ち込みは一切不可. 追試は行わない.

今後の勉強法

せっかくここまでベクトル解析を勉強したのだから, もう一歩先に踏み出して欲しい. 物理との関係に興味がある人は深谷賢治著「電磁場とベクトル解析」(岩波書店) を読み進めるといい. この講義でこの本のほぼ半分を終えた事になっているはずである. 復習もこめて, 最初から読むといいかも知れない.

より高次元の空間や, 微分形式に興味がある人は同じ著者の「解析力学と微分形式」や森田茂之著「微分形式の幾何学」(岩波書店) がある. 前者は数理物理との関連を主眼に書かれている. これらは岩波のシリーズであるため, 置いてあるところ (本屋, 図書館) も多いと思う.

曲面の詳しい性質, とくに曲面の微分幾何学が知りたければシンガー · ソープ著「トポロジーと幾何学入門」(培風館, 赤摂也 訳) が定評のある本である. 物理に興味がある人も, 曲面の知識をきちんと持っていると非常に良いと思う.

外積代数は一般論より, 幾何的な具体的な状況で勉強することを勧める.

本の読み方について: 数学の本は一人で読むより, 何人かでまとまって読む方が読みやすい. わからないことがあったら, 友達やこの研究科のスタッフにどんどん質問していこう.

以上, 質問があれば fujiwara@math.nagoya-u.ac.jp まで.

テスト　2001.02.06

以下の４問の問題全てに解答せよ (付録がついていることに注意).

(1)

a) $\mathbf{R}^2$ 全体で定義されたベクトル場

$$\mathbf{F}(x,y) = (e^x \sin y - \sin x,\ e^x \cos y)$$

と

$$\mathbf{G}(x,y) = (3x^2y^2 + 3y,\ 2x^3y + 2x - 4y^3\ )$$

それぞれに対してポテンシャル関数は存在するか. 存在するときは具体的に求めよ.

b) 平面上の質量 m の質点 P が a) で定義される力 $\mathbf{F}$ を受けて運動している. このとき, Newton の運動方程式を書き, エネルギー保存則が成り立つかどうかを論ぜよ. ただし, 時刻を t, P の時刻 t での位置ベクトル $\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{X}(t) = (x(t), y(t))$ とする.

(2) 次の $\mathbf{R}^3$ の図形 S_1, S_2 に対し講義中に述べた意味で曲面になるかどうかを論じ, 曲面になっている場合はその上の点 $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ での接平面を, なっていない場合はどの点を除外すれば曲面になるかを示し, 除外点以外の点 $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ での接平面を求めよ.

$$S_1 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \phi(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos u \cos v \\ \frac{1}{3}\sin u \cos v \\ \sin v \end{pmatrix},\ u \in (0,\ 2\pi), v \in (-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2})\}.$$

$$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3; \quad (x-1)^3y^2 + 1 = 0\}.$$

(3)

a) $\mathbf{R}^3$ で定義されたベクトル場

$$\mathbf{V}(x,y,z) = (3x^2 + y,\ 4y + x,\ 1)$$

を以下の二つの道

$$\ell_0 : [0,\ 1] \to \mathbf{R}^3, \quad \ell_0(s) = (s,\ s,\ s)$$

と

$$\ell_1 : [0,\ 1] \to \mathbf{R}^3, \quad \ell_1(t) = (t,\ t^2,\ t^3)$$

に沿って定義に従って線積分せよ.

b) 上で求めた ℓ_0 に沿っての積分値を A, ℓ_1 に沿っての積分値を B とするとき $A - B$ の値を計算し, 何故その結果になるのかを説明せよ.

(4)

a) 面積分と体積分の間に成立する Gauss の定理を述べ, 簡単に説明せよ.

b) $\mathbf{R}^3$ の曲面

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ 4x^2 + 9y^2 + z^2 = 1\}$$

に適当に向きを与えて, 次のベクトル場

$$\mathbf{V}(x, y, z) = (2x,\ y,\ z)$$

の面積分の値を求めよ.

付録 1

講義に対する感想を聞かせてください.

付録 2

記号集:

記号

ベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ の内積は $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, 外積は $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ で表す.

$\mathbf{R}^3$ の上のベクトル場 $\mathbf{V}$, $\mathbf{R}^3$ の向きづけられた曲面 $S \subset \mathbf{R}^3$ に対し面積分を

$$\int_S \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}$$

または

$$\int_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\ dS \quad (\mathbf{n}\ \text{は単位法線ベクトル場})$$

で表す.

なめらかな道 $\ell : [a, b] \to \mathbf{R}^3$ に沿っての線積分は

$$\int_\ell \mathbf{V} \cdot d\ell \overset{def}{=} \int_a^b \mathbf{V}(\ell(t)) \cdot \ell'(t) dt$$

のこと.

テスト 講評　2001.02.08

解答例 (答のみ)

(1) a) : 考えている領域 $\mathbf{R}^2$ 全体でベクトル場 $\mathbf{F}$ のポテンシャル関数は存在して $-e^x \sin y - \cos x + C$ (C は任意の実数).

G のポテンシャル関数は存在しない.

(以前に注意したが, 講義では, 力学との関係から始めたため, ベクトル場 $\mathbf{V}(x,y)$ のポテンシャル関数 ϕ とは $\mathbf{V} = -\operatorname{grad}\phi$ となる ϕ とした．上の解答もこれに準じている．この流儀だと符号が負になるが, ポテンシャル関数が即力学でのポテンシャルエネルギーを与える．これは流儀の問題であるので, もちろん $\mathbf{V} = \operatorname{grad} f$ となる f をポテンシャル関数としていてもいいことにした.)

b) 運動方程式は

$$\begin{cases} m\frac{d^2}{dt^2}x(t) = e^{x(t)}\sin y(t) - \sin x(t) \\ m\frac{d^2}{dt^2}y(t) = e^{x(t)}\cos y(t) \end{cases}.$$

エネルギー保存則は成り立っており,

$$E(t) = \frac{1}{2}m(x'(t)^2 + y'(t)^2) - e^{x(t)}\sin y(t) - \cos x(t)$$

は時刻 t によらず一定である.

(2) S_1, S_2 は共にいたるところ曲面になる．S_1 の (α,β,γ) における接平面は

$$4\alpha(x-\alpha) + 9\beta(y-\beta) + \gamma(z-\gamma) = 0,$$

S_2 の場合は

$$3\beta(x-\alpha) + 2(\alpha-1)(y-\beta) = 0.$$

(3) a) $A = B = 5$, $A - B = 0$.

b) $\operatorname{rot}\mathbf{V} = (0,0,0)$ となるため, Stokes の定理から $\mathbf{R}^3$ では線積分値は始点と終点にしかよらない．より直接的には, $\mathbf{V} = \operatorname{grad} f$, $f(x,y,z) = x^3 + xy + 2y^2 + z$ と書け, ポテンシャル関数をもつため, 線積分値は始点と終点だけにしかよらない.

(4) a) $\mathbf{R}^3$ 内の曲面 S で囲まれた領域 D, C^∞-ベクトル場 $\mathbf{V}$ に対し

$$\int_S \mathbf{V}\cdot d\mathbf{S} = \int_D \operatorname{div}\mathbf{V}dxdydz$$

が成り立つ．直感的にいうと, 右辺の divergence の体積分は D 内からの (風量などの) 湧き出し量を表しており, 左辺の面積分は面 S を通り外に流れ出す量を表している．二つの量が等しいことは直感的には明らかである. 数学的に厳密な証明は微積分の基本定理を繰り返し使うことで得られる.

b)$\frac{8\pi}{9}$ (向きが逆の場合は $-\frac{8\pi}{9}$).

講評

レポートに引き続き, とても良くできていたと思う．きちんと答えがでていない人も, でたらめを書いている人はあまりいなかった. もうちょっと勉強できていたらもっと解けたのに, と思った人も多かったのではないだろうか.

(1) エネルギー保存則を導くところまではなかなかうまくいっていなかったけれど, レポート問題にもあったタイプなので皆さん準備されていたと思う. rotation を計算するのはいいのだが, ポテンシャル関数を求

めるときの議論がややあやふやな人もいた. 基本的なことは出来るようになっているのだから, ステップアップしてきちんと議論できるようにしよう.

運動方程式は (質量) · (加速度) = (力) を表したものである. $\mathbf{F}$ にポテンシャル関数があるため, (全エネルギー)= (運動エネルギー) + (ポテンシャルエネルギー) は講義中に述べたように保存する. ただ, 解答で述べたような具体的な形まで書ききっていない人も多く, できればもう一歩突っ込んで欲しかった.

(b) にはまだ苦手意識を持っている人も多いようだが, せっかくポテンシャル関数が求められるようになったのだから, もう一踏ん張りしてマスターしてしまおう.

注. $x(t)$, $y(t)$ を t の具体的な初等関数で書き表すことは難しい. コンピュータを使った数値解法しか出来ないが, たとえ具体型が解らなくてもエネルギー保存則は成り立っている (!) ことに注意しておく.

(2) この問題も皆さん良くできていた. 実は S_1 は楕円面 $\{(x, y, z); 4x^2 + 9y^2 + z^2 = 1\}$ の開集合になっているので, このことを使った方が実はやさしい. もちろん接平面の同値な書き方は全てよしとしたが, パラメータ表示で書くと長くなってしまうので, あまり推奨はしない.

S_2 が曲面になってしまうのは少しひっかけぽかったかもしれない (でも, うれしいことに気づいた人の方が多かった).

(3) a) は非常にやさしかったので, ほとんどの人は出来ていた.

その一方, b) の方はあまり出来が良くなかった. 3 次元空間での線積分はあまりやらなかったので, 仕方がないとは思うのだが.

とにかく, $\mathbf{R}^2$ でも $\mathbf{R}^3$ でも, ベクトル場の線積分の値がどんな道に関しても始点と終点にしかよらないための必要十分条件はポテンシャル関数をもつことで, そのための判定条件は rotation が 0 になることである. このことをきちんと確認しておこう.

(4) ガウスの定理については講義でも大分やったし, 解答にも書いたとおりである. ここまで勉強の手が回らなかった人もいたが, 知っていると b) が簡単に解けたはず. b) では S から曲線を抜いたもののパラメータ表示が (2) の S_1 であることに気づいた人も多かったようだ. パラメータ表示を使った直接計算はかなり大変である.

実は, S で囲まれる楕円体 D とベクトル場 $\mathbf{V}$ にガウスの定理を使うと, 問題の面積分は (外向きの単位法線ベクトルで S に向きをいれると)

$$4\int_D dxdydz = 4 \cdot (D \text{ の体積})$$

となるので, 体積計算に帰着される. ここから実際に積分した人もいたが, 変数変換 $x = \frac{u}{2}$, $y = \frac{v}{3}$, $z = w$ をすると体積は単位球の体積の $\frac{1}{6}$ 倍となり, 実は暗算でもできてしまう (!).

以上, 質問があれば fujiwara@math.nagoya-u.ac.jp まで.

連絡: せっかくここまで進んだので, 物理との関連に興味のある人向けに静電場について補講をすることを予定しています. 予定日は 2/13 (火) 午後 1:00-3:00, 部屋は 509 号室.

感想: どの解答を見ても, 自分なりに頑張って書いているというのが伝わってきました. 試験というのは

自分の実力をチェックする方法の一つですから, 今回評価がよかった人もよくなかった人も, わからなかった点をきちんと克服して自分の能力アップにつなげてほしいと思います. いいわけ: レポート返却を予定していたのですが, 手を怪我していたのでコメントを書き込めず, そのうち忙しくなってしまいました. 試験答案と組にして返却することを予定しています (成績はまだ完全につけ終わってはいません).

最後に:

数学は具体的で直感的なものであること, 自分で問題を解いて頑張れば誰でもそれに見合った実力がつくことを実感してもらえましたか? 私にとっても皆さんと一緒に楽しめて, 思い出に残る講義になりました. 3次元空間までの解析幾何にはだいぶ慣れたことと思います. この講義をステップとして, 皆さんがより広い世界に踏み出していくことを期待しています.

P.S. 試験の際, 感想を書いてくれた皆さんへ

今後の参考にさせてもらいます. 中には私の励みになるものも少なからずありました. どうもありがとう.

科目名　数学演習 V・VI　　**担当教官**　向井 茂

サブタイトル

対象学年　２年　　**計 4 単位**　必修

教科書
参考書

予備知識

講義内容

- 毎週一人一回発表
- 複素関数（留数計算），線型代数，微積分（収束と発散）の問題を配付した.
- ある年のここの大学院入試問題（一般）を解かせてみた.
- 冬休みは線型代数のレポート問題を課した.
- 初回と最終回には個人面接を行った.

講義の感想

- できる学生でも次はよく理解していなかった.

1) 複素関数の正則性と Cauchy-Riemann 関係式，正則な関数と正則でない関数の例．例えば多項式関数の正則性がちゃんと示せるま 3 週間かかった.

2) 部分集合の稠密性.

科目名　　数学演習 V・VI　　　　**担当教官**　佐藤 周友

サブタイトル

対象学年　　２年　　　　**計 4 単位**　必修

教科書
参考書

予備知識

講義内容

この演習は少人数制で行われた．(約 65 人を 5 クラスに分割，学生の希望を取って標準コース [1 クラス] と基礎コース [4 クラス] に分けた．) 私は演習担当教官 6 人の中で担当クラスを持たない教官であった．主に他の担当教官の代講を行い，そうでないときは補助的な教官として演習に参加した．2 年生後期の演習は全 12 回 (第一回目はクラス分け) で行われた．私はその内 5 回は代講を行い，3 回は補助教官であった (個人的な理由で 3 回欠席した).

講義の感想

今回の演習を通じて「数学に触れる時間が増えた」「質問したい事が増えた」という学生が増えたならばこの少人数制は非常に意味がある方法なのだと思います．少なくとも私はそう期待しているのですが...

科目名　関数解析　　**担当教官**　名和 範人

サブタイトル　無限次元解析の基礎

対象学年　**３年**　　**６単位**　**選択**

教科書

参考書　H. Brezis 著 (藤田 宏　小西 芳雄 共訳)，関数解析，産業図書
K. Yosida, Functional Analysis, Springer
Dunford and Schawartz, Linear Operators I, II, III, Wiley

予備知識

２年次までの必修科目（微分積分学，線形代数学の基本的事項（数学基礎Ｉ～ＩＶ）抽象ベクトル空間，解析学序説，集合と位相，ベクトル解析）及び，３年次の常微分方程式論，ルベーグ積分論.

講義内容

関数解析学の基礎理論を学ぶ.
具体的な講義内容は以下の通り：

1. なぜ関数解析か（10/10，17，24，31，11/7，14）
    - 完備性と不動点定理 (常微分方程式の解の存在定理).
    - ノルム空間，Banach 空間，Hilbert 空間 (定義と例).
    - Fourier 係数と Hilbert 空間 (概説).
    - ノルム空間の位相 (基礎的事項).
    - ノルム空間における compact 性 (単位球の compact 性と次元).
    - Shauder - Tychonov の不動点定理 (概説)
2. 線形作用の基礎理論（11/21，28，12/12）
    - 線形作用素.
    - 閉作用素と閉拡張.
    - 閉拡張の例
    - Banach 代数 (Neumann 級数).
3. Hilbert 空間の直行射影と正規直交系 (12/12，19，25)
    - 内積の定義された空間 (可分性は仮定しない).
    - 直交補空間と直交射影.
    - 完全正規直交系の存在.

- Bessel の不等式，　Perseval の等式，　Fourier 展開.
- $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(in\theta)\}$ の $L^2(-\pi,\pi)$ における完全性 (概説).

4. 共役 (双対) 空間（1/9，23，25）
   - 定義.
   - 共役空間の例　その１：Riesz の表現定理 (Hilbert 空間の場合)
   - 共役空間の例　その２：$C_c(\Omega)$ 上の正値線形汎関数.
   - 共役空間の例　その３：$L^p(\Omega)$ $(1 \leq p < \infty)$ の共役空間.
   - Hahn-Banach の定理と連続線形汎関数の存在および回帰性
   - 共役 (双対) 作用素 (定義のみ)
5. Baire の技巧（1/25）
   - Baire の定理 (証明はなし).
   - 一様有界性の定理.
   - 開写像定理 (レポート課題その１)
   - 閉グラフの定理 (レポート課題その２)
6. 弱位相と汎弱位相（1/25）
   - 弱位相と汎弱位相の定義，それらを考える意義.
   - Alaoglu の定理 (概説).

