１９９９年度講義内容要約

名古屋大学 理学部 数理学科・大学院 多元数理科学研究科

１９９９年度講義内容要約目次

前期講義内容要約

大学院（昼夜開講コース）

後期講義内容要約

１年

２年

３年

４年

大学院

集中講義内容要約

４年

大学院

１９９９年度 前期講義内容要約

１９９９年度前期時間割表（数理学科）

<table>
<tr><th></th><th></th><th>１年生</th><th>２年生</th><th>３年生</th><th>４年生</th></tr>
<tr><td rowspan="4">月</td><td>1</td><td>数学展望 I
（浪川）</td><td></td><td rowspan="2">群論
（橋本）</td><td rowspan="2">体論
（松本）</td></tr>
<tr><td>2</td><td>数学演習 I
（笹原・鍜島）</td><td>集合と位相
（林）</td></tr>
<tr><td>3</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td>演習代数
（吉田）</td><td rowspan="2">高次位相特論１
（木村・坂上）</td></tr>
<tr><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">火</td><td>1</td><td rowspan="4"></td><td>数学基礎 V
（大沢健）</td><td rowspan="2">常微分方程式
（石毛）</td><td rowspan="2">多様体の Topology
（大和）</td></tr>
<tr><td>2</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>3</td><td>演習解析
（千代延）</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">水</td><td>1</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="2">抽象ベクトル空間
（行者）</td><td rowspan="2">基礎解析 III
（尾畑）</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="4">木</td><td>1</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="2">解析学序論
（三宅）</td><td rowspan="2">多項式論
（向井）</td><td rowspan="2">大域解析
（名和）</td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>数学演習 III
（古田）</td><td>演習幾何
（吉川）</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">金</td><td>1</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">幾何学要論
（金井）</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>自然数理特論１
（長田）</td></tr>
<tr><td>3</td><td>数学演習 IV
（佐野）</td><td>演習幾何
（佐藤猛）</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td></td></tr>
</table>

１９９９年度前期時間割表（大学院）

		４年生と共通	大学院のみ
月	1		
	2		基幹数理特論１（岡田）
	3		
	4		
火	1		
	2		整数論（鈴木浩）
	3		
	4		
水	1		
	2		数理解析特論１（青本）
	3		
	4		
木	1		
	2		自然数理特論１（太田）
	3		数理物理学（II）（南）
	4		
金	1		
	2	確率論（長田）	
	3		リー代数と表現（Kirillov）
	4		

１９９９年度前期時間割表（大学院昼夜開講コース）

月	5	
	6	
火	5	応用系講義（認知構造数理学） 担当：御橋 廣眞
	6	
水	5	応用系討論（経済構造数理学） 担当：御橋 廣眞
	6	
木	5	数学基礎 II（構造変分学） 担当：尾畑 伸明
	6	
金	5	数学基礎 I（数理変分学） 担当：小林 亮一
	6	

科目名　　数学展望 I　　　　**担当教官**　浪川 幸彦

サブタイトル　直交多項式と連分数

対象学年　　**１年**　　　　**２単位**　　**選択**

教科書　なし
参考書　マクグロウヒル 数学公式・数表ハンドブック，オーム社
高木貞治，初等整数論講義，共立出版

予備知識

特に仮定しない

講義内容

１．様々な多項式 ⋯ Legendre の多項式，Chebyshev の多項式についての興味ある公式について学ぶとともに，直交多項式という統一した見方があることを知る．

２．連分数 ⋯ 小数とは異なる実数の近似の仕方があり，整数論の世界とつながっていることを学ぶ．

具体的な講義内容は以下の通り：

1. 様々な多項式
   - Chebyshev 多項式
   - Legendre 多項式
   - 直交性とその応用
2. 連分数
   - ユークリッドの互除法とその応用
   - 連分数
   - 無限連分数
   - 最良近似分数
   - 同じ展開を持つ連分数
   - 循環連分数