講義の感想

導入部をゆっくりやりすぎたかもしれないと反省している．もう少し，そっけなくやっても良かったかも知れない．そうすれば，後半の話題に，もっとじっくりと取り組めたのではないかと思う．今期は体調不良などで急に休講したことが２回あり，補講を正規の時間外で２度も組むことになってしまい，学生諸君には迷惑をかけてしまい申し訳なく思っている．

参考資料

レポート問題

提出期限：2001 年 2 月 6 日 期末試験終了時
A4 レポート用紙を使用し、左上をホチキスで綴じること

問題.　開写像定理、閉グラフ定理について調べて、それら定理を正確に書き、それたを証明しなさい。

試験に対する注意事項.　期末試験は、もちろん教科書、参考書、ノートは持ち込んではいけないが、自分が書いたレポートは参照してもよい。

期末試験　2001.02.06

注意事項：ノート、参考書類は持ち込み不可、提出予定のレポートは参照可

問題用紙は２枚ある。 試験時間は午前 9:00 から正午 までである。
次の **1** から **5** に答えよ。ただし、**4-1** と **4-2** は選択問題である。どちらか一方を解答すればよいが、両方を解答してもい。両方解答した場合は加点する。

1. Bnach の不動点定理を正確に記し、その常微分方程式の解の存在定理への応用について（簡単に）解説せよ。

2. $\mathcal{H}$ を内積 $(\cdot,\cdot)$ を持つ複素数体上の Hilbert 空間とする。$S=\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ をその正規直交系とするとき、次の (1) (2) が成立することを示せ。
(1) 任意の $x\in\mathcal{H}$ に対して Bessel の不等式

$$\sum_{j=1}^{\infty}|(x,x_j)|^2\le\|x\|^2$$

が成立する。ここで $\|x\|^2=(x,x)$ である。
(2) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}|c_j|^2<\infty$ を満たす複素数列 $\{c_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ に対し、級数 $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}c_jx_j$ は $\mathcal{H}$ で収束し、$x=\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}c_jx_j$ とおけば、$c_j=(x,x_j)$ $(j=1,2,\cdots)$ である。

3. $\mathcal{H}$ を内積 $(\cdot,\cdot)$ を持つ複素数体上の Hilbert 空間とする。任意の $x\in\mathcal{H}$ に対して $\|x\|^2=(x,x)$ と書く。$S=\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ をその正規直交系とするとき、次の 4 命題は同値であることを示せ：

(i) S は完全である。

(ii) $\mathcal{H}$ の任意の元 x に対して、Perseval の関係式 $\|x\|^2=\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}|(x,x_j)|^2$ が成立する。

(iii) $\mathcal{H}$ の任意の元 x に対して、$x=\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}(x,x_j)x_j$ が成立する。

(iv) $\mathcal{H}$ の元 x のすべての Fourier 係数 (x,x_j) が零であれば、x は零ベクトルである。

4-1. $1\le p<\infty$ とする。$\mathbb{R}^n$ 上の Lebesgue 測度に関して p 乗可積分な複素数値関数全体のなす空間を $L^p(\mathbb{R}^n)$ (ほとんどいたるところ一致するものは同一視する) とし、その上にノルム $\|\cdot\|_p$ を

$$\|u\|_p\overset{def}{=}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u(x)|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}$$

と定める。このとき

$$\|u\|_p=\sup_{\substack{f\in L^{p'}(\mathbb{R}^n)\\ \|f\|_{p'}=1}}\left|\int_{\mathbb{R}^n}u(x)\overline{f(x)}dx\right|$$

となることを示せ。ただし p' は p の Hölder 共役指数、即ち $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$ である。

4-2. $\mathbb{R}^n$ 上の Lebesgue 測度に関して 本質的に有界な複素数値関数全体のなす空間を $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (ほとんどいたるところ一致するものは同一視する) とし、その上に ノルム $\|\cdot\|_\infty$ を

$$\|u\|_\infty \stackrel{def}{=} \inf_{|N|=0} \sup_{x\in\mathbb{R}^n/N} |u(x)|$$

と定める。ただし、右辺の下限は $\mathbb{R}^n$ の Lebesgue 測度 0 の集合全体に渡ってとることを意味する。このとき

$$\|u\|_\infty = \sup_{\substack{f\in L^1(\mathbb{R}^n)\\ \|f\|_1=1}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\overline{f(x)}dx \right|$$

となることを示せ。ただし $L^1(\mathbb{R}^n)$ は $\mathbb{R}^n$ 上の Lebesgue 測度に関して可積分な複素数値関数全体のなす空間とする。

5. $\mathcal{Y}$、 $\mathcal{Z}$ を Bnach 空間 $\mathcal{X}$ の閉線形部分空間とする。任意の $x \in \mathcal{X}$ が、$x = y + z$ (ただし $y \in \mathcal{Y}$ $z \in \mathcal{Z}$) なる形に一意的に現されるものと仮定する。このとき、x に対して y を対応させる $\mathcal{X}$ から $\mathcal{Y}$ への作用素 P が定まる。

(1) P は線形作用素であることを示せ。

(2) $\mathcal{Y}$ には $\mathcal{X}$ からの相対位相を入れると、ひとつの Banach 空間になることを示し、 P は Banach 空間 $\mathcal{X}$ から Banach 空間 $\mathcal{Y}$ への閉作用素であることを示せ。

(3) P は Banach 空間 $\mathcal{X}$ から Banach 空間 $\mathcal{Y}$ への有界線形作用素であることを閉グラフの定理を用いて示せ。

科目名　　多様体と微分型式　　　　**担当教官**　金井 雅彦

サブタイトル　とくに極値問題との関連から

対象学年　３年　　　　**６単位**　**選択**

教科書　指定しない.
参考書　松本幸夫著「多様体の基礎」東京大学出版会
I. M. シンガー・J. A. ソープ著「トポロジーと幾何学入門」倍風館

予備知識

講義内容

本講義は微分可能多様体に対する入門をその目的とする．ところで，微分可能多様体論の導入部分，すなわち微分可能多様体やその接ベクトルなどの定義は，初学者にとって必ずしも理解容易なものではない．しばしば指摘されるように，これが初学者にとって最も大きな障害となるところである．この困難を幾分かでも和らげるために，この講義では扱う対象をユークリッド空間の微分可能**部分**多様体に限定し，しかもとくに極値問題の観点から微分可能多様体の概念を**発見的に**導入することにした．前者は接ベクトルの導入を容易にし，一方後者は解析を展開する舞台として微分可能多様体をとらえることによりその定義の動機付けを明確化するためのものである．

講義全体はふたつの部分に分けられる．第１部は極値問題の復習にあてられた．その内容はすでに１，２年次で学習済みのもののはずであったが，出席者の反応を見ると必ずしも理解が十分とは言い難い．そこで極めて初等的な内容から十分な時間をかけそれを再度解説することにした．そこで取り扱った主要な話題は以下の通りである：1 変数関数に対する極値問題の解法とその正当化；多変数関数に関する極値問題の解法とその問題演習；多変数関数の偏微分とその意味；合成関数の微分；２次形式と固有値問題；２次形式の対角化可能性とその変分法的証明；対称行列の定値性の判定法.

第２部の目的は，制限付き極値問題を介して多様体概念を導出し，多様体に関連する基本概念を習得すると伴に，多様体上での極値問題の解法を学習することであった．まず球面上の極値問題を，球面座標，立体射影の各々を用い解くことを学んだ．その後，これを動機付けとして，ユークリッド空間内の微分可能部分多様体の概念および接空間等それに付随した基本概念を導入し，その上で多様体上の極値問題を定式化した．とくにその解法のひとつとして，ラグランジュの未定乗数法を解説した．

当初の予定ではこの後ユークリッド空間の部分多様体に対しその第２基本形式を導入し，それを用い制限付き極値問題の解法を「完成」させ，さらにはポアンカレ–ホップの定理など，極値問題あるいは力学系理論に関連した初等的トポロジーの話題を通じ微分形式について議論する予定であった．時間の都合でこれが実現できなかったことは，担当者にとって極めて残念なことである．

講義の感想

あまり気が進まないことではありますが，ひとつだけ小言を言うことにします．それは遅刻者が少なからず存在したことです．これを口にするのは必ずしも遅刻自体を不愉快に感じているからではありません.

むしろ諸君の「利益」を考えてのことです．そもそも授業を聞かずに講義内容を理解するのは決して容易ではありません．授業で何が教えられているのかも分からなくなります．それでは試験準備のやりようもありません．あるいは中間試験があることさえ知らないなどということにもなりかねません（もっともこの科目の場合，中間試験を実施するにあたっては，それを授業中に通知するとともに掲示板やこの科目のためのウェブ・ページを利用して周知を徹底したつもりではありますが）．遅刻に関しても事情は本質的に変わりありません．この講義に限らず，極めて重要な事が授業の最初で述べられることがよくあります．それを聞き逃せば，その後の講義の内容を理解出来るものではありません．遅刻や欠席を繰り返しながら単位を取得出来るのは多分特別な「才能」に恵まれた人のみでしょう．すべての人がこの「才能」を持ちあわせている訳ではありません．とくに卒業に必要な単位を落としがちの人たちには，何よりもこれに気付いて頂きたいと思います．毎回遅刻せずに授業に出席し，しかも講義の内容は出来うる限り講義時間中に理解してしまう — 以外に感じるかも知れませんが，実は一番楽に単位を取得する方法がこれです．

科目名　**代数系と表現**　　**担当教官**　**岡田 聡一**

サブタイトル　有限群の表現論

対象学年　**３年**　　**６単位**　**選択**

教科書
参考書　近藤 武，群論（第 8 章，§8.1 ～ §8.5），岩波基礎数学選書，岩波書店
J.-P. Serre，Représentations linéaires des groupes finis，Hermann
服部 昭，群とその表現，共立数学講座，共立出版

予備知識

数学基礎 II，IV，抽象ベクトル空間，代数学序論，代数学要論で学習した内容（線型代数，群論など）を仮定する．

講義内容

有限群の複素数体上の線型表現を中心に，表現論の基本的な概念，手法について解説することを目的とした．

具体的な講義内容は以下の通り：

1. 群の表現の基礎（6 回）

   §1 群の表現（定義，例，置換表現）

   §2 表現の同値（行列表示，G-intertwiner）

   §3 部分表現（不変部分空間，商表現）

   §4 既約表現

   §5 Schur の補題（アーベル群の既約表現への応用）

   §6 表現の直和，テンソル積，双対

   §7 既約分解

   §8 Maschke の定理

   §9 重複度（等型成分）

   §10 ユニタリ表現

   §11 1 次元表現（有限アーベル群の既約表現，アーベル化）

   §12 アーベル群の双対性（有限アーベル群の双対性，S^1，$\mathbb{R}$ の連続な既約ユニタリ表現）

2. 指標（4 回）

   §13 群環（群上の関数全体が畳み込みに関してなす環として導入）

   §14 指標（共役類，類関数，群環の中心）

§15 既約指標の直交関係（Schur の関係式）

§16 指標の既約分解（正則表現の指標の既約分解）

§17 既約指標の個数（第二直交関係，直積群の既約表現）

§18 指標表（例：正二面体群，4 次対称群）

§19 群環の構造（$G \times G$-加群としての既約分解，行列環への直和分解）

§20 既約表現の次数（代数的整数）

3. 誘導表現（2 回）

§21 誘導表現（群環上のテンソル積，群上の関数による実現）

§22 誘導表現の普遍性

§23 誘導表現の指標

§24 Frobenius の相互律（2 重可移な置換表現）

講義の感想

参考資料

試験問題　2001.02.09

以下の問題では，複素数体 $\mathbb{C}$ 上の有限次元表現だけを考える．

問題 1.　$G = D_{2n} = \langle a, b \mid a^n = b^2 = e, bab = a^{-1} \rangle$ を位数 $2n$ の正二面体群とし，$\rho, \pi : G \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ を，

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix}, \quad \rho(b) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\pi(a) = \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}, \quad \pi(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

（ただし $\zeta = e^{2\pi\sqrt{-1}/n}$）によって定まる G の $\mathbb{C}^2$ における表現とする．このとき，

(1) ρ と π が同値であることを，同値性の定義に基づいて証明せよ．
(2) $n \geq 3$ のとき，ρ が既約であることを，既約性の定義に基づいて証明せよ．

問題 2.　$G = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = e, ab = ba \rangle = \{e, a, b, ab\}$ を位数 2 の巡回群 2 つの直積群とし，$\rho : G \to \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ を

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \rho(b) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

によって定まる G の $V = \mathbb{R}^3$ における表現とする．このとき，(ρ, V) を既約分解せよ．(つまり，V を $V = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ と G-不変な 1 次元部分空間の直和に分解せよ．)

問題 3.　次の (1)，(2) を証明せよ．

(1) G がアーベル群であり，(ρ, V) が G の既約表現ならば，$\dim V = 1$ である．
(2) G を有限群とする．G の任意の既約表現 (ρ, V) に対して $\dim V = 1$ が成り立つならば，G はアーベル群である．

問題 4.　$G = S_4$ を 4 次対称群とし，G の $V = \mathbb{C}^4$ における表現 $\rho : G \to \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ を，

$$\rho(\sigma) = \left(\delta_{i,\sigma(j)}\right)_{1 \le i,j \le 4} \quad (\sigma \in G)$$

によって定義する．このとき，

(1) G の共役類の完全代表系を 1 組与え，各共役類に含まれる元の個数を求めよ．(答のみでよい．)
(2) V の G-不変部分空間 U, W で，$V = U \oplus W$ となり，部分表現 ρ_U が自明な表現となるものを求めよ．
(3) 部分表現 ρ_W の指標 χ を求め（(1) で与えた完全代表系での値を求めればよい），χ が既約指標であることを示せ．
(4) G の指標表を作れ．

科目名　確率論　**担当教官**　服部 哲弥

サブタイトル

対象学年　３年　**６単位**　選択

教科書　西尾真喜子，確率論，実教出版，1978
ホームページに掲載の講義ノートとその引用文献

参考書

予備知識

微積分学，ルベーグ積分論 (特に Fubini の定理あたりまで)

講義内容

- 確率空間，確率変数，期待値
- 期待値に関する種々の不等式（Schwarz，Hölder，Minkowski，Jensen 不等式）
- 種々の収束（概収束，L^p 収束，確率収束，法則収束），およびその間の関係
- 収束に関連する概念（一様可積分性，tightness，特性関数）
- 独立性，独立確率変数の和の収束（大数の法則，中心極限定理）

講義の感想

シラバスに予告した内容のうち，時間の余裕に応じて適宜行うとした「進んだ話」がいっさいできなかった．できなかった中には条件付き期待値，離散 martingale，1 次元 simple random walk，等の基礎事項もある．学生諸君の感想にも指摘があったが，講義の時間配分が必ずしもうまくなかった．中心極限定理までやって最小限の格好はつけたが，特性関数以降（特性関数，独立性，大数の法則，中心極限定理）は一項目一日の駆け足だった．確率論の講義は初めてだったので，今後繰り返すうちに少しずつ改善したい．

教務委員会の意向も受けて，時間の半分を演習に当てた．講義時間の短縮は一部の長い定理の証明の割愛で対処した．具体的には，確率測度の構成 (存在証明) に関する定理は証明を省くという方針を取った．例えば，測度列の tightness から弱収束部分列の存在をいう Prokhorov の定理や特性関数の各点収束＋αから極限測度の存在を言う Lévy の定理の証明 (方針は略述したが) や，独立確率変数列（無限次元直積測度空間）の存在（拡張定理）等は触れなかった．

演習時間にがんばることで自信をつけた学生もいることを考えると，演習時間を十分とる教務委員会の方針は適当であると思う．比較において，いくつかの基礎定理の証明の割愛はやむを得ないと思う．但し，証明方針を略述したことの意義は分かりにくかったかもしれない．成功すれば意義のあることと思うが，手間をかけて工夫しないといけないことなので，今後この講義を繰り返すうちに徐々に改善できれば幸いである．

講義中の反応，質問，演習の発表，試験の成績，演習中のインタビュー全てを総合すると，受講者のうち，この科目の受講可能水準に達している学生と門前で苦労している学生の間に，最初から大きな学習可能性の差があることが感じられた．これは講義のレベルを決める上で重大な問題である．

演習は出席者がまんべんなく発表することを期待してやさしいものも入れておいたが，後半には少数の諸君に集中した．発表をがんばって自信をつけた学生もいた点は良かったが，もし出席者全員を救えなかったならば残念である．

参考資料

第１回試験　2000.12.13

問 1 ($10*3=30$)**.**　実数 $\mathbb{R}$ 上のボレル集合族 $\mathcal{B}_1$ に対して，$(\mathbb{R},\mathcal{B}_1)$ 上の確率測度の列 P_n, $n=1,2,3,\cdots$, を次で定義する．

$$\mathrm{P}_n[\,A\,]=\begin{cases}1 & \dfrac{1}{n}\in A,\\ 0 & \dfrac{1}{n}\notin A.\end{cases}$$

(i) P_n は $n\to\infty$ のとき弱収束することを定義に基づいて証明せよ．極限測度 P は何か？

(ii) $\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\mathrm{P}_n[\,F\,]<\mathrm{P}[\,F\,]$ となる閉集合 F があることを証明せよ．

(iii) $\underline{\lim_{n\to\infty}}\,\mathrm{P}_n[\,G\,]>\mathrm{P}[\,G\,]$ となる開集合 G があることを証明せよ．

問 2 ($10*3=30$)**.**　確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ 上の確率変数 $X:\ \Omega\to\mathbb{R}$ で，その分布が平均 $m\in\mathbb{R}$，分散 $v>0$ の正規分布

$$\mathrm{P}[\,X\in A\,]=\int_A e^{-(x-m)^2/(2v)}\frac{dx}{\sqrt{2\pi v}},\quad A\in\mathcal{B}_1\,,$$

に従うものを考える．X の母関数 $M(t)=\mathrm{E}[\,e^{tX}\,]$, $t\in\mathbb{R}$, から $\mathrm{P}[\,X>x\,]$ の漸近形（$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{h(x)}\log\mathrm{P}[\,X>x\,]=1$ となるような簡単な形の関数 h のこと）を求めることに関して，以下に答えよ．

(i) $M(t)$ を計算せよ． ガウス積分の公式 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2/(2v)}\frac{dx}{\sqrt{2\pi v}}=1$ を用いてもよい．

(ii) $0<\alpha<1$ とする．$x<0$ における $-t^\alpha$ $(t>0)$ のルジャンドル変換 $g_\alpha(x)=\sup_{t>0}(xt+t^\alpha)$ を計算せよ．

(iii) ２つの実数 $c>0$ および $0<\alpha<1$ がとれて $\displaystyle\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\lambda}\log M(\lambda^{1-\alpha})=g_\alpha(-c)$ が成り立つならば $\displaystyle\lim_{y\to\infty}\frac{1}{y}\log\mathrm{P}[\,X>y^\alpha\,]=-c$ となることが知られている．このことを用いて $\log\mathrm{P}[\,X>x\,]$ の $x\to\infty$ における漸近形を求めよ．

問 3 ($20*2=40$)**.**　確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ において以下に答えよ．

(i) 確率変数 $X:\ \Omega\to\mathbb{R}$ がある $c>0$ に対して $\mathrm{E}[\,e^{cX^2}\,]<\infty$ を満たすならば $\displaystyle\overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{1}{x^2}\log\mathrm{P}[\,X>x\,]\leqq -c$ が成り立つことを証明せよ．但し， $\mathrm{P}[\,X>x\,]=0$ となる x がある場合は左辺は $-\infty$ と定義する．

(ii) 確率変数の列 $X_n:\ \Omega\to\mathbb{R}$, $n=1,2,3,\cdots$, と確率変数 $Y:\ \Omega\to\mathbb{R}$ に関して， X_n が Y に概収束すれば確率収束もすることを証明せよ．

第２回試験　2001.01.24

問 1 $(15 * 2 = 30)$**.**

(i) $\varphi(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ を特性関数とする 1 次元分布はどのような分布か？

(ii) 実数値確率変数 X の特性関数を φ とするとき，$|\varphi|^2$ はどのような確率変数の特性関数か？

問 2 $(20 * 2 = 40)$**.**

(i) $0 < p < 1$ を定数とする．X_k, $k = 1, \cdots, n$, を独立同分布確率変数列で $\mathrm{P}[\ X_1 = 0\ ] = 1 - p$, $\mathrm{P}[\ X_1 = 1\ ] = p$ なる分布を持つものとする．このとき $\dfrac{1}{a_n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(X_k - b_k)$ の分布が $n \to \infty$ で正規分布 $N(0,1)$ に弱収束するような数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を一組与えよ (なるべく簡単な具体例を挙げよ).

(ii) 上で求めた $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ に対して，数列 $\{c_n\}$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{c_n} = 0$ を満たすとき，$\dfrac{1}{c_n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(X_k - b_k)$ の分布は $n \to \infty$ で確率測度に弱収束するか？弱収束するならばその証明と極限分布を答えよ．弱収束しないならばそのことを証明せよ.

問 3 (30)**.**　独立確率変数列 X_k, $k = 1, 2, 3, \cdots$, に対して $\displaystyle\lim_{k\to\infty} X_k = 0$, a.e., と $(\forall\epsilon > 0)\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{P}[\ |X_k| > \epsilon\ ] < \infty$ が同値であることを証明せよ.

問 4 **(?).**　以下のいずれか該当するほうに答えよ.

(i) **講義に半分より多く出席した諸君．**　講義（教官）を「採点」せよ．即ち，良かったと思う点と（教官が）改善すべきだと思う点を各１つ以上挙げよ.

(ii) **講義のうち半分以下しか出席しなかった諸君．**　出席の少なかった理由と，試験のためにどのように勉強したかを答えよ.（半分くらい出席の場合は (ii) を選ぶこと．採点は回答者の実体験に基づく特徴が感じられるかどうかを基準とする.）

科目名　基本群と被覆空間　　**担当教官**　江尻 典雄

サブタイトル　被覆についてのガロア型定理について

対象学年　３年　　**６単位**　**選択**

教科書

参考書　田村 一朗 トポロジー 岩波全書
久賀 道朗 ガロアの夢 群論と微分方程式 日本評論社
I.M.Singer J.A.Thorp Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry, Springer
砂田 利一 基本群とラプラシアン 紀伊國屋数学叢書
V.V. ニクリン I.R. シャハレヴィッチ著 根上生也訳 幾何学と群 シュプリンガーフェアラーク東京

予備知識

群論の初歩　トポロジーの初歩

講義内容

簡単な複体のホモロジー群を計算する経験をすること，簡単な位相空間の基本群の計算をする経験をすること，1 次元ホモロジー群と基本群の関係を理解すること，被覆空間の理解，被覆変換群と基本群の関係を理解すること

具体的な講義内容は以下の通り：

1. 加群
   - 加群，自由加群
2. ホモロジー (複体)
   - 単体，複体，ホモロジー群，ホモロジー群の簡単な性質，正多面体の決定
3. 自由群
   - 自由群
4. 基本群
   - ホモトピー，基本群の定義（ホモトピー型不変性），複体の基本群，複体の基本群の表示，ファンカンペンの定理，基本群とホモロジー群との関係
5. 被覆
   - 被覆の例，被覆面と基本群，被覆面と基本群 (続き)，被覆変換群，普遍被覆面の構成，(D;O) の被覆類と π_1(D;O) の部分群の対応

講義の感想

できるだけ計算をしてほしいと思いつつ授業をしたつもりですが演習問題を解いてくれる学生が少なく残念です．黒板の図形の描きかたに工夫がなかったことが反省されます．手書きでも良いからカラーコピーして渡した方がいいのかなあと思っています．

参考資料

演習問題

問題 1. 各自 複体を作りそのホモロジー群を原始的に決定しよう．

問題 2. 抽象複体を調べよう．その幾何学的実現も調べよう．

問題 3. 単体分割（３角形分割）について調べよう．

問題 4. 階数分だけの１次独立な元が基となる条件を求めよう．

問題 5. 加群の基本定理を証明しよう．

問題 6. n 単体の境界が $n-1$ 次元球面と同相であることを示し、４単体の境界である３次元球面はどうなっているのかうまく説明しよう．

問題 7. おもしろい複体の例を５つあげよう．

問題 8. ３単体の向きをどのようにしたら理解できるか？

問題 9. オイラー数の歴史について調べよう．

問題 10. ピュタゴラス学派の人たちは，平面を（例えば浴室の床を）合同なタイルで敷き詰めるのに３通りの方法をしっていた．このことを調べよう．

問題 11. 正多面体について $m,\ l,\ n$ は確かに決まるが形も決まるのだろうか？

問題 12. 各自 複体を１つ作りそのホモロジー群を求めよう．

問題 13. $f_t : X \longrightarrow Y$ が連続写像の族であるとき，ホモトピーを作る条件を求めよう．

問題 14. S^1 から S^1 への連続写像のホモトピー類を求めよう．

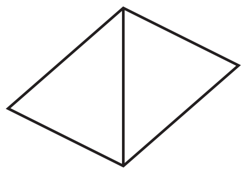
問題 15. おもしろい変形収縮の例をつくってみよう．

問題 16. $n(\geq 2)$ 次元球面の基本群は単位元からなることを示そう．

問題 17. Lemma 3 におけるホモトピーを明確にしよう．

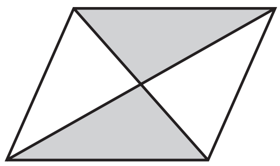
問題 18. $\pi_1(S^2) \cong \{e\}$ であることを四面体の基本群を計算して示そう．

問題 19. 次の基本群を計算しよう．



問題 20. 複体をつくり基本群を求めて難しさを体験しよう.

問題 21. 次の複体の基本群の有限表示を求めよう.



問題 22. トーラス $S^1 \times S^1$ の基本群を求めよう.

問題 23. ファンカンペンの定理を証明しよう.

問題 24. ２人乗りの浮袋の基本群をファンカンペンの定理を使って計算しよう．更に n 人乗りの場合はどうか？

問題 25. クラインの壷の基本群をファンカンペンの定理を使って計算しよう．更に球面から n 個の円板の代わりにメビウスの帯を張り付けたものの場合はどうか？

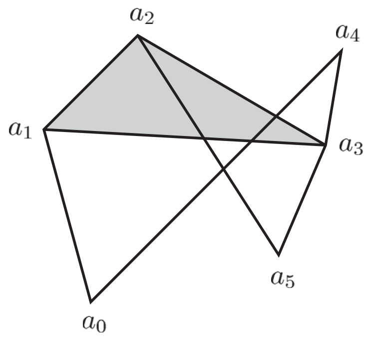
問題 26. 帯から円筒への写像が被覆写像であることを厳密に示そう.

問題 27. 持ち上げが有限回でできることを示そう.

問題 28. 例題の被覆写像が与える基本群の準同型写像を求め単射であることを示そう.

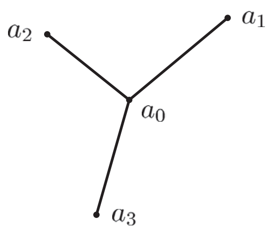
小試験 I　2000.10.26

問題. 下の空間図形についての問題です.
(1) この図形は複体か？複体でないならその理由を述べよう.
(2) この図形が複体なら０次元単体，１次元単体，２次元単体を全て求めよう．更にこの図形を部分複体とする３次元複体を１つ作ろう.



小試験 II　2000.11.02

問題. 次の複体の１次元ホモロジー群を求めよ.

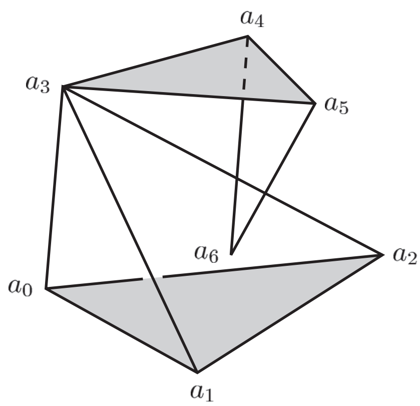


小試験 III　2000.11.02

問題. 下の空間図形についての問題です.

(1) この図形は複体か？複体でないならその理由を述べよう.

(2) この図形が複体なら０次元単体，１次元単体，２次元単体を全て求めよう．更にこの図形を部分複体とする３次元複体を１つ作ろう.



小試験 IV　2000.11.09

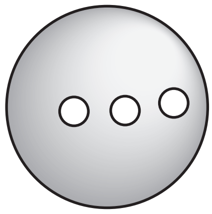
問題. 次の２つの図形のオイラー数を比べて同相にならないことを示せるか？

小試験 V　2000.11.30

問題. １つの穴の空いたトーラスと２つの円を一点でくっつけた図形は同じ基本群をもつだろうか？

小試験 VI　2000.12.14

問題. 球面から n 個の小円板を除いたものの基本群はなにか？

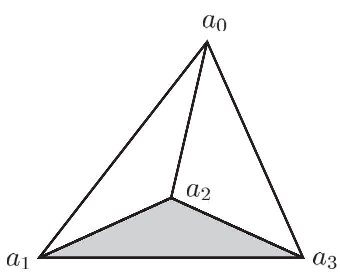


小試験 VII　2001.01.18

問題. 被覆度が２の被覆はガロア被覆であることを示そう.

定期試験 I

次の２次元複体 K を考える.



問題 1. （ホモロジー）

(1) 向きのついた０単体，１単体，２単体をすべて求めよ．

(2) $Z_0(K)$, $Z_1(K)$, $Z_2(K)$ を定義にしたがって求めよ．

(3) $B_0(K)$, $B_1(K)$, $B_2(K)$ を定義にしたがって求めよ．

(4) $H_0(K)$, $H_1(K)$, $H_2(K)$ を定義にしたがって求めよ．

(5) ベッチ数を求め，オイラー数を計算しよう．

問題 2. （基本群の表示）

$l[a_0] = (a_0)$, $l[a_1] = \langle a_0 a_1 \rangle$, $l[a_2] = \langle a_0 a_2 \rangle$, $l[a_3] = \langle a_0 a_3 \rangle$, とする．１単体全体に番号 $\tau_1, \ldots, \tau_6$ を与え次のように向きをつけたものを考える．

$\langle \tau_1 \rangle = \langle a_0 a_1 \rangle$, $\langle \tau_2 \rangle = \langle a_0 a_2 \rangle$, $\langle \tau_3 \rangle = \langle a_0 a_3 \rangle$, $\langle \tau_4 \rangle = \langle a_1 a_2 \rangle$, $\langle \tau_5 \rangle = \langle a_2 a_3 \rangle$, $\langle \tau_6 \rangle = \langle a_3 a_1 \rangle$

(1) $l(\langle \tau_j \rangle)$ $j = 1, \ldots, 6$ を閉じた折れ線として表そう．

(2) x_j を $l(\langle \tau_j \rangle)$ に対する文字として，$x_1, \ldots, x_6$ から生成される自由群を考える．$l(\langle \tau_j \rangle)$ $j = 1, \ldots, 6$ からつくられる基本関係 r_j $j = 1, \ldots, 6$ を求めよ．

(3) ２単体 $|a_1 a_2 a_3|$ からつくられる基本関係 r'_1 を求めよ．

(4) r_j, r'_1 から基本群 $\Pi_1(K, a_0)$ を求めよう．

定期試験 II

問題 1.

(1) メビウスの帯に穴があいた空間の基本群を求めよ．

(2) (1) を使ってファンカンペンの定理からメビウスの帯の基本群を求めよう．

(3) ２次元実射影空間に２つの穴があいたものの基本群を求めよう．

問題 2. 球面上の帯（北緯 α, 南緯 α）を考える．帯上の点 P, $-P$ を同一視してできる２次元多様体 M を作る．

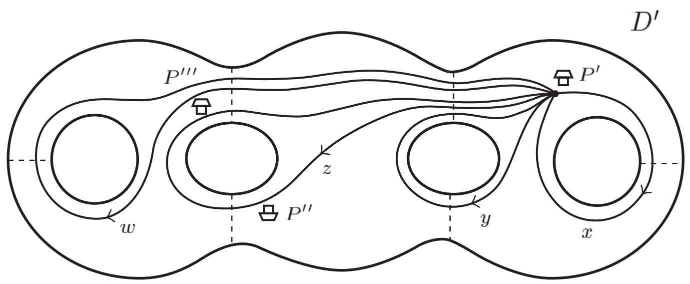
(1) M を直観点になにになるかを考えよう．

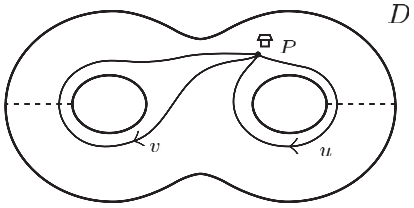
(2) M の基本群はなにか．

(3) 帯は M の被覆空間となっているが被覆度はいくつか．

(4) M の基本群の中で帯の基本群はどのような部分群となっているか．

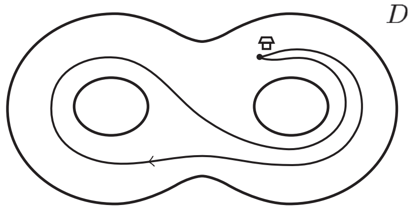
問題 3. 次の被覆 $f : D' \longrightarrow D$ を考える．





$\Pi_1(D';P')$ は x,y,z,w で生成される自由群であり $\Pi_1(D;P)$ は u,v で生成される自由群であった.

(1)



この閉曲線の属する $\Pi_1(D;P)$ の元を求めよ.（u,v 等を使って表すこと）

(2) $u\cdot v\in\Pi_1(D;P)$ に属する曲線の P' を始点とするモチアゲトレースを D' に書こう.

(3) 被覆変換群 $\Gamma(D'\overset{f}{\to}D)$ を求めよう.

(4) $f_*(x),\ f_*(y),\ f_*(z),\ f_*(w)$ を u,v 等を使って表わそう.

科目名　　数学展望 III・IV　　**担当教官**　金井 雅彦

サブタイトル　演習基本コース Ｃグループ

対象学年　　３年　　**計４単位　選択**

教科書　線形代数に関する担当者の自筆教科書；
内田伏一著「位相入門」裳華房

参考書　特に指定せず.

予備知識

期待しない.

講義内容

この科目は，数理学科３年生の学力補強を目的として今学期試験的に開講されたものである．履修者は次の３つから希望のコースを選択し，それに参加した.

演習基本コース：微積分や線形代数，あるいは集合と位相など，数学を学んで行く上で必要不可欠な基本的な事柄の復習を行うことを目的とする．２年生後期ぐらいまでの科目に未履修のものがある人，あるいは単位は取れたものの余り自信が無い人のための演習コースである.

演習標準コース：もう少し進んだ演習のコース．数学を本当に理解するためにはやはり自ら演習問題を解くことが必要不可欠である．過去の大学院入試問題などを解くことを通じ，今まで習得した知識をより確実なものにすることがこのコースの目的である.