講義の感想

前半の講義では，高校・大学１年での知識をフルに使うとかなり高度な数学が出来ること，一般論でない面白い材料があって，しかも深い一般論につながっていることを見せることを目的とした．後半の講義では，簡単なことでありながら，あまり一般に知られていない，今は「廃れた」理論の持つ面白さ，深さを紹介した．

結構骨があったはずだし，単なる入試問題と違った奥行きを感じ取ってくれればと思った．実際少なからぬ学生が興味を持っていろいろ質問に来，間違いも訂正してくれた．しかしその一方で後ろの席でノートを取っているだけの受講者も少なからずいたようで気になる．

試験は行わずレポート提出とした．従って講義内容をどの程度理解したか直接には分からない．それでも何か新しい数学の世界を見たという記憶が残って，後の数学学習の動機付けになってくれればある意味で十分だと思う．

科目名　数学演習 I　　**担当教官**　笹原 康浩・鍜島 康裕

サブタイトル

対象学年　１年　　**２単位**　選択

教科書
参考書

予備知識

講義内容

一年生向けに微積分と線形代数の演習を行なった.

微積分では，極限の計算，実数体の位相，微分の初等的な性質，テイラー展開などに関連する問題を扱った.

線形代数では，数ベクトル空間以外の線形空間の例，部分線形空間，基底，線形写像などに関連する問題を扱った.

講義の感想

毎回１０問以上の解答がなされ，それなりに活況であったが，いつも解く学生は１０名前後に限られていた．また，少し思考を要する問題に対しては，解答がなされなかった.

科目名　　**数学基礎 V**　　　　**担当教官**　**大沢 健夫**

サブタイトル　関数論の初歩

対象学年　　**２年**　　　　**１．５単位 必修**

教科書　L．アールフォース著，複素解析（現代数学社）［シラバスには Bak-Newman のテキストがあげてあるが，シラバスの原稿〆切後生協書籍部から品切との連絡があり，変更した.］

参考書

予備知識

Cauchy の定理など，一般的な命題を理解するために，特別な関数に対してだけでなく，微分，積分の概念と基本的性質（置換積分など）を証明つきで知っていることが必要.

講義内容

複素数，初等関数から Cauchy の定理をへて留数定理までを証明ぬきで３回で概説し，その後テキストに沿って重要と思われる部分を丹念に述べたつもりである．内容的には，正則関数の三つの定義とそれらの同値性，Goursat の定理，単連結領域上の Cauchy の定理，積分定理と計算例，Cauchy の定理の一般形を認めた上で，一般領域上の留数定理，さらに定積分で留数計算に帰着するものの代表例について類型とその計算例，留数定理の他の応用として，偏角の原理，零点の位置の連続性（助変数に関する）を紹介した.この間，複素積分の定義を少なくとも３回繰り返し述べた.（正則関数と実２変数の解析関数や C^∞ 級関数との違いについては１回しか述べなかった.）

講義の感想

原始関数をもつ関数の複素積分は積分路のとり方によらないということを３回は述べたはずだが，これが基本的であるとの認識を徹底させるにはあと一工夫を要する感じを受けた．関数項の級数についても，級数展開のところで基本的なところを述べたのだが，無限級数については Hurwitz の定理や Riemann の写像定理との関連が深いので，等角写像論をやる前にまとめて述べた方がよいかもしれない．これは今後の検討課題になり得る．要は，半期で複素関数の初歩を学ぶ時の達成目標としては，Cauchy の定理を円板や単連結領域の場合にだけでもその何たるかを把握し，ある種の定積分の計算にそれを応用できるようになるということが基本だが，数理学科においては厳密性とともに，対象と理論の論理構造に対するより深い理解を要求すべきで，試験内容もその要素を含めた.