輪講コース：卒業研究としての輪講が４年次から開始されるが，それに先立ち輪講の仕方，すなわち本の読み方や発表の仕方を学んでおくのは，極めて有意義であろうと考えらる．それがこのコースの目的である．３年前期までの科目の大半がきちんと理解できている人にお勧めである.

演習基本コースが３グループ，演習標準コース，輪講コースが各１グループ開設された．そのうち私が担当したのは演習基本コースの１グループである．１０名の学生がそれに参加し，線形代数の基礎および位相空間論の初歩を演習形式で学習した．毎回最初に担当者が問題を提出し，それを学生にその場で考させるという様式である．さらに学生が問題を解いている間，学生からの質問にも応じた．何よりもその場ですべてを理解することを目的とした．そのため実際に取り扱った問題の数は決して多くない．しかし，その代わり演習で取り扱った事項はすべての学生が完全に理解したものと期待される.

このグループで取り扱った線形代数に関する主な話題は以下の通りである：連立１次方程式とその解法；解の存在と一意性；線形部分空間の定義とその連立１次方程式との関係；線形部分空間の例（行列の核・像・ベクトルにより生成される線形部分空間など）；１次独立性，基底，次元；次元の計算方法；線形写像とその連立１次方程式との関係など．一方，位相に関する学習をこの演習で行うことにしたのは，参加者の多くがそれを希望したことによる．すでに内田伏一氏の教科書を利用して数回の演習を行った．ここでは正しい

証明を書くことを最重要課題とし，個々の学生の解答に対し添削を行った．なお，この位相に関する補習はインフォーマルな形ではあるが希望者６名に対し春休み中も継続することになっている．

講義の感想

この演習を通じ，参加者が「理解する喜び」を少しでも感じることが出来たならば，と願っています．

科目名　数学展望 III・IV　**担当教官**　梅村 浩

サブタイトル　演習基礎コース Aグループ

対象学年　３年　**計 4 単位　選択**

教科書　特になし.
参考書　特になし.

予備知識

全く仮定しない

講義内容

単位が大幅に取得できておらず，4 年で卒業するのが難しくなりつつある学生が受講者のほとんどであることを考えて，どうしたら困難な状況が変えられるか自信を持たせようとした．実際には各自が自分が解らなくなった少し前からの問題を解くことにした．教科書は特に定めず自分の持っている線形代数学，微分積分学の教科書，その他の問題集等を使うことにした．毎週自分の選んだ問題を 10 題解くことにして，期間中に各自が百数十題解いてもらう予定であった．何題解いたか毎週報告してもらうことにした．ところが，これを続けることは不可能であることが分かった．10 題解いてこないと教室から足が遠退き，欠席者が増えてしまったからである．そこで方針を転換した．先ず毎週解いてくる問題数を 10 題から 5 題に減らした．5 題解いて来なくても「先生済みません」と言えば許すから，何はともあれ出席するようにうながした．結局 9 人中 100 題を越えたのは 2 名であった．

講義の感想

遅刻，欠席が多いのには閉口した．講義には出席すること，遅刻しないことが基本である．そうしなければ解らなくなるのは当たり前である．

科目名　社会数理特論３　　**担当教官**　内藤 久資

サブタイトル　情報科学および数値解析入門

対象学年　４年　　**３単位**　選択

教科書
参考書　ケルナー，フーリエ解析大全，朝倉書店
Roman, Coding and Information Theory, Springer
杉原正顕，室田一雄，数値計算法の数理，岩波書店
徳田雄洋，情報ってなんだろう，岩波書店,「ジュニア版コンピュータ科学入門」

予備知識

代数学，常微分方程式などの基礎的な知識があると望ましい．

講義内容

【講義シラバスに記載した内容】

まず，周期関数のフーリエ変換からはじめ，フーリエ変換の基礎を学ぶ．次に，計算機上のフーリエ変換と考えられる，離散フーリエ変換を考え，その実現である，高速フーリエ変換のアルゴリズムを解説する．また，実際にフーリエ変換を利用することにより，どのようなソフトウェアが実現可能となるかを紹介する．次にフーリエ変換を例にとり，直交関数とは何かを考え，それを基礎に数値積分の手法を考察する．

授業の後半は，データの符号化と圧縮可能性について考察する予定である．

【講義の目的】

前期に引き続いて，計算機と数学との関わりを，数学の側面から解説することを試みる．

ソフトウェアで利用される数学の代表例として，フーリエ変換，符号理論，情報理論，暗号理論などを紹介する．一方，計算機を利用した数学の代表例としての，数値計算，特に数値積分，微分方程式の数値解法などにも触れたい．これらの数学がどのように実際のソフトウェアと関わっているか，各自が実感できるような実例を挙げながら講義を進める予定である．これらの実例を通じて，現代数学が無味乾燥なものではなく，生きた学問であることを実感してほしい．

【具体的な講義内容は以下の通り】

１０月１６日（第１回）

- 授業内容の説明
- フーリエの方法による区間上の熱方程式の解法
  - 変数分離によって，熱方程式を常微分方程式に帰着させる．
  - 初期条件に対するフーリエ正弦展開と解の表示
- ベクトル空間
  - 定義と例

１０月２３日（第２回）

- ベクトル空間
  - 内積，正規直交基底
  - ベッセルの不等式，パーセバルの等式
- ヒルベルト空間
  - ノルム，完備性
  - 例
  - 完全正規直交系とその例

１０月３０日（第３回）

- 固有値問題
  - 有限次元の線形空間上の線形写像の固有値
  - 固有値が実数になるための線形写像の十分条件は？
  - 対称作用素
- 固有値問題とフーリエの方法との関連

１１月　６日（第４回）

- 周期境界条件を持つ関数に対する熱方程式のフーリエの方法
- 周期関数のフーリエ級数展開
  - 固有関数系の完全性
  - １階連続微分可能な関数のフーリエ級数の収束
- ケルビンの鏡像原理

１１月１３日（第５回）

- 波動方程式 ― 両端を固定した弦の振動
- 音の重ね合わせ，音階
  - うなり
  - ピタゴラス音階，純正律音階，平均律音階
- 変調

１１月２０日（第６回）

- フーリエ級数の収束
  - フェイエルの定理
  - ディレクレの定理
  - ギブスの現象

１１月２７日（第７回）

- 合成積
- 熱方程式の基本解
- 指標
- 固有関数展開

１２月　４日（第８回）

- 実数上定義された関数のフーリエ変換（１）
  - 定義
  - パーセバルの等式
  - 反転公式

１２月１１日（第９回）

- 実数上定義された関数のフーリエ変換（２）
  - 超関数のフーリエ変換
    - デルタ関数
    - 反転公式
  - 応用
    - ラドン変換

１２月１８日（第１０回）

- 実数上定義された関数のフーリエ変換（３）
  - 短時間フーリエ変換と不確定性原理
- 離散フーリエ変換（１）
  - 定義と基本的な性質
  - 多項式の積
  - デジタルオーディオ

１月１５日（第１１回）

- 離散フーリエ変換（２）
  - サンプリング定理
  - 高速フーリエ変換

１月２２日（第１２回）

- 離散フーリエ変換（３）
  - 離散コサイン変換
  - JPEG 画像フォーマット

【講義時に配布した資料・レポート問題など】

これらは，講義の WEB ページ http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~naito/lecture/2000_AW/ から取得可能.

講義の感想

当初は符号理論・情報理論・数値積分なども講義するつもりであったが，フーリエ変換を一通りやるという方針変換を行った.

講義の当初から具体的な応用例を挙げ簡単な例から始めたつもりだったが，１０月頃，朝日放送の「探偵！ナイトスクープ！」で「携帯電話で鈴虫の声は聞こえるか？」というネタがあり，このネタの結末の数学的な意味を理解してもらえるように講義を進めた.

また，３年までに学習した内容の多くの部分を使って話をするめることとなったので，出来る限り復習のつもりで基本的な部分から解説したが，時間的な制約が大きく，かなりの部分の証明を省略することとなったのが残念．しかし，身近な応用例を数多く挙げることで，フーリエ変換を身近に感じてもらえたと思っている.

参考資料

第１回レポート問題　2000.11.06

Exercise 1.　区間 $[0, \pi]$ 上での熱方程式のノイマン境界値問題

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0, \cdot) = u_0, \\ u_0'(0) = u_0'(\pi), \\ u_x(\cdot, 0) = u_x(\cdot, \pi) = 0 \end{cases}$$

の解をフーリエ級数展開を用いて記述せよ．さらに, その解は $t \to \infty$ でどのような関数に収束するかを考察せよ.

Exercise 2.　区間 $(-\pi, \pi)$ 上の次の関数のフーリエ級数展開を計算せよ.

(1) $f(x) = x$.

(2) $f(x) = x^2$.

Exercise 3.　$z \in \mathbb{C}$ に対して, $f(x) = \cos(zx)$ の $x \in [-\pi, \pi]$ におけるフーリエ級数展開を求めよ．これを用いて, $z \notin \mathbb{Z}$ の時, 次が成り立つことを示せ.

(1) $\displaystyle \pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$.

(2) $\displaystyle \frac{\pi z}{\sin \pi z} = 1 + 2z^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 - n^2}$.

第２回レポート問題　2000.11.27

Exercise 1.　区間 $(-\pi, \pi)$ 上の関数 $f(x) = x^2$ のフーリエ展開から「うれしい等式」を１つ導け.

Exercise 2.　数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が α に収束するとき, その平均からなる数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, ただし, $b_n = \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$ も α に収束することを証明せよ．また, 逆は正しくないことの例を示せ.

第３回レポート問題　2000.12.04

Exercise 1.　$f(x) = e^{-\alpha x^2}$ に対して,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx, \quad \int_{\mathbb{R}} x f(x)\, dx, \quad \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\, dx$$

を計算せよ.

Exercise 2.　$\mathbb{R}$ 上の急減少関数 f に対して,

$$\frac{d}{dy} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\sqrt{-1}xy}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dy} (f(x) e^{-\sqrt{-1}xy})\, dx$$

であることを証明せよ.

第４回レポート問題　2000.12.18

Exercise 1.　$a, b \in \mathbb{R}$ としたとき,

$$s(t) = (a/\pi)^{1/4} \exp(-a\frac{t^2}{2} + b\frac{t^2}{2}\sqrt{-1} + \omega_0 t\sqrt{-1})$$

のフーリエ変換を求めよ. さらに,

$$h(t) = (\alpha/\pi)^{1/4} e^{-\alpha^2/2}$$

を窓関数とする s の短時間フーリエ変換を求めよ.

Exercise 2.　$\mathcal{F}_N$ を N 点離散フーリエ変換とする. $N \geq 4$ の時に, $\mathcal{F}_N$ の固有値を求めよ. さらに, $N = 4$, $N = 8$ の時の固有ベクトルを求めよ.

第５回レポート問題　2001.01.15

Exercise 1.　離散コサイン変換（タイプＩＩ）, すなわち, $a \in \ell(N)$ に対して,

$$\mathcal{F}_{C^{II}}(a)(j) = \sqrt{\frac{2}{N}} K_j \sum_{m=0}^{N-1} a(m) \cos(j(m+\frac{1}{2})\frac{\pi}{N}), \quad K_j = \begin{cases} 1 & j \neq 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & j = 0 \end{cases}$$

は $\ell(N)$ 上の直交変換であることを証明せよ.

Exercise 2.　離散サイン変換, すなわち, $a \in \ell(N)$, $a(0) = 0$ に対して,

$$\mathcal{F}_S(a)(j) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=1}^{N-1} a(m) \sin(jm\frac{\pi}{N}),$$

は $(\mathcal{F}_S)^2 = 2\mathrm{Id}$ を満たすことを証明せよ.

Exercise 3.　$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対しては,

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = \sqrt{-1}\xi\mathcal{F}(f)(\xi)$$

となる関係式が成り立つ. この関係式の離散フーリエ変換版を述べ, それを証明せよ.

Exercise 4.　$N = 6$, $N = 10$ の時の高速フーリエ変換を行列の積の形で表せ.

Exercise 5.　高速フーリエ変換を実行するプログラムを書け.

Exercise 6.　以下のようなプログラムを書け.

1. 440Hz の正弦波を AIFF ファイルフォーマット, 44.1KHz/16bits で出力する.
2. (1) で作った AIFF ファイルをサンプリング定理を用いて 48KHz/16bits に変換して, AIFF ファイルフォーマットで出力する.

3. (1) で作った AIFF ファイルを元に, サンプリング定理で純正律音階の Major Base Chord を正弦波で構成し, AIFF ファイルフォーマット, 44.1KHz/16bits で出力する.

Exercise 7.　この講義の感想・意見・批判等を述べてください.

すべてのレポートの締め切りは, １月２９日（月）午後５時とします.

科目名　基幹数理特論３／代数学概論 II　**担当教官**　藤原 一宏

サブタイトル　幾何学的視点からの代数的数論の解説

対象学年　４年／大学院　**２単位**　**選択**

教科書

参考書　高木貞治，初等整数論講義，共立出版
M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley
松村英之，可換環論，共立出版

予備知識

代数学の基礎的知識，とくに線形代数と可換環論，ガロア理論，複素関数論の基礎知識

講義内容

講義では代数的整数論の基本的部分 (類数の有限性と単数定理まで) を幾何的視点から解説した．この講義で出てきた視点は基本的なものであり，私は数学のどの分野でも役に立つものだと信じている．

具体的な講義内容は以下の通り：

1. Liouville の定理（1 回）
   - Diophantus 近似の例としての Liouville の定理
2. 整数環（1 回）
   - 有限体の復習
   - 代数体，整閉性と正規化，整数環
3. 可換環と幾何学（2 回）
   - Gelfand の定理 (可換 C^*-環とコンパクト空間の対応)
   - 可換環のスペクトル，affine スキーム，加群と準連接層
4. Dedekind 環と因子 (1 回）
   - 1 次元正則局所環としての DVR (離散付値環)
   - 可逆な加群と直線束，Picard 群
   - 非特異曲線としての Dedekind 環
   - 因子類群と Picard 群 (素イデアル分解の一意性)
5. 数論曲線
   - Affine 非特異曲線としての代数体の整数環

- 無限遠点: Metric と compact 化
- compactified divisor とその次数
- 主因子と積公式
- Metrized module

6. 数論曲線の Riemann-Roch 定理 (1 回)
    - 代数曲線の Riemann-Roch の不等式
    - 数論的 Riemann-Roch 定理 (Minkowski の定理)
7. 代数的数論の基本定理 (1 回)
    - Riemann-Roch による類数の有限性の証明
    - 単数定理の証明 (Gauge 理論における Uhlenbeck の定理の類似)

講義の感想

当初，2000 年内にこの講義内容を終えて，その後高次元の Diophantus 解析を解説するつもりだったが，予定を変更した．機会があれば続きの講義をしてみたいと思う．後半部，雑になった部分もあったが，最後まで付き合ってくれた皆さんに感謝したい．

科目名　　高次位相特論１／幾何学概論 II　　**担当教官**　大和 一夫

サブタイトル　時間とともに変化する図形の幾何学

対象学年　　４年／大学院　　　　　　**２単位**　　**選択**

教科書　なし
参考書　アーノルドーアヴェズ，古典力学のエルゴード問題，吉岡書店

予備知識

特に仮定しない

講義内容

具体的な講義内容は以下の通り：

1. 力学系とは
   - 古典力学系
   - 例，準周期運動，測地線流，ハミルトン流
   - 具体的例（平面上の線形振動）
   - 例，トーラス上の平行移動，アーノルドの猫
2. 測度論的力学系
   - ベルヌーイ系，パンこね変換
   - 平均量の計算問題
   - 例，平均回転数，２の巾で表された十進数の最高桁数の出現率，測地線の平均通過量
3. 力学系の同型問題
   - スペクトラム，微分同相写像のゼータ関数
4. エルゴード問題
   - バーコフ ーヒンチンの定理
   - エルゴード性，混合性
   - エントロピー
5. アノソフ系
   - 負曲率測地線流
   - シナイの玉突き

6. スメイルの力学系，カオス
    - スメイルの蹄鉄型写像
    - 記号力学系
7. 複雑系
    - ハミルトンの原理とダーウィニズム
    - ゲームの理論と社会の進化
    - 遺伝的アルゴリズム

講義の感想

すぐわからなくても辛抱強く話を聞いているうちにわかってくるのに...

科目名　数理解析特論３／解析学概論 II　**担当教官**　石毛 和弘

サブタイトル　変分法の基礎理論とその応用

対象学年　４年／大学院　**２単位**　**選択**

教科書

参考書　小磯憲史，変分問題，共立出版
増田久弥，非線形数学，朝倉書店
P.H.Rabinowitz, Minimax methods and their application to partial differential equations, Math. Sci. Res. Inst. Publ.

予備知識

２年次までの必修科目（微分積分学，線形代数学の基本的事項（数学基礎Ｉ～ＩＶ）抽象ベクトル空間，解析学序説，集合と位相，ベクトル解析）は既知とする．ルベーグ積分論，関数解析の単位を取得していることが望ましい．

講義内容

変分法の基礎理論を学ぶ．まず，具体的な例をあげながら変分法の基本的事柄を学ぶ．その後，簡単な偏微分方程式を変分法を用いて解き，Palais-Smale 条件，峠の補題を経て，Yamabe の問題について考える．

具体的な講義内容は以下の通り：

1. 変分法の基礎

   - 変分法とは？
     - 具体例をあげながら変分法について概略を説明し，加えて講義内容の説明を行った．
   - 微積分の復習
     - 変分法を考えるうえでの注意点を説明した．また，微積分の復習を行い，最大値・最小値定理，ラグランジュの未定乗数法について説明した．
   - 臨界条件と安定条件
     - ２点を結ぶゴム紐を例にとりながら，変分問題を考え，第一変分，第二変分，臨界条件，安定条件について説明した．
   - 懸垂線
     - 懸垂線を例にとりながら，変分問題を考え，そのオイラー・ラグランジュ方程式を求めることよって，懸垂線を求めた．また，その安定性について考察した．
   - 等周問題
     - 等周問題を考えながら，懸垂線で考察したことを再度考察し，変分問題について触れてもらった．

2. 変分法と偏微分方程式

- 楕円型偏微分方程式への応用
  - 零 Dirichlet 条件の下で，最も簡単な楕円型偏微分方程式を変分法を用いて解いた．ここで，この後に使う基本的な不等式や関数解析の結果を証明を与えながら紹介した．
- 変分問題への関数解析的試み
  - 上で扱った変分問題を関数空間上の変分問題に一般化し，最小 (大) 限の存在を簡単な場合について証明した．ここで，Fréchet 微分，coercive 条件等について説明した．
- Palais-Smale 条件
  - より一般の変分問題を扱うために，Palais-Smale 条件を与え，Palais-Smale 条件下における変分問題の最小元の存在について考察した．
- 峠の補題
  - 峠の補題について簡単な場合について証明を行った．また，Yamabe の問題を例にあげ，その必要性について説明した．
- Yamabe の問題
  - 有界領域における零 Dirichlet 条件付 Yamabe の問題を考察し，峠の補題を用いて解の存在について簡単な場合について考察した．

講義の感想

講義の前半は変分法に慣れてもらうつもりで，難度を下げた講義を行ったが，何人かの院生にはやはり物足りなかったようで，後半のほうが面白かったと言われた．今後，機会があればこの講義の先について扱ってみたい気もする．

科目名　自然数理特論３／数理物理学概論 II　担当教官　粟田 英資

サブタイトル　量子力学と場の量子論

対象学年　４年／大学院　２単位　選択

教科書　ランダウ，リフシッツ，”量子力学 ”，東京図書（絶版）
参考書　ディラック，”量子力学 ”，岩波書店
朝永振一郎，著作集第８巻 ”量子力学的世界像 ”に集録の ”光子の裁判 ”，みすず書房

予備知識

特に仮定しない

講義内容

講義の目的は，物理の言葉，考え方に慣れる事及び，量子物理の基本的な考え方を理解する事です.

講義の内容は，量子物理の原理（公理や仮定）の初歩的な解説で，具体的には以下の通りです：

1. 不確定性原理
    - 二重スリットの干渉実験，光と電子の二重性（粒子性と波動性）
2. 重ね合わせの原理
    - 波動関数と規格化条件，ヒルベルト空間
3. 観測に関する仮定
    - 偏光板の実験，位置の観測とデルタ関数，固有状態の完全性と直交性
4. 物理量（演算子）のエルミート性
    - 運動量の観測と固有値問題
5. 位置と運動量の双対性
    - フーリエ変換と不確定性関係
6. 連続性の公理，対応原理
    - ハミルトニアンのエルミート性と確率の保存
    - 霧箱の実験，エーレンフェストの定理とシュレーディンガー方程式
7. 定常状態
    - 箱型ポテンシャル,（不）連続スペクトル
8. 調和振動子

- 真空エネルギー，振動子代数（生成消滅演算子と個数演算子）

9. 無差別性の原理

   - 同種粒子の散乱実験，ボゾンとフェルミオン

10. 場の量子論

    - 個数表示とフォック空間，光の粒子性と波動性

11. 真空の縮退（非一意性）

    - 南部-ヨナラシノの定理

講義の感想

不必要に複雑な事項の説明は避け，次元も 1 次元の場合だけに限り，重要な事のみを平易な言葉で述べたので，意外と理解してくれた様です.

参考資料

レポート 問題１

Exercise 1 ～ 4 のうち 2 題以上を解いて下さい。

Ex.1.　二乗可積分関数全体の集合

$$\mathbf{L}^2 \equiv \left\{ \Psi : \mathbf{R} \to \mathbf{C} \;\middle|\; \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 \, dx < \infty \right\},$$

は

$$\langle \Phi \,|\, \Psi \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^*(x)\Psi(x)\, dx, \qquad \Phi, \Psi \in \mathbf{L}^2,$$

を内積とする Hilbert 空間になる事を示せ。(* は複素共役)
つまり、
(0). $\mathbf{L}^2$ は $\mathbf{C}$ 上ベクトル空間
(1). $\langle \Phi \,|\, \Psi_1 + \Psi_2 \rangle = \langle \Phi \,|\, \Psi_1 \rangle + \langle \Phi \,|\, \Psi_2 \rangle$
(2). $\langle \Phi \,|\, c\Psi \rangle = c\langle \Phi \,|\, \Psi \rangle \qquad c \in \mathbf{C}$
(3). $\langle \Phi \,|\, \Psi \rangle^* = \langle \Psi \,|\, \Phi \rangle$
(4). $\langle \Psi \,|\, \Psi \rangle \geq 0$
(5). $\langle \Psi \,|\, \Psi \rangle = 0 \qquad \longleftrightarrow \qquad \Psi = 0$
(6). $\mathbf{L}^2$ はノルム $||\Psi|| \equiv \sqrt{\langle \Psi \,|\, \Psi \rangle}$ に関して完備。
（つまり $||\Psi_n - \Psi_m|| \to 0$ $(n, m \to \infty)$ ならば $\lim_{n\to\infty} \Psi_n \in \mathbf{L}^2$.）

Ex.2.　ある関数列 $\Phi_1(x)$,$\Phi_2(x)$,$\cdots \in \mathbf{L}^2$ と任意の数列 C_1,C_2,$\cdots \in \mathbf{C}$ を考える。

$\sum_n |C_n|^2 < \infty$ となる任意の $\{C_n\}$ に対して

$$\Psi(x) \equiv \sum_n C_n \Phi_n(x),$$

が

(0). $\sum_n |C_n|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 \, dx$

となるならば、

(1). $C_n = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n^*(x) \, \Psi(x) \, dx$

(2). $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n^*(x) \, \Phi_m(x) \, dx = \delta_{n,m} \equiv \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$

である事を示せ。

Ex.3.

$$\Psi_i \in \left\{ \Psi : \mathbf{R} \to \mathbf{C} \;\middle|\; \int_{-\infty}^{\infty} |\,\Psi(x)\,|^2 \, dx < \infty \,, \int_{-\infty}^{\infty} |\, \frac{d\Psi(x)}{dx} \,|^2 \, dx < \infty \right\},$$

に対して、運動量演算子 $i\frac{d}{dx}$, $(i \equiv \sqrt{-1})$ が Hermite である事、つまり

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1^*(x) \left(i \frac{d\Psi_2(x)}{dx} \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(i \frac{d\Psi_1(x)}{dx} \right)^* \Psi_2(x) \, dx$$

を示せ。

Ex.4.　Gauss 分布（正規分布）

$$\Psi(x) = c \, e^{-\frac{x^2}{2a}}, \qquad a, c \in \mathbf{R}$$

に関して

(1). c を適当に定めて規格化 $\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\,\Psi(x)\,|^2 \, dx = 1 \right)$ し、

(2). 不確定性関係 $\Delta x \Delta p = ?$ を計算せよ。

注. $(\Delta A)^2 \equiv \langle A^2 - \langle A \rangle^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$ は物理量 A の分散、

$\langle A \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x) \hat{A} \Psi(x) \, dx$ は A の平均値、

$\hat{x} \equiv x$ は位置演算子、$\hat{p} \equiv -i\hbar \frac{d}{dx}$ は運動量演算子である。

レポート 問題２

Exercise 5 ～ 10 のうち 2 題以上を解いて下さい。

Ex.5.　1 次元 Schrödinger 方程式

$$-\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} = (E - V(x))\Phi(x), \qquad E \in \mathbf{R}, \quad |E - V(x)| < \infty$$

において、$\lim_{x \to \pm\infty} \Phi(x) = 0$ となる解は存在すれば唯一である事を示せ。

Ex.6.　自由粒子の Schrödinger 方程式

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x,t) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x,t), \qquad \Psi(x,0) = \frac{1}{(a\pi)^{\frac{1}{4}}} e^{ikx - \frac{x^2}{2a}}$$

の解が次の様になる事を示せ。

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{a\pi^{\frac{1}{4}}\gamma^{\frac{1}{2}}} e^{i\frac{kx-wt}{\gamma} - \frac{x^2}{2a\gamma}}, \qquad w \equiv k^2, \quad \gamma \equiv 1 + i\frac{2t}{a}.$$

Ex.7.

$$\Psi(x,t) \equiv e^{i(kx-wt+W)}, \qquad w \equiv k^2, \quad W \equiv \int^x A(y)dy.$$

が、1 次元 U(1) ゲージ場中の Schrödinger 方程式

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = \left(-i\frac{\partial}{\partial x} - A(x)\right)^2 \Psi(x,t),$$

に従う事を示せ。

Ex.8. 振動子代数 $\langle a, a^\dagger\rangle$ such that $[a, a^\dagger] = 1$, $N \equiv a^\dagger a$ について

(1). $(a)^n(a^\dagger)^n = (N+1)(N+2)\cdots(N+n)$, $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ を示せ。

(2). 基底状態 $|\,0\rangle$ such that $a\,|\,0\rangle = 0$, $\langle 0\,|\,0\rangle = 1$ と励起状態 $|\,n\rangle \equiv c_n(a^\dagger)^n\,|\,0\rangle$, $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$, $c_n \in \mathbf{C}$ に対し、定数 c_n を定めて規格化（$\langle n\,|\,n\rangle = 1$）せよ。

注. $[A, B] \equiv AB - BA$ 、$|\,n\rangle$ は 状態 $\Phi_n(x)$ の略記で、

$$\langle m\,|\,n\rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_m^*(x)\Phi_n(x)\,dx, \qquad \langle m\,|\,A\,|\,n\rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_m^*(x)A\Phi_n(x)\,dx.$$

Ex.9. 振動子代数を考える。任意の状態 $|\,\Phi\rangle$ は個数演算子 N の固有状態 $|\,n\rangle$, $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ を用いて $|\,\Phi\rangle = \sum_{n\geq 0} b_n\,|\,n\rangle$ $b_n \in \mathbf{C}$ の様に一意的に展開できるとする。この時

(1). 消滅演算子 a の固有状態が $b_0 e^{\alpha a^\dagger}\,|\,0\rangle$, $\alpha \in \mathbf{C}$ となる事を示せ。

(2). 固有値を求めよ。

(3). 定数 b_0 を定めて規格化せよ。

注. $e^A \equiv \sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{n!}$

Ex.10. 2 自由度の振動子代数 $\langle a_i, a_i^\dagger\rangle_{i=1,2}$ such that

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{i,j}, \qquad [a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0,$$

を考える。

$$\begin{pmatrix} \widetilde{a}_1 \\ \widetilde{a}_2^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2^\dagger \end{pmatrix}, \qquad \theta \in \mathbf{R}$$

という、振動子代数の交換関係を保つ線形変換は、ユニタリー演算子 U を用いて

$$\widetilde{a}_i = U a_i U^\dagger, \qquad U \equiv e^{\theta(a_2 a_1 - a_1^\dagger a_2^\dagger)}$$

と表現できる事を示せ。

注. ヒント：両辺を θ で微分してみるか、ハウスドルフの公式

$$e^A B e^{-A} = e^{\mathrm{ad}A} B \equiv B + [A, B] + \frac{1}{2}[A, [A, B]] + \frac{1}{3!}[A, [A, [A, B]]] + \cdots$$

を用いて直接計算してみる。

レポート 問題３

(1). 授業の感想（内容は成績には無関係）

(2). 量子論の感想や思う所、自分なりに考えた点などがあれば書いて下さい。

科目名　代数幾何学特論 II　　**担当教官**　金銅 誠之

サブタイトル　Ｋ３曲面の周期

対象学年　大学院　　**２単位**　**選択**

教科書

参考書　Barth, Peters, Van de Ven, Compact complex surfaces, Springer
Griffiths, Harris, Principles of Algebraic Geometry

予備知識

ホモロジー群，多様体の初歩

講義内容

Ｋ３曲面の周期の概略とその応用について講義することが主目的であった．
具体的な講義内容は以下の通り：

1. Introduction（０．５回）
    - 楕円曲線の周期.
2. Kummer surface の誕生–１９世紀の代数幾何学（２．５回）
    - Grassmann variety.
    - Quadratic line complex, curves of genus 2, Kummer surface.
3. 整数係数二次形式（２回）
    - Root lattice.
    - 鏡映群と基本領域.
    - Indefinite unimodular lattice の分類.
4. Ｋ３曲面の周期の概略（０．５回）
    - Kaehler cone, period, Torelli theorem.
5. 層とコホモロジー（２回）
    - 層と Cech cohomology.
    - Line bundle と因子.
6. Deformation（２回）
    - Deformation, Kodaira-Spencer map, obstruction.
    - Local Torelli theorem.

7. 応用（１回）
    - Ｋ３曲面の自己同型群.
8. 周期写像の全射性（０．５回）
    - 周期写像の全射性

休講回数　2 回
その補填方法　何もしてません

学生の出席状況

履修届提出者は９人だが，単位取得者は４名．単位の必要でない学生も含めると，約１０名程度の出席者が最後まで残った.

成績の評価方法など

レポート提出者には単位を出したが，A，B，C の評価にはレポートの内容，出席点を加味した.

授業に対する工夫など

なるべく予備知識なしを仮定して話したつもりである.

その他

なし

講義の感想

代数幾何学専攻でない学生にはかなり特殊なテーマになりすぎた.

講義の感想（非公開部分）

科目名　**幾何学特論 II**　**担当教官**　**小林 亮一**

サブタイトル　Nevanlinna 理論における対数微分の補題の役割

対象学年　**大学院**　**２単位**　**選択**

教科書　講義ノート「Nevanlinna 理論における積分幾何的方法と対数微分の補題」を配布．適宜新しいバージョンに変えていった．

参考書　S. Lang; Surveys in Diophantine Geometry, Springer

予備知識

関数論と初等的な代数幾何を仮定した．全体として幾何学的なものの見方を強調した．

講義内容

講義を第１部，第２部に分けた．第１部では Nevanlinna 理論においてこれまで知られている第２主要定理をすべて統一的に導く原理をきちんと証明し，その効用と限界を明らかにした．第２部では一般の射影代数多様体への正則曲線に対する第２主要予想解決へのシナリオを提案，問題点をかみくだいて説明した．第１部では従来の非射影的対数微分の補題が理論の要である．一方，既に知られている第２主要定理と一般の第２主要予想の違いは，荒っぽく言えば可換の世界と非可換の世界の違いである．そして，非可換の世界では従来の対数微分の補題は無力である．そこで，第２部で提示したアイディアは，代数多様体全体に広がった非可換性をその部分多様体に押し込めることによって，非可換性を微分多様体に沿った特異性に変換し，その特異性を解析するための新しい型の対数微分の補題（射影的対数微分の補題）を考える，というものであり，Nevanlinna 理論のあるべき構造から見て自然なものと考えている．

講義の感想

講義をしたおかげで，久しぶりに研究が進展した．聴いて下さった方たちに感謝します．

科目名　確率論特論 II　　**担当教官**　長田 博文

サブタイトル　無限粒子系，統計力学風味の確率論

対象学年　大学院　　**２単位**　**選択**

教科書　なし
参考書　西尾真喜子　確率論
伊藤清　確率論
Karatzas, Shreve. ”Brownian motion and stochastic calculus”

予備知識

Brownian motion について理解していることが望ましい

講義内容

Lang 過程という R^d 上の無限粒子系（無限次元拡散過程）を典型的なモデルとして，そのマクロな性質を Kipnis-Varadhan 理論を解説することで講義した．同時に，これらを研究する上で必要となる，加法的汎関数の martingale 分解や R^d 上の点分布（configuration）についての Ruelle class の Gibbs 測度の構成の証明について講義した．

具体的な講義内容は以下の通り：

1. Introduction model の説明（１回）
2. 有限粒子系,（確率微分方程式と不変測度）（１回）
3. 無限粒子系,（１回）
4. KIpnis-Varadhan 理論（３回）
5. martingale 分解定理（１回）
6. Gibbs 測度の構成（３回）

講義の感想

２０００年度 集中講義内容要約

科目名　**基幹数理特論１**　**担当教官**　**伊藤 光弘**

サブタイトル　３次回転群 SO(3) と曲面上の接続の幾何学

対象学年　**４年**　**２単位**　**選択**

教科書　曲線・曲面と接続の幾何（小沢哲也　著）培風館

参考書　幾何学　下（クネーラー　著）シュプリンガー・フェアラーク　東京
Differential Geometry of Curves and Surfaces(M.Do Carmo)
Comprehensive Introduction of Differential Geometry　(M.Spivak)
曲線と曲面の微分幾何（小林昭七　著）掌華房