科目名　　抽象ベクトル空間　　　　**担当教官**　行者 明彦

サブタイトル

対象学年　　２年　　　　**４単位**　　**必修**

教科書
参考書　佐武一郎，線形代数学，裳華房

予備知識

特に仮定しない

講義内容

以下の項目について講義した：

1. 行列・行列式・階数・連立一次方程式などの復習（2 回）
   - 行列の四則，行列式，基本変形，階数.（特に行列の対角化の説明の布石として，行列をブロックに分けて計算する方法を解説した.）
   - 一次独立，一次従属，一次結合.
   - 前項目の動機付けのために，連立一次方程式の解法を見直し，また，これらの概念の幾何学的意味も説明した.
2. ベクトル空間についての基本概念（1 回）
   - 体，体上のベクトル空間，部分空間.
   - 部分空間の生成，基底，次元.
   - 商空間，直和.（演習問題として扱った.）
3. 線形写像についての基本概念（2 回）
   - 線形写像，核，像，逆像.
   - 階数が像の次元に等しいことを示した.
   - 像の次元と核の次元の関係.
   - 前項目の関係式が，連立一次方程式の解空間の次元公式にほかならないことを強調した.
   - 準同形定理（テンソル積を導入するための布石として「商空間の functorial property による特徴づけ」であるという点を強調した.）
4. テンソル積（2 回）
   - テンソル積の具体的な構成.

- テンソル積の functorial property による特徴づけ.
- 交代テンソル，対称テンソル.
- 双対空間，双対基底，転置行列.
- 双対空間の対称テンソルが多項式環になることを説明した.
- 係数拡大.

5. 固有値，対角化，行列の共役（3 回）
   - 固有値，固有ベクトル，固有空間，固有多項式，固有方程式.
   - 基底の取り替えが，対応する行列の共役を引き起こすことの説明.
   - 半単純行列．特に，固有値がすべて相異なるなら半単純であること.
   - 以上の一つの応用例として，ケーリー・ハミルトンの公式を証明した.（重要性を強調しないように注意した.）
6. Jordan 標準形（1 回）
   - （行列の共役）と（行列式，トレース，階数，固有多項式，行列の四則演算）との関係.
   - 前項の関係を用いると，具体的に与えられた行列の Jordan 標準形が求まることを示した.
   - Jordan 標準形の「使い方」に重点をおいて説明した.
7. 対称行列，直交行列，二次形式，エルミート行列，ユニタリー行列，エルミート形式，符号数（1 回）
   - 対称行列と二次形式の関係．エルミート行列とエルミート形式の関係.
   - 実対称行列の固有値は実数になることを示して，その符号数を定義した.
   - 固有値ゼロを持たない実対称行列が連続的に変形するとき，符号数が一定であることを示し，シルベスターの慣性法則を導いた.
   - 符号数の応用例として，モース理論に触れた.

講義の感想

講義を通じて，できる限り平易に解説を心がけた.

試験問題

中間試験

問題１. 線形写像 $f:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^4$ を

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

により定める．f の像 $f(\mathbb{C}^3)$ の基底を一組求めよ．

問題２． $\{e_1, \cdots, e_n\}$ を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 V の基底とする．この時，V の双対空間 $V^\vee = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C})$ の元 $f_1, \cdots, f_n$ で，

$$f_i(e_j) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

となるものが一意的に存在することを示し，さらに，$\{f_1, \cdots, f_n\}$ が $V^\vee$ の基底になることを示せ．

問題３． 2 つの有限次元ベクトル空間 V，W に対し，$\dim V + \dim W = \dim(V \oplus W)$ となることを示せ．

問題４． V を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とする．$V \otimes V$ からそれ自身への線形写像 $\varphi : V \otimes V \to V \otimes V$ で，$\varphi(v \otimes v') = v' \otimes v$（$v$，$v' \in V$）となるものが一意的に存在することを示せ．