予備知識

線形代数　および多変数の微分積分，特にベクトル解析

講義内容

1) ３次回転群 SO(3) と接空間，リー環，指数写像，左（右）移動，オイラー角，
立体射影と一次分数変換，準同型写像 SU(2) $\to$ SO(3)

2) SO(2) 作用と SO(2) 束構造，モレー・カルタン形式，基本ベクトル場，接続

3) 水平・垂直ベクトル，水平リフト，平行移動，ホロノミー角，曲率形式

4) ホロノミー角と面積に関する定理，フーコーの振り子の振動面の日差角とホロノミー

5) 一般曲面上の単位接束と標準接続，接続理論の基本定理（ホロノミー角と曲率の面積分），
標準リフト，測地線，測地曲率，ガウス・ボンネの定理

講義の感想

最初から最後まで熱心に受講している受講生が多かった．こちらのうっかりした記号表記に対して受講生から疑問がすぐに出された．きちっとした説明がつねに求められているのだということを痛感した．

科目名　数理解析特論１　　**担当教官**　盛田 健彦

サブタイトル　中心極限定理による古典（熱）統計力学の基礎づけ

対象学年　４年　　**２単位**　**選択**

教科書　とくに指定しなかった．

参考書　A. I. Khinchin, Mathematical foundations of statistical mechanics, Dover 1949
伊藤 秀一，常微分方程式と解析力学，共立

予備知識

多変数解析の基礎（偏微分，陰関数定理，Gauss-Green の定理等の積分定理など）と Lebesgue 積分論の基礎（収束定理，積分の近似，Fubini の定理など）を仮定した．古典力学（Hamilton mechanics）の用語や定式化は使用したが，とくに必要な知識というわけではなかった．教養程度で学ぶ熱力学や分子運動論の知識があればさらにわかりやすかったと思うが，是非必要というほどではなかった．

講義内容

A. I. Khinchin が 1940 年代初頭に著わした Mathematical Foundations of Statistical Mechanics に沿って，熱統計力学の数学的（確率論による）基礎づけについて講義をした．

まず，古典力学における相空間の幾何から入り，問題を確率論の設定に乗せることを試みた．その後に局所中心極限定理を紹介し，これから従ういくつかの主張を導き出すした．これらはかなり抽象的なので，１原子理想気体の場合に具体的な計算をして，よく知られている結果と比較して見せた．自由度に関するエネルギーの等分配則，Maxwell-Boltzmann 分布などの法則がどのように導出されるかを確かめる操作がここに含まれていた．

本講義は，熱力学の諸法則を学ぶことを第一の目標とはせず，あくまでも，数学科学部で講義される解析学の方法を実際にどのように使って行くか，という過程を眺めて行くことに主眼をおいた．局所中心極限定理の証明には講義時間が不足なので，プリントを配布した．

講義の感想

最近，私どもが担当した４年生向け講義としては，かなり多くの学生が出席し，最後まで聴講してくれたことは有難かった．

科目名　**自然数理特論１**　**担当教官**　**西山 享**

サブタイトル　表現論の方法と考え方

対象学年　**４年**　**２単位**　**選択**

教科書　なし（ノート配布）

参考書　岡本清郷，フーリエ解析の展望，すうがくぶっくす 17，朝倉書店，1997.
山内恭彦・杉浦光夫，連続群論入門，新数学シリーズ 18，培風館，1996.
神保道夫，量子群とヤン・バクスター方程式，シュプリンガーフェアラーク東京，1990.
河添健，群上の調和解析，すうがくの風景 1，朝倉書店，2000.

予備知識

線型代数，群論・環論の初歩，テンソル積，簡単なルベーグ積分論（L^p 空間）

講義内容

講義では，有限群の場合に表現論の基礎的知識と，中心的な概念や考え方を紹介した．講義で触れることはできなかったが，そのような概念や考え方はコンパクト群やリー群，代数群などにも自然に拡張できるように配慮した．以下に具体的な内容を記す．

I　群の作用

群とその作用，推移的，効果的，自由な作用，随伴作用，旗への作用

II　有限群の表現

表現の定義，部分表現，商表現，テンソル積，表現の同型，Schur の補題，
表現の分解と完全可約性，表現の重複度

III　群環と行列要素

有限群の群環，群環の分解，指標と行列要素，直交関係

IV　誘導表現

誘導表現の定義，Frobenius の相互律，誘導表現と球関数，
球関数の構成，誘導表現と Hecke 環，誘導表現の指標

講義の感想

時間が足りなかったので，有限群の話しかできなかったのが残念である．群上の関数とか，あるいは interwiner を関数としてとらえるといった視点から話をしたつもりであるが，それが十分に伝わっていないかも知れない．演習とか復習が全くできなかったことも悔やまれる．

講義中，あるいは講義時間外にもっと積極的に質問する方が良いように感じた．レポートについてだが、論理的な文章をきちんと書けないものが目立った．また，集中講義ということもあるのだろうが，全く形式

的なレポートを出したものも多かったが，もっと自分で興味を持って，出題以上に自分で調べた問題を解くくらいの積極性が欲しいと思う.

科目名　　**基幹数理特論２**　　**担当教官　中村 佳正**

サブタイトル　可積分系・古典直交多項式・連分数展開アルゴリズム

対象学年　**４年**　　**２単位**　**選択**

教科書　なし
参考書　「可積分系の応用数理」（中村編・裳華房）
N. I. Akhiezer, The Classical Moment Problem and some related questions in analysis, Oliver & Boyd, 1965
E. M. Nikishin and V. N. Sorokin, Rational Approximations and Orthogonality, Amer. Math. Soc. 1991

予備知識

「線形代数学」と「微分積分学」および「フーリエ解析」「常微分方程式」の初歩

講義内容

近年，可積分系との思いがけない関わりに基づいて直交多項式に新たな関心が寄せられ，可積分系と直交多項式の双方で新しい成果が得られつつある．この一連の講義では，古典直交多項式と半無限戸田方程式を中心に解説する．具体的な内容としては，古典直交多項式の定義と基本的な性質，直交多項式上の流れとしての戸田方程式の導入，直交多項式の性質に基づく戸田方程式の求積法と行列式解，直交多項式に基づく戸田方程式の時間変数の離散化，連分数展開アルゴリズムの定式化などである．なお，講義中に出された約 10 個の問題について期限内にレポート提出を求める．

講義の感想

可積分系は数理物理学と密接に関係するが，この講義で述べたように，近年では応用数学との関わりも認識されるようになってきた．数学においても代数・解析・幾何の多くの分野と横断的に関連しており，自分のベースとなる分野に立脚しながらも，とりわけ，いろんな分野の用語が飛び交うような話題に先入観にとらわれない柔軟な視点から接することが求められる．しかし，提出されたレポートからみる限り，このような幅広いテーマに興味をもてた学生さんの割合はそんなに多くなさそうであった．あまり早い段階で自分の分野を決めてしまわないことをアドバイスしたい．

科目名　　社会数理特論１／応用数理特別講義 I (1/5)　**担当教官**　塩田 憲司
加藤 真弓

サブタイトル　コンピュータの課題と展望について

対象学年　**４年／大学院**　　**２単位**　**選択**

教科書
参考書

予備知識

講義内容

現在のコンピュータの基礎となっているフォンノイマン型のコンピュータが誕生してからまだ半世紀しかたっていないが，コンピュータシステムは社会のインフラを形成し社会活動する上でなくてはならないものになっている．

またコンピュータの技術革新は急激であり，特に近年の IT(情報技術) ブームにより，企業だけでなく個人の情報ツールとして情報化社会を乗り切るための必須アイテムになっている．

本講義ではコンピュータの先端技術の紹介だけではなく，ますます重要になってきているソフトウエア開発に関する最新状況と直面している課題および今後の展望についても時間を割きたい．

さらに，日常何気なく利用しているコンピュータ応用製品のインサイドに関しても紹介する．

ソフトウエア開発は抽象的な記号の列であるプログラムを組み合わせて，論理的に意味を持つ機能を実現するクリエイティブな仕事である．また，複雑な組み合わせ事象を数理的モデル化，最適化しプログラムとして具現化する能力が必要である．このためソフトウエア設計は数学的素養をかなり要求すると言える．

本講義の目次を以下に示す.

1. コンピュータの歴史
2. ワークステーション・パソコンの最近の動向
3. ソフトウエア開発上の重要課題
4. コンピュータの応用製品 (システム技術)
5. 将来のコンピュータ
6. 数学科の学生への期待

講義の感想

科目名　**社会数理特論１／応用数理特別講義Ｉ (2/5)**　**担当教官**　**原田 靖博**

サブタイトル　最近の金融経済情勢と日本銀行の役割

対象学年　**４年／大学院**　**２単位**　**選択**

教科書
参考書

予備知識

講義内容

1. 最近の金融経済情勢と金融政策運営
   わが国景気の現状判断とその下での金融政策運営に対する考え方を披露．とくに，新日銀法の下，金融政策におけるアカウンタビリティ向上に向けた取り組みや金融政策を巡る諸議論等について解説する．

2. わが国金融システムの現状と課題
   わが国金融システムに対する信認を回復・強化するために必要な課題を紹介．具体的には，
   ・日銀が担う資金決済機能とシステミックリスクの存在，およびセーフティネットの必要性，
   ・金融機関を取り巻くリスクとリスク管理の方向性，および金融機関監督のあり方，
   ・ＩＴ革命に伴う金融機関経営の変貌と金融業界の将来像，
   等を解説する．

講義の感想

多くの学生が熱心に聞いてくれたことに敬意を表している．ただ，私の話し方がまずかったのか，講義のあと，質問が全くなかったのには失望した．質問がなかった理由について教えて欲しいと思っている．

科目名　　**社会数理特論１／応用数理特別講義 I (3/5)**　**担当教官**　**黒沢 隆一**

サブタイトル　車の運転の定式化

対象学年　　**４年／大学院**　　　　**２単位**　　**選択**

教科書

参考書　数学モデルに関するもの：Mesterton Gibbson A Concrete Approach to Mathematical Modelling Addison Wesley 12910 ISBN 0-201-12910-8
安全運転に関するもの：平尾収　「歩行者　人動車　道」　三栄書房 ISBN4-87904-067-3

予備知識

講義内容

安全な，上手な運転とはどんな運転か，良い車の条件などお話し，最終的に車の運転を物理表現する方法についてお話しする．

1. 運転を物理的に表現する為の準備
   うまい運転と安全な運転とは
   (a) うまい運転　＝　加速度領域，―――　滑らかな運転
   (b) 安全な運転　＝　速度，変位領域――　先を読む＋行動
   $\longrightarrow$　譲る運転　：周りの車も意のままに
   不幸にして衝突した場合：シートベルトとエアーバッグの効
   (c) 車の性能：運転のし易さ
   安定性と操縦性：鞍上に人無く鞍下に馬無し
   ―――どの位言うことを聞くか把握要
   安定性：車の単体特性
   操縦性：操舵特性
   タイヤ特性：アンダー・オーバー
   車にあわせる―――眼球の運動特性
2. 運転行為の物理表現：環境力方程式の導出
   運転行為を分解：だんだん出鱈目は許されなくなる　$\rightarrow$　自由度がなくなる
   いろいろな踊り，運動，武術など体を動かすものは究極の形がある．
   環境に合わせる　　：安全な運転
   生理特性に合わせる：巧い運転
   車に合わせる　　　：車の性能，良い車

(a) 生理特性に合わせる：加速度領域

Weber-Fechner の精神物理学上の法則

ー人間の感覚を物理表現する式

上下動，前後左右動

(b) 環境に合わせる：速度と変位領域

見込んで運転

講義の感想

昼食後の眠くなる時間に長時間まじめに聞いていただきました．２割くらいの方が眠気と戦って一割くらいが戦死，頑張って途中から生きかえる人も居ました．

車の運動と交通安全について興味を持って聞いていただいたのが非常にうれしく，みなさんが，これから無事故で車の運転をエンジョイしてもらうことを願うばかりです．

ＯＨＰ，パソコンのプロジェクターが使いやすい形で設置したあり快適に使わせていただきありがとうございました．

科目名　**社会数理特論１／応用数理特別講義 I (4/5)**　**担当教官**　**大丸 隆正**

サブタイトル　ＦＡにおける計算機応用

対象学年　**４年／大学院**　**２単位**　**選択**

教科書
参考書

予備知識

講義内容

コンピュータと言うとパソコンやワークステーション，汎用計算機などを想像しがちであるが，現代の制御はほとんどがデジタル制御になってきており，その中心はマイクロプロセッサーというコンピュータである．これらのコンピュータは航空機・自動車や産業機械と言ったハイテク製品から洗濯機や冷蔵庫等の家庭電化製品に至るまで，およそ電気を使うあらゆる製品に応用されていると言っても過言ではない．本講義ではこれら「機器組込型」分野の中でＦＡ（Factory Automation）と言われる工場の自動化設備や産業用機械制御に使用されるコンピュータの応用について紹介する．また，年々巨大化する組込用ソフトウェアの特徴と開発技術の動向についても述べる．

本講義の概略内容を以下に示す.

- 計算機応用分野
  汎用計算機と機器組込型計算機
- ＦＡ制御機器の紹介
  ＰＣ，ＮＣ，サーボ，インバータ，ネットワーク
  放電加工機，レーザ加工機，ロボット
  ＣＡＤ／ＣＡＭ（ＣＡＴ，ＣＡＴ）
  ＣＩＭ，ＦＭＳ，ＦＭＣ
- 計算機制御の歴史
  マイクロプロセッサの登場
  サンプリング制御（離散値系）
  アナログからデジタルへ
- ＦＡ制御機器の最新動向
  表示設定機能の高度化
  ネットワーク化
  非線型制御・現代制御等高度制御技術の取込
- 制御用組込みＳ／Ｗの特徴
  リアルタイムＯＳ組込み

ＲＯＭシステム，専用Ｈ／Ｗ，高速・小メモリ
開発環境と実行環境

- Ｓ／Ｗ開発環境と開発手法の動向
- 組込ソフト開発事例（放電加工機制御ソフトウェア）

講義の感想

諸外国に比べ日本が非常に強い分野であるＦＡ分野，すなわち工場の自動化，生産の自動化に関する基礎的な理解が得られたものと思います.

毎年，数学科の方がどのようなテーマに興味があるのか非常に迷うところです．今回はどちらかというとハードウェア寄り，製品の概要・使われ方・使われる場所等にシフトしてみました.（昨年はどちらかというとソフトウェア寄りでした.）本当はもう少し数学との関わりが話せると良いのですが，工場というのはハイテクと言われる割に泥臭く，あまり高度な知識が要求されるところがありません.（私が知らないだけかもしれませんが.）何か要望等を事前に聞けるとある程度期待に添えるようにアレンジできると思います.

科目名　社会数理特論１／応用数理特別講義 I (5/5)　**担当教官**　島田 舒一

サブタイトル　デリバティブ取引とリスク管理について

対象学年　４年／大学院　**２単位**　**選択**

教科書
参考書

予備知識

講義内容

1. デリバティブ（金融派生商品）が内外の市場で飛躍的な成長を遂げ，金融ビジネスの中で大きな地位を占めている．このデリバティブ取引が，経済，金融活動に果たす役割や，経営上のリスク管理について論じる．
2. 実務的な観点から次の点を中心に話をする．
   - デリバティブが金融取引でどのように使われているか．
   - 金融商品にどのように生かされているか．
   - 企業経営においてどのような形でリスク管理が行われているか．
   - デリバティブが金融市場と経済に与えるインパクトと問題点．

講義の感想

経済のグローバル化，規制緩和を背景に，デリバティブが金融取引の中で活用される領域が広がり，その影響力も増してきています．数理学専攻の人々には，金融は理解しにくい分野の１つと思いますが，デリバティブを応用したこの分野は金融工学の発展と不可分です．数学専攻の人々に興味を持っていただければ幸いです．なお，４月に出版された今野浩著「金融工学の挑戦」（中公新書）を一読されることをお勧めします．

科目名　**社会数理特論２／応用数理特別講義 II (1/5)　担当教官　松崎 雅人**

サブタイトル　エネルギーと地球環境問題－都市ガスの果たす役割－

対象学年　**４年／大学院**　**２単位**　**選択**

教科書
参考書

予備知識

講義内容

地球温暖化が何に起因するのか，それがどのような影響を人類のもたらすのか．その要因の一つに炭酸ガスに拠るモノがある．エネルギー活用時に排出される炭酸ガスがその太宗を占める．エネルギー利用は人類にとって必要不可欠である．エネルギー源消費を極小化することで地球温暖化の抑制，出来れば回復する種々の取組み，あるべき姿を，モデル化し，都市ガスが果たす役割の観点から考察する．

講義の感想

（１）講義に望むに当たって

数理に直接的に関連する講義内容ではないので，説明用のＯＨＰの読み辛さが理解の妨げにならないようにと，パワーポイントで作成した資料をＯＨＰに落し用意した．加えて，以下の２点を中心とした気付きをして貰えれば，の思いで講義に望んだ．

（ア）２１世紀は，行動基準の一つとして地球環境問題を取組みは必須であり，それへの対応が何故求められるのかを理解する一助の場造り．

（イ）地球環境問題への種々の取組みを知り，己・個人行動のあり方の参考にする．強いて言えば，数理でモデル化する場合の視点・目の付け所（小宇宙的視点）を感じとる．

（２）講義を終えて

講義半で質問（注）を出し，講義終了後にメモを提出してもらうこととした．その結果も含め，以下の感想を持った．

（ア）情報提供を焦るあまり，説明が早すぎ十分理解を得られなかったのではないか．また，それを補うため，ＯＨＰのような安易な手法のみに拠らず，原稿をパワーポイントで作成してあったので，これを直接利用し説明に動きを付ける等，プレゼンテーション・ツールに工夫を要する．

（イ）具体的な事例を列挙・提示する必要があった．事実はもっと興味をひき，理解度を促進できる．習慣付けられていると思うので，事例は数理モデルであれば更に良い．講義の中から感じ取れということでは，不十分であると感じた．

（ウ）平素，数学の殻に閉じ篭り過ぎの傾向があるのか，数学そのものでの表現は手馴れているだろうが，文書での表現は慣れていないと感じた．モデル化・図化の方法での表現等を含め，地球環境問題への対処を表現するキッカケ作りになればと，今後を期待したい．

（注）質問１：地球環境問題対応について自分ならどうする (或いは，提言は？).

科目名　**社会数理特論２／応用数理特別講義 II (2/5)　担当教官　石川 茂樹**

サブタイトル　顧客情報分析による顧客理解と商品開発へのフィードバック

対象学年　**４年／大学院**　**２単位　選択**

教科書
参考書

予備知識

講義内容

本講義では，企業における顧客情報活用の事例を紹介話することにより，企業活動の現場での数値解析応用について理解を深めてもらうことを主眼としている．

１．ブラザー工業の企業紹介

２．Ｉ＆Ｄカンパニーの事業概要

３．顧客の理解と対応について

４．ブラザーにおける顧客情報の活用事例

５．ブラザーにおける数値解析の活用事例

６．数値解析への期待

講義の感想

非常に真面目に聴講して頂けて良かったと思います．今回は一方向の講義でしたが，次回はディスカッションをとり入れた双方向の講義にできればと思っております．

科目名　　社会数理特論２／応用数理特別講義 II (3/5)　担当教官　松沼 正平

サブタイトル　移動体通信市場の現状と将来ー広がるケータイの用途ー

対象学年　　４年／大学院　　　　２単位　　選択

教科書
参考書

予備知識

講義内容

「通信機器から生活用品に」「音声利用から文字・データ利用に」様相を変えてきているケータイ市場の現状，更に次世代システム IMT2000 の概要を紹介する．

そのような中で，現在のケータイ市場の課題，将来に向けての可能性とあるべき姿等について考えてみたい．

- 日本及び東海市場の概要
- Ｊーフォン東海の歩み
- 他社のサービス
- 次世代携帯電話
- 今後の移動体通信業界

講義の感想

ほぼ一年ぶりの名古屋大学での講義を終え，いささかホッとしています．学生諸君に，波乱に富んだ今のケータイ市場の魅力を知っていただき，また，秘められた将来の可能性に思いをいたしていただけたとしたら，私としてはほぼ満足です．

結果的に，お話しする内容を欲張り過ぎ，前段をもう少し整理しておいた方が良かったように思います．大変おとなしく静かに聴いていただけましたが，ケータイを使ったいくつかのＱ＆Ａにはかなり手際良く答えが返り，ケータイが学生諸君の生活に浸透していることを実感いたしました．

ケータイそのものについていくつかの質問を受けましたが，成長の予測や施策・商品の市場への影響・効果の判定等については残念ながら，まだまだ十分議論を呼び起こすことができなかったことは，私の一番の反省点です．

学生諸君にお願いしたいことは学問を産業の場で如何に役立てるかを考えていただきたいと云うことです．なぜなら数学は産業にとって重要な学問であり，また産業の場は数学を極める上でも多くの示唆が得られる有益な場と考えるからです．

科目名　**社会数理特論２／応用数理特別講義 II (4/5)**　**担当教官**　**奥村 誠史**

サブタイトル　最近の流通業の概況について

対象学年　**４年／大学院**　**２単位**　**選択**

教科書

参考書　日本経済新聞社「流通経済の手引き 2001」日経流通新聞編
日本経済新聞社「ゼミナール流通入門」田島，原田編

予備知識

講義内容

歴史的発展過程や現在の消費動向を通じて，流通業の役割を理解する．また，新しい手法を含め小売業の具体的な企業活動を見ながら，流通業の現況と課題について理解を深める．

（１）流通業の位置と役割

（２）効率化の進展と小売業の将来

（３）統計から見た小売業

（４）小売業の具体的な企業

（５）流通業界を取り巻く法的規制

（６）百貨店業界の現況

講義の感想

学生諸君の受講態度は，節度あるまじめな態度で，講義が進めやすく，その点では非常によかったが，講義内容に対する反応がなく，興味の程度が不明なのが物足りない気がする．

科目名　**社会数理特論２／応用数理特別講義 II (5/5)**　**担当教官　味藤 圭司**

サブタイトル　保険数理とアクチュアリー

対象学年　**４年／大学院**　**２単位　選択**

教科書
参考書

予備知識

講義内容

保険数理の基礎を学習し，かつ保険数理の専門家としてのアクチュアリーの本来的機能は，数理的アプローチによる保険社会のリスクマネージメントであることを理解する．

（１）アクチュアリーの歴史

（２）保険数学の基礎

（３）責任準備金

（４）資産運用リスク

（５）保険会社のリスク管理におけるアクチュアリー手法の例

（６）アクチュアリーの活躍フィールド

（７）アクチュアリー資格試験

講義の感想

相次いで破綻する生命保険会社が現われる中，現在の保険業界の抱える最も重大なテーマは「予定利率」問題であります．アクチュアリーはこの問題に少なからず関わっており，従来型のアクチュアリーの活動内容では，これからの保険会社経営はできないことがある意味で突きつけられた形となっています．したがって，現在の数理的管理手法の見直しといったアクチュアリーの直接担当領域のブレイクスルーをはじめとして，現在の保険に関する法理論，行政の在り方等幅広い分野での進化を進めなければなりません．

今回の講義を通じて，アクチュアリーという数理科学の一分野が，単に専門職としての必要スキルということに止まることなく，社会的にも重要な機能を担っていることを分かっていただき，意欲ある方にはこの世界に入ってきていただき，新しい発想で大いに活躍していただきたいと思います．

科目名　数論特別講義 I　**担当教官**　荒川 恒男

サブタイトル　SL(2,R) のセルバーグ跡公式入門

対象学年　大学院　**２単位**　**選択**

教科書　なし

参考書　Jurgen Fischer: An approach to the Selberg trace formula via the Selberg zeta-function. Lecture Notes in Math. **1253**, Springer, 1987.

予備知識

講義内容

セルバーグ跡公式は保型関数の理論では大変重要で種々の拡張や応用が与えられている．この講義では，J.Fischer の上記参考書に基づいて，群 SL(2,R) の一般のマルティプライヤー系に対するリゾルベントセルバーグ跡公式と付随するセルバーグゼータ関数の解説をした．応用として，テータ・マルティプライヤー系に対する跡公式と Selberg ゼータ関数，ヤコビー形式の空間の次元との関係なども説明した．

講義の感想

大学院生と個人的に話す時間もあり，大変楽しかった．大学院前期課程の学生には多少難しい内容と思われますが，例を挿入したこと，比較的易しい演習問題も用意しや点など，若干の工夫をしました．院生の方は大変よく聞いてくれたと理解しています．

科目名　　**複素幾何学特別講義 I**　　　　**担当教官　小松 玄**

サブタイトル　多変数函数論にあらわれる積分核の特異性入門

対象学年　　**大学院**　　　　**２単位　　選択**

教科書　なし

参考書

[1] C. Fefferman, The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains, Invent. Math. **26** (1974), 1–65.
[2] N. Kerzman, Singular integrals in complex analysis, Proc. Sympos. Pure Math. **35,2** (1979), 3–41.
[3] E. Ligocka, The Hölder continuity of the Bergman projection and proper holomorphic mappings, Studia Math. **80** (1984), 89–107.

予備知識

線形代数 (＋函数解析の初歩)，微積分 (＋特異積分などフーリエ解析の初歩)，一変数函数論の基礎 (＋多変数函数論の初歩も知っているともっとよくわかる)

講義内容

コーシーの積分公式は一変数函数論で最も基本的な結果だが，領域 Ω の境界上の線素 $d\sigma$ を使ってこれを次のように書いたときの $H(z,w)$ を **コーシー核** と呼ぶ：

$$f(z)=\int_{\partial\Omega} H(z,w)\,f(w)\,d\sigma(w),\quad H(z,w)\,d\sigma(w)=\frac{1}{2\pi i}\,\frac{dw}{w-z}\,.$$

第一式の右辺の積分は正則函数とは限らない f に対しても意味をもち，積分作用素 $f\mapsto \mathbf{H}f$ を定める．コーシー核 $H(z,w)$ は対角線集合 $z=w$ に特異性をもつ．これの多変数版 (**ヘンキン核**) を，一変数の場合をゆっくり復習した後に構成した．多変数函数論では領域の形状に応じて物事は異なるから，ヘンキン核の構成も Ω に応じて変わる．なお，領域 Ω には境界の滑らかさと強擬凸性 (局所的には球の摂動という意味) をいつも仮定した．

次に，ヘンキン核を第０近似として **ベルグマン核** $K^{\mathrm{B}}(z,w)$ の漸近展開をつくった．ベルグマン核の定める積分作用素 $f\mapsto \mathbf{K}^{\mathrm{B}}f$ は $L^2(\Omega)$ から正則函数の成す部分空間への直交射影である．$K^{\mathrm{B}}(z,w)$ $(z,w\in\overline{\Omega})$ は $z=w\in\partial\Omega$ にのみ特異性をもつから，ヘンキン核の領域内部への拡張には注意を要する (cf. Ligocka [3])．これを一変数の場合も込めて詳述した．それ以外は Kerzman による初等的な解説 [2] の内容であるが，構成に現れる積分核の族としては Fefferman [1] のものを主に使うことになる．これは複雑なので，概要の説明にとどめた．

最後に，上のベルグマン核の漸近展開の構成が (談話会で話した) **ソボレフ・ベルグマン核** に拡張される様子に粗く触れた．

講義の感想

集中して聴いてくれていたようで，私語もなくおとなしくノートをとっていた．しかし学問に関しては，

先生に対してもっと行儀が悪くてもよいのではないか．礼儀正しいのはよいが，愚問でもいいから質問が少しはないとさびしい．

科目名　**複素解析特別講義 I**　　**担当教官　満渕 俊樹**

サブタイトル　Multiplier Hermitian metric と その Einstein 構造の一意性

対象学年　**大学院**　　**２単位　選択**

教科書　中島啓著「非線形問題と複素幾何学」岩波講座現代数学
参考書　Yum-Tong Siu: Lectures on Hermitian-Einstein metrics for stable bundles and Kähler-Einstein metrics, DMV Seminar Band 8, Birkhäuser

予備知識

複素幾何，微分幾何に関するかなり専門的な知識

講義内容

完備なケーラー多様体 (M,ω) 上で，実数値関数 u の complex gradient として得られる正則ベクトル場をハミルトン型正則ベクトル場と呼ぶ．$f = f(x)$ を１変数関数としたときに，
エルミート計量 $\exp(-f(u))\omega$ を

multiplier Mermitian metric (of convex Hamiltonian type)

と呼ぼう．これは torsion をもつ計量であることから，その扱いは一般には非常に困難なことが予想されるにもかかわらず，以下に述べるように，Myers 型の直径評価，Li-Yau の熱核評価の類似，Einstein 概念の拡張，さらには松島の定理の一般化までもが成り立つ．

1. まず，最初の講義（月曜）では，multiplier Mermitian metric (of convex Hamiltonian type) に対して， Ricci 曲率や Einstein 構造などの基礎概念を定義した．そして，Kähler-Ricci soliton や（二木障害が消えないファノ多様体に対して定義される）"Kähler-Einstein" 計量が，multiplier Mermitian metric の特別な場合として出て来ることについて述べた．
2. 火曜日の講義では，multiplier Hermitian metric に対して，松島の定理の一般化を formulate し，その証明について述べた．
3. 水曜日の談話会では，multiplier Mermitian metric を考えるひとつの動機付けとして Hitchin-Kobayashi correspondence for manifolds について詳しく述べた．
4. 木曜日の講義では，f が凸関数であるような multiplier Mermitian metric に対して，Myers 型の直径評価が成り立つ証明の概略を述べた．
5. 最後に，金曜日には f が凸関数であるような multiplier Mermitian metric に対して，Li-Yau の熱核評価の類似が成り立つことを，証明まで込めて述べ，結論として multiplier Hermitian metric の Einstein 構造に関する一意性定理が従うことについて述べた．

講義の感想

かなり専門的なことを，しかも細部にわたって証明まで詳しく述べることが出来ました．講義をする方の

一方的な感想を述べさせてもらうならば，充実感を大いに味わった集中講義でした．

科目名　**トポロジー特別講義 I**　**担当教官　深谷 賢治**

サブタイトル　トーラスのミラー対称性

対象学年　**大学院**　**２単位　選択**

教科書　論文「Mirror symmetry of Abelian variety and multi theta functions」（深谷のホームページ，http://www.kusm.kyoto-u.ac.jp/~fukaya/に PDF ファイルがおいてある）

参考書　アーベル多様体，Mumford，oxford 大学出版局．シンプレクティック幾何学（深谷，岩波講座現代数学の展開）の最後の章．

予備知識

予備知識は多様体とベクトル束，後半ではコホモロジー（チャーン類）を用いるが，チャーン類の一般論は知らなくてもいわれたことを認めれば何とかなるであろう．

講義内容

ホモロジー的ミラー対称性は，シンプレクティック多様体のラグランジュ部分多様体およびそのフレアーホモロジーと，複素多様体の解析的連接層およびその層係数コホモロジーの，関係を主張するものである．

この内容は多岐にわたり，理解には多くの数学的知識が要求される．しかし，トーラスの場合に限ると，そのかなり部分が初等的な議論で確かめることが出来る．それには，シンプレクティック幾何学の概正則曲線の理論や，複素多様体論の深い部分は必要なく，シンプレクティック多様体の定義や複素多様体の定義ぐらいがわかっていれば理解可能である．逆に，トーラスのホモロジー的ミラー対称性を確かめる過程で，トーラス上の直線束のリーマン・ロッホの定理やテータ関数など，アーベル多様体の理論の一部を説明することが出来る．また，ホモロジー的ミラー対称性をかなりの場合に検証できるのは，現状ではトーラスの場合しかない．

そこで，この講義では，シンプレクティックトーラスとそのラグランジュ部分トーラスや複素トーラス，後者の上の正則ベクトル束の概念の定義から初めて，シンプレクティックトーラスのミラートーラスである複素トーラスの構成，ラグランジュ部分トーラスに対応するミラートーラス上の正則ベクトル束の構成，テータ関数とリーマン・ロッホの定理に基づくフレアーホモロジーと層係数コホモロジー一致の証明（双方の定義から始める），などを行う．

講義の感想

上記の予定した内容はほぼ説明したが，アーベル多様体の復習はあんまり詳しくできなかった．学生にどの位理解される内容であったか不明であるが，１０数年前に名古屋でした集中講義（グロモフの Almost flat manifold theorem の解説）より易しかったと期待している．

科目名　**数理物理学特別講義 I**　**担当教官**　**齋藤 恭司**

サブタイトル　The polyhedron dual to the Coxeter arrangement

対象学年　**大学院**　**２単位**　**選択**

教科書　なし
参考書　なし

予備知識

線形代数，実数不等式，群

講義内容

「実超平面系が空間を単体錐に分割するならば超平面余集合の複素化は $K(\pi,1)$ 空間となる (Deligne)」という結果に本質的となる双対多面体を，平坦構造（いわゆるフロベニウス多様体）に現れる原始ベクトル場を積分して，discriminant を平行移動させる運動により記述した．

講義の感想

これまでしばしば，名古屋大学で集中講義をしてきましたが，これだけ多くの出席者は，近年なかった様に思います．質問は主に教官の方から出たのですが，それでも学部学生より講義の後，質問や文献の問いあわせ受ける等，積極的な好印象を受けました．それに比して，私の方の準備不足が響き，充分納得ゆく講義ができず，残念にも，申し訳なくも思っています．いろいろ未完成な部分もある話しであり，Deligne の定理の証明と結びつける点も未解明なので，これを機に，研究しなおしてみようかと思っています．その様な機会を与えて下さった事に感謝します．