期末試験

問題１． 次の行列は，対角化可能か？

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

問題２． 対称行列

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad （\alpha \text{ は実数}）$$

の符号数を求めよ．（結果は α の値により変化する．）

問題３． 次の行列の Jordan 標準形を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

問題４． $f : U \to U'$，$g : V \to V'$ がベクトル空間の間の線形写像のとき，

$$(f \otimes g)(u \otimes v) = f(u) \otimes g(v) \quad (u \in U, v \in V)$$

となる線形写像 $f \otimes g : U \otimes V \to U' \otimes V'$ が一意的に存在することを示せ．

科目名　　解析学序論　　　　　　　　**担当教官**　三宅 正武

サブタイトル

対象学年　　２年　　　　　　　　**４単位**　**必修**

教科書　解析概論（高木貞治著，岩波書店）
参考書　なし

予備知識

特に仮定しない

講義内容

解析学の基礎概念である実数の連続性から始めて，数列の収束性，一変数関数の極限と連続関数の基本性質を講義した後，一変数及び多変数関数の微積分を理論的側面から講義した．ただし，陰関数定理，逆写像定理については時間不足のため，解説程度にとどめた．従って，重積分の変数変換の公式についても，解説程度にとどめざるを得なかった．これらについては，後期のベクトル解析の講義で補充してもらうように引き継ぎをしてある．

具体的な講義内容は以下の通り：

1. 数列と極限
    - 実数の連続性とデデキントの切断
    - 上限，下限の概念．有界単調数列の収束性
    - 収束数列の例
    - ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理
    - 数列の収束判定定理（コーシーの定理）
2. 関数と極限
    - 関数の概念と極限，極限の基本性質（加減乗除）
    - 連続関数の基本性質　１）中間値の定理と応用例　２）最大値，最小値の定理　３）一様連続性
3. 一変数微分法
    - 微分可能性と初等関数の導関数
    - 平均値の定理とその応用
    - 関数の単調性と逆関数
    - ロピタルの定理

- 高階導関数と関数の凸性
- テーラーの定理と幾つかの例

4. 一変数積分法

- リーマン和と積分可能性
- ダルブーの過剰和，不足和と積分可能性（ダルブーの定理）
- 連続関数，単調関数の積分可能性
- 部分積分，置換積分
- 広義積分（絶対収束，条件収束）
- 曲線の長さ
- テーラーの定理の積分形とテーラー展開

5. 多変数微分法

- 偏微分，方向微分，全微分
- 高階偏微分と微分の順序変更
- テーラーの定理
- 極値問題
- 陰関数の定理
- 条件付き極値

6. 多変数積分法

- リーマン和と可積分性
- ダルブーの定理（説明程度）
- 累次積分法
- 写像とヤコビアン
- 逆写像定理（説明程度）
- 変数変換の公式，面積の変換公式
- アフィン変換，極座標
- 広義積分と代表的な例の計算
- ベータ関数とガンマ関数

講義の感想

例，例題を多く例示してできる限り平易な解説を心がけた．

試験問題

問題１． 極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$　（$a > 0$）

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - x\cos x}{x - \sin x}$

問題２． $f(x)$ を区間 I（$\subset \mathbf{R}$）で定義された関数とする.

(1) $f(x)$ が点 $c \in I$ で連続である事の定義を，ε, δ を用いて書きなさい.

(2) $f(x)$ が区間 I で一様連続である事の定義を，ε, δ を用いて書きなさい.

(3) $f(x)$ が有界区間 I で一様連続であるとき，$f(x)$ は I 上有界である事を証明せよ.

問題３． (1) $\displaystyle\lim_{x\to +0} x^x$ を求めよ.

(2) $f(x) = x^x$（$x > 0$）の極値を求めよ.

問題４． (1) $f(x) = \mathrm{Tan}^{-1}x$（$x \in \mathbf{R}$）の定義を与えよ.

(2) $f'(x)$ を求めよ.

(3) $f(x)$ の $x = 0$ を中心とする Taylor 展開を求めよ.

問題５． $f(x, y)$ を $\mathbf{R}^2$ 上で C^2-級の関数とする．$F(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta)$ と置く.

$$F'\left(\frac{\pi}{4}\right), \quad F''\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

を求めよ（与えよ）.

問題６． $x + y + z = 1$（$x,\ y,\ z > 0$）のときの，$f(x, y, z) = x^p y^q z^r$（$p,\ q,\ r > 0$）の最小値を求めよ.

問題７． (1) ガンマ関数 $\Gamma(x)$（$x > 0$）の定義（積分で与えられる）を書いて，それが定義される理由を述べよ.

(2) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ を求めよ.