科目名　解析学特別講義 I　　**担当教官**　竹井 義次

サブタイトル　線型常微分方程式の完全 WKB 解析をめぐって

対象学年　大学院　　**２単位**　**選択**

教科書
参考書

予備知識

講義内容

量子力学で基本的な１次元シュレディンガー方程式を解析する一つの方法として「WKB 近似」と呼ばれるものがある．これは，WKB 解と呼ばれる無限級数解を近似解として利用することにより固有値問題等の解析を行う手法であるが，WKB 解が発散級数解であるという困難もあって，数学的には決して扱いやすいものではなかった．この WKB 解に対して「ボレル総和法」を適用して解析的な意味を与え，単なる近似解法であった WKB 法をより“ exact な ”解法にしようとするのが「完全 WKB 解析」である．実際，ボレル総和法を用いることで，固有値問題やモノドロミー問題といった微分方程式の解のグローバルな挙動に関する問題を具体的に議論することが可能になる．

この講義では，特に線型常微分方程式に話を絞って，完全 WKB 解析の入門的な部分からその現状までを概説した．ボレル総和法の定義からはじめ，２階のシュレディンガー方程式の WKB 解の基本性質—特に，そのボレル変換の特異点の構造や接続公式—を比較的詳しく解説した後，その応用としてフックス型方程式のモノドロミー群の完全 WKB 解析による具体的な計算法を（例を用いて）説明した．更に，高階の常微分方程式への一般化に関する最近の進展についても簡単に論じた．

講義の感想

ほとんど予備知識を仮定せずに最近の話題まで話そうとしたのですが，出席してくれた大学院生の方にこちらの意図がうまく伝わったかどうか，あまり自信はありません．この話の数学全体での位置付けを明らかにする為に，学部３年生程度の内容である複素領域における線型常微分方程式論の復習から始めてみましたが，その結果として後半はやや駆け足の説明になってしまいました．もう少し時間をかけて中心的な部分を説明できれば良かったのですが．講義の際の状況や提出してもらったレポートから判断する限り，前期（修士）課程の大学院生には後半はかなり厳しかったようです．それでも，何人か出席してくれていた後期（博士）課程の大学院生には，雰囲気くらいは伝わったのではないかと（希望を込めて）思います．

なお，要望が一つ．同じ週に同じ教室で（１０分間の休憩をはさんで）桂田先生の集中講義も行われたのですが，講義をする側の意見を述べさせてもらえれば，２つの集中講義を同じ教室で行う場合には（少々の延長の可能性や出席者の質問に答える時間的余裕を見込んで）できれば３０分程度の間隔を２つの間に設けて頂けると助かります．

科目名　**関数解析特別講義 I**　**担当教官　桂田 昌紀**

サブタイトル　ゼータ関数の平均値定理と Mellin-Barnes 型積分

対象学年　**大学院**　**２単位　選択**

教科書

参考書

[1]M. Katsurada and K. Matsumoto, *Asymptotic expansions of the mean values of Dirichlet L-functions*, Math. Z. **208** (1991), 23–39.

[2]M. Katsurada and K. Matsumoto, *Explicit formulas and asymptotic expansions for certain mean square of Hurwitz zeta-functions I*, Math. Scand. **78** (1996), 161–177.

予備知識

講義内容

この講義では，ゼータ関数の平均値に Atkinson の方法と Mellin-Barnes 型積分表示を応用して，その漸近展開を導くことを二つの問題を例にとって解説する．以下これについて詳しく述べよう．

リーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ やディリクレ L 関数 $L(s,\chi)$ の臨界領域 $0<\mathrm{Re}\,s<1$ における虚軸方向の漸近的ふるまいを研究することは，著名なリーマン予想やリンデレーフ予想へのアプローチの一つとして極めて重要である．ここで調べたい量の平均値をとることで解析的整数論における種々の方法を有効に活用することができ，単独の対象を考察するよりも鋭い結果が期待される．論文 [1] では、Heath-Brown (1981), Motohashi (1985) らによって研究されてきた，法 q の全ての指標 χ に対する $L(s,\chi)$ の２乗平均

$$\sum_{\chi(\bmod q)} |L(s,\chi)|^2$$

の q^{-1} に関する漸近展開を最良の形に決定したが，ここでは二乗平均を各々独立な変数を持った２つの関数の積の特殊な場合とみなして考察する，いわゆる Atkinson (1949) の方法が中心的な役割を果たす．この問題の場合には u, v を独立変数として積 $L(u,\chi)L(v,\overline{\chi})$（$\overline{\chi}$ は χ の共役指標）を考察することになるが，その際の本質的困難はこれから派生する二変数二重ゼータ関数の解析である．本講義の前半部では，この二重ゼータ関数に対し Mellin-Barnes 型積分表示を導入することで，[1] で導かれた漸近展開の簡明かつ見通しの良い別証明を与える．

他方，フルビッツゼータ関数 $\zeta(s,\alpha)$ は $\zeta(s)$ の各項を $\alpha(>0)$ だけシフトしたものとみなすことができ，$\zeta(s,\alpha)$ の漸近的ふるまいの α に関する平均を考えることで，本来の $\zeta(s)$ へのフィードバックが期待される．論文 [2] では Koksma & Lekkerkerker (1952) 以来多くの数学者によって研究されてきたパラメタ α に関する $\zeta(s,\alpha)$ の２乗平均

$$\int_0^1 |\zeta(s,\alpha)-\alpha^{-s}|^2 d\alpha$$

（ここで $\zeta(s,\alpha)$ の $\alpha=0$ における特異性を除くため α^{-s} の項を取り去っている）に対し，$(\mathrm{Im}\,s)^{-1}$ に関する完全な漸近展開を与えた．本講義の後半部では，前述の Atkinson の方法に Mellin-Barnes 型積分表示を組み合わせることで，上述の漸近展開の [2] とは異なる証明を与える．ここで Mellin-Barnes 型積分表示を導入することのメリットとして，議論が簡明かつ見通しの良いものとなるだけではなく，ガウスの超幾何

関数の変換公式・隣接関係式・特殊値の公式などを組織的に応用することができ，[2] の複雑な計算の背後に超幾何関数の諸性質が内在していることが示される．

なお，講義の最初の部分では，漸近展開に関する基本的事項についてまとめて解説する予定である．

講義の感想

講義はほぼ上の要項の通りに行なうことが出来た．この講義におけるゼータ関数の取り扱いの underlying structure として超幾何関数の諸性質の活用があったが，これに習熟していない聴講者には少々難解だったかもしれない．もう少し特殊関数論（少なくとも超幾何関数の Mellin-Barnes 型積分表示）について詳しく解説すべきだったことが今回の反省点である．この講義には遠方からお越し下さった方も少なからず居られ，皆さん大変熱心に聴講して下さったことを感謝いたします．

科目名　**幾何学特別講義 I**　**担当教官**　**大鹿 健一**

サブタイトル　双曲幾何とクライン群

対象学年　**大学院**　**２単位**　**選択**

教科書　「離散群」大鹿健一
参考書

予備知識

位相幾何の基礎，微分幾何の基礎

講義内容

クライン群の定義から初めて，メビウス変換の分類と双曲空間への作用，極限集合の定義と性質，凸芯と最近点写像の定義と性質，幾何的クライン群に対して商空間のコンパクト化などの基礎的理論を出来るだけ予備知識なしで理解できるよう紹介した．

講義の感想

講義に参加してくれた方々は熱心に聞いてくれた．実際に履修している学生はあまり多くなかったのであるが，履修申告している学生は，レポートも提出し，内容もよかった．

科目名　　**代数学特別講義 I**　　　　　　　　　　**担当教官　中村 郁**

サブタイトル　アーベル多様体のモジュライのコンパクト化

対象学年　　**大学院**　　　　　　　　　　**２単位**　　**選択**

教科書
参考書

I. Nakamura, *Stability of degenerate abelian varieties*, Invent. Math. **136** (1999), 659–715.
梅村　浩,　楕円関数論,　東大出版会 2000.
向井　茂,　モジュライ理論 1,2,　岩波書店 2000.
D. Mumford, *Abelian varieties*, Oxford Univ. Press, 1974.

予備知識

楕円曲線 代数幾何学の初歩, 表現論の初歩

講義内容

ステイブル曲線の Moduli 空間が非特異な曲線の Moduli 空間のコンパクト化であるのと同様な意味で，アーベル多様体の Moduli 空間 $A_{g,N}$ の自然な幾何学的なコンパクト化 $SQ_{g,N}$ を構成する．コンパクト化のための自然な方法は３通りある，

1. Stability (Mumford GIT)
2. テータ関数による Embedding の極限,
3. Mumford の One-parameter family である．

結論から述べると，これらは本質的に同値な概念であり，同一のよいコンパクトな退化したアーベル多様体を与え，$A_{g,N}$ の同じコンパクト化 $SQ_{g,N}$ を与える．
平面３次曲線 C が GIT-Stable であるための必要十分条件は，C が Hesse の３次曲線

$$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 - \mu x_0 x_1 x_2 = 0 \quad (\mu \in \mathbf{P}^1)$$

のひとつと同型となることである．一方，Hesse の３次曲線は Heisenberg 群という位数 27 の有限群で不変な３次曲線として特徴づけられる．$\mu = \infty$ のとき Hesse ３次曲線は３本の直線の輪となり，$\mu = \infty$ の付近では，Hesse ３次曲線の族は，Mumford の One-parameter family の特別なものと同一視できる．一見異なるこれらの主張は全て同値である．Hesse cubic に関するこの事実は高次元に一般化できる．
講義はつぎのように行われた．

第１回 Hesse ３次曲線の Moduli 理論，Heisenberg 群の表現論による approach

第２回 Kempf の定理, その証明の概略と応用, $X(N)$ と $SQ_{1,N}$

第３回 Theta 関数の極限と退化アーベル多様体,
　　Raynaud 系列, 代数的 Theta 関数

第 4 回 $SQ_{g,N}$，(1)-(3) の同値性の証明

講義の感想

研究者の方の出席がおおかったので，ついつい易しい事実の証明を省略することになり，予定以上のペースで講義は進みました．私としては楽しい充実した 5 日間でしたが，学生諸君には少々厳しすぎる講義になったと思います．夜は 2 度もつきあっていただいて，水曜日はとりわけ，$SU(2)$ と $SL(2)$ の表記の持つ社会的な意義について新しい角度から理解を深めることができました．

科目名　数理解析・計算機数学特別講義 I　　**担当教官**　松本 眞

サブタイトル　ガロア群の代数群による完備化とモチーフ

対象学年　大学院　　**２単位**　**選択**

教科書　特になし
参考書　特になし

予備知識

特に仮定しないが，射影極限や関手などのカテゴリー論の初歩や群論，ガロア群についてある程度の知識が望ましい．

講義内容

初日: ガロア群の基本群への表現に関する Deligne-伊原の予想のステートメントを述べた．次に pro 代数群の定義をし，淡中圏を pro 代数群の表現のカテゴリーに同値なものとして定義した．

二日: 群 G の線形表現で，あるフィルトレーションが存在して unipotent になるもの全体が淡中圏になることを示し，その淡中基本群が G の Malcev completion，すなわち G からの像が Zariski dense になるような群準同型を許す代数群の射影系で与えられることを示した．
それを表現付きの群に一般化し， relative Malcev completion ならびに weighted completion の定義を行った．

三日: G の weighted completion の構造が G の連続コホモロジーによってかなり決まることを示した．この構造定理と，Soule のガロアコホモロジーの計算とを合わせて，ガロア群の weighted completion の unipotent part の Lie 環が weight 3,5,7,... に自由生成元を持つ自由 Lie 環であることを示した．ここから Deligne-伊原の予想の「生成」部分を示した．

四日: 三日に述べた構造定理の証明を行った．

講義の感想

初日から，ガロア群の基本群への作用のようなあまり学生になじみのない対象を扱い，またカテゴリー同値や代数群の pro-object など，抽象的な対象を扱ったため，とっつきにくい講義になってしまったと思う．2 日目に,「単位を出すための簡単な問題」のつもりで,「G の Abel 化が有限群であるとき，標数 0 の体上の G の Malcev 完備化は自明であることを示せ」というレポート問題を出したが，解答提出者がいなかった．

講義に出席して頂いた藤原一宏氏には，授業で与えた淡中圏の定義の問題点を初め，有用な助言を授業中にもたくさん頂いた．斎藤秀司氏はモチーフの圏が淡中圏であるかがどこまで知られているかなど，貴重な助言を頂いた．

科目名　**代数幾何学特別講義 I**　**担当教官**　**島田 伊知朗**

サブタイトル　消失サイクルの幾何学と一般 Hodge 予想

対象学年　**大学院**　**２単位**　**選択**

教科書
参考書

予備知識

講義内容

$\mathbb{P}^N$ を複素射影空間，$X \subset \mathbb{P}^N$ を超曲面の非特異な n 次元完全交叉とする．X の中間次元のホモロジー群 $H_n(X)$ (の primitive part) は，消失サイクルとよばれる，X のなかに埋め込まれた n 次元球面で代表される元により生成されることが知られている．消失サイクルは具体的に記述されるので，超曲面の完全交叉のトポロジーは手にとるようによくわかる．

この講義では，消失サイクルに関する古典的な Lefschetz の仕事を解説した後，シリンダー準同型を使った一般 Hodge 予想への応用を述べる．

完全交叉 X に含まれる k 次元代数的サイクルの族 $\mathcal{W} = \{W_t\}_{t\in F}$ (F はこの族のパラメーター空間) を考える．$\mathcal{W}$ がある性質を満たせば，$\mathcal{W}$ に付随したシリンダー準同型

$$H_{n-2k}(F) \to H_n(X)$$

の像が X の消失サイクルを含むことを示すことができる．この結果を使うことにより，Fano 完全交叉の中間次元のホモロジー群が，部分多様体の上にのっているサイクルで代表される元により生成されることがわかる．

講義内容

1. 消失サイクル
2. モノドロミーの既約性
3. 一般 Hodge 予想とシリンダー写像
4. シリンダー写像の全射性

講義の感想

熱心に聞いてくださった学生の方に感謝します．

講義内容に訂正があります．消失サイクルがホモロジー群のなかで torsion となっている可能性を無視していました．超曲面の非特異な完全交叉のホモロジー群は torsion をもたないので我々が目的とした応用に関しては問題がないのですが，一般的な状況では消失サイクルが torsion となっている可能性があります．

講義中には触れることができませんでしたが，グレブナー基底を用いてシリンダー写像の全射性を示すこともできます．このことについては，私のホームページ

`http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~shimada/preprints.html`

においてあるプレプリント

Vanishing cycles and the generalized Hodge conjecture

を見てください．消失サイクルとシリンダー写像に関して講義中に述べた定理の詳しい証明も書いてあります．

科目名　**代数学特別講義 II**　**担当教官**　**有木 進**

サブタイトル　ヘッケ環の表現型について

対象学年　**大学院**　**２単位**　**選択**

教科書
参考書
(1) 永尾・津島著, 有限群の表現, 裳華房.
(2)Anderson and Fuller, Rings and Categories of Modules, GTM **13**, Springer.
(3)Auslander, Reiten and Smalo, Representation Theory of Artin Algebras, Cambridge Studies in Advanced Math. **36**, CUP.
(4) 有木著, $A^{(1)}_{r-1}$ 型量子群の表現と組み合わせ論, 上智大学数学講究録.

予備知識

ヤング図形に関するごく基礎的な常識の他には，有限次元代数の加群の取り扱いに慣れていれば十分である．代数系の講義において有限群の通常表現については習っているはずであるから，それがモジュラー表現になったときどうなるかについて永尾・津島の名著であらかじめ予習しておくことが望ましい．概念としては，完全系列・射影加群・直既約加群・直和因子と Krull-Schmidt Theorem がわかっていればよい．

この講義で扱うヘッケ環とは，鏡映群という特殊な群の群環を変形したものであるから，対称群の群環の場合がわかっていれば講義の内容もそのアナロジーで理解できるであろう．

また古典型ヘッケ環がどう使われているかについてある程度の漠然とした認識があれば，この環の研究の必然性もわかり興味がより増すであろう．

講義内容

１日め： ヘッケ環の生成元と基本関係による定義をしたのち，A 型の場合に T_w という元が定義できて基底をなすことを示す．次に Dipper-James-Mathas によって導入された $G(m,1,n)$ 型ヘッケ環の基底 m_{st} を定義し，生成元 T_i を掛けたときに $T_i m_{st}$ を再びこの基底で表わす計算規則について説明する．

２日め： $T_i m_{st}$ の計算方法をもとに standard basis theorem を紹介し，次に artin 環の基礎事項である森田同値と森田の定理を説明する．

３日め： Dipper-Mathas による $G(m,1,n)$ 型ヘッケ環の森田同値定理を証明する．

４日め： 対称多元環, DTr, ループ作用素 Ω, Auslander Reiten sequence, AR quiver について説明し，例をやったのち artin 環が有限表現型になるための必要十分条件を与える Auslander-Reiten の定理について説明する．また最後にそのヘッケ環のモジュラー表現への応用について触れる．

講義の感想

集中講義のつねであるが，出席者の中心はプロの数学者であり学生は一部にすぎない．これは，講義者にとってはよい聴衆をもつということであり，ありがたいのであるが，他方学生を半ば落ちこぼしつつ講義が

進むことになる．という矛盾を抱えつつなるべくケアはしました．最後まで出てくれてありがとう，難波君．レポート提出よろしくね．