問題８． 半径 R の３次元球の体積を求めよ.

科目名 **集合と位相** **担当教官** **林 孝宏**

サブタイトル

対象学年 **２年** **２単位** **必修**

教科書 松坂和夫，集合・位相入門，岩波書店
参考書

予備知識

特に仮定しない

講義内容

「集合と位相」について基本的かつ標準的（ただし最小限）と思われる講義をした．集合については，濃度の話を楽しんでもらう他，同値関係や順序のような基本的概念の説明を行った．また位相については，距離空間の説明を間にはさむことで，ϵ-δ 論法の自然な発展として理解できるように務めた．

具体的な講義内容は以下の通り：

1. ガイダンス（1 回）
   - 数直線とデカルト平面に基づく数学から集合に基づく数学へ．
2. 集合（7 回）
   - 集合の概念（論理式との対応，基本的演算など）．
   - 部分集合，巾集合と集合族，直積と写像．
   - 集合の濃度．
   - 同値関係と商集合．
   - 順序集合．
   - 選択公理とツォルンの補題（ベクトル空間の基底の存在）．
3. 距離空間（3 回）
   - 基礎概念（内点，外点，境界点，開集合，閉集合，点列）．
   - 集積点と孤立点．
   - コンパクト距離空間（$\mathbf{R}^n$ のコンパクト部分集合，開被覆による特徴付け）．
   - 完備距離空間（コンパクト空間と閉部分空間の完備性，完備化）．
4. 位相空間（3.5 回）
   - 基礎概念（内点，外点，境界点，開集合，閉集合）．

- 連結性（基本的性質，弧状連結性）.
- 像位相と商空間.
- 基底，準基底，誘導位相と直積空間.
- コンパクト空間.
- コンパクト性とハウスドルフ性.

講義の感想

講義を通じて, できる限り基本的な題材に話を限定し，ゆっくり，丁寧に解説することを心がけた．そのため集合の部分に時間をとられすぎて位相の部分が手薄になってしまったのは失敗であった．可算公理やハウスドルフ以外の分離公理を省略するのはもともとの予定であったが，近傍系などいくつかの基本的観点に十分に触れることができなかったのはまずかったと思う．なお，正規の講義時間の前に４０分程の時間をとり，最初の数回で ϵ-δ 論法の復習を行い，また残りの数回で，有限次元と無限次元の L^p-距離，p-進距離，$\mathbf{R}$ 上の連続関数と $\mathbf{R}$ の開，閉集合，カントール集合，ザリスキ位相，といった諸例の紹介を行った．この時間帯はほとんどの学生が聴講可能のはずであるが，残念ながら聴講者はそれほど多くは無かった．もっともそれは正規の時間帯に付いても同様であるが....

試験問題

問題１． $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ の有限部分集合の全体 $\mathcal{A}$ の濃度を求めよ.（ヒント：まずちょうど 2 個の元よりなる部分集合の全体を考えよ.）

問題２． $\mathbb{N}$ に順序 $|$ を「$m \mid n \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} n$ は m の倍数である」で入れる.

(1) この順序に関し，$\sup\{m, n\}$，$\inf\{m, n\}$ は何か？

(2) $(\mathbb{N}, |)$ から $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ への反順序写像 φ が $\varphi(n) = n\mathbb{N}$ で定まることを示せ.

問題３． 次の (A)，(B) いずれかに答えよ.

(A) (1) $X = \{a, b\}$（$a \neq b$）に $\{\emptyset, X\}$，$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$ 以外の位相を入れよ.

(2) $\overline{\{a\}}$，$\overline{\{b\}}$ を求めよ.

(3) X は連結か？またハウスドルフか？

(B) (1) $C[0,1]$ は $d_1(f, g) = \displaystyle\int_0^1 |f(t) - g(t)|dt$ により距離空間になることを示せ.

(2) $C[0,1]$ の点列 $\{f_n\}$ で，d_1 に関しては収束し，$d_\infty(f, g) = \max\limits_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)|$ で定まる距離 d_∞ に関しては収束しないようなものの例をあげよ.

問題４． 位相空間 X に対し，A，$B \subseteq X$ がコンパクトなら $A \cup B$ もコンパクトなことを示せ.

問題５． $[0,1]$ に同値関係 $\sim$ を上手に入れ，$[0,1]/\sim$ が $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ と同相なことを示せ.

科目名 **数学演習 III** **担当教官** **古田 泰之**

サブタイトル

対象学年 **２年** **２単位** **必修**

教科書 特に指定しなかった
参考書 マグロウヒル大学演習 微積分，オーム社
マグロウヒル大学演習 一般位相，オーム社

予備知識

１年生の微積分

講義内容

「解析学序論（三宅)」と「集合と位相（林)」の演習をしました.
具体的には，以下のような問題を出題し，解説しました.（全部で６４問出題しました.）

1. 集合
   - ２つの集合が等しいことや部分集合の定義と，定義に沿った証明をする問題
   - 和集合，共通部分の定義
   - 写像が単射や全射であることの定義と，定義に沿った証明をする問題
2. 位相（ユークリッド空間の位相）
   - 開集合，閉集合，内部，閉包等
   - 具体的な集合を与えて，それが開集合か，あるいは閉集合かを調べる問題
   - 具体的な集合の内部，閉包，境界を求める問題
3. 微積分
   - 具体的な数列の極限を $\varepsilon - N$ 型の定義に沿って証明する問題
   - 具体的な関数の連続性を $\varepsilon - \delta$ 型の定義に沿って証明する問題
   - 上限，下限，上極限，下極限
   - 区間縮小法，中間値の定理，最大値最小値の定理
   - ロピタルの定理

講義の感想

論理的な解答をかくことを重視した．学生は,「定義に沿って証明する」ということが余りできないようでした．時間をかけて，詳しく解説したので全部の問題をとくことができなかった.

科目名　数学演習 IV　　**担当教官**　佐野 武

サブタイトル　抽象ベクトル空間演習

対象学年　**２年**　　**２単位**　**必修**

教科書　特に指定なし
参考書　特に指定なし

予備知識

１年生時に習った基本的な概念の定義

講義内容

抽象ベクトル空間，関数論の演習を行なった．

1. 抽象ベクトル空間
   授業に沿ったかたちで行なった．次のテーマを強調して説明した．
   - 線形写像の像，核，逆像．又それぞれの次元の関係
   - 上の事柄を基底を固定して行列でみる
   - 基底を変換したときの表現行列の変化
   - 固有値，対角化
2. 関数論
   以下の事柄について具体的な計算問題を行なった．
   - 微分可能，コーシーリーマンの方程式，解析関数
   - 代数学の基本定理
   - テーラー展開，ローラン展開
   - 特異点
   - 留数
   - 定積分への応用
   - 等角写像

講義の感想

できるだけかみくだいて説明した．質問も多く出たし，そのほうが良いようだ．

科目名　常微分方程式　　**担当教官**　石毛 和弘

サブタイトル　常微分方程式の基礎理論

対象学年　３年　　**４単位**　**必修**

教科書

参考書　Coddington, Levinson, 常微分方程式論（上），吉岡書店
笠原晧司，微分方程式の基礎，朝倉書店

予備知識

特に仮定しない

講義内容

常微分方程式の基礎理論（解の存在，一意性，解の延長），線形常微分方程式の解空間の構造を理解するのが第一の目的である．また，2×2 の定数行列からなる線形連立の常微分方程式の相空間における解軌道を説明したのち，平衡点の安定，不安定を考察し，Poincaré-Bendixon の定理を証明（概略）を行った．

具体的な講義内容は以下の通り：

1. 常微分方程式の基礎定理
   - 常微分方程式とその解
   - 求積法
   - 解の存在（Cauchy-Peano の定理）
   - 解の一意性
   - 逐次近似法
   - 解の延長
   - 初期値又はパラメーターに関する解の連続性
   - パラメーターに関する解の微分可能性
   - 解析的常微分方程式
2. 線形常微分方程式
   - 解空間の構造（線形同次連立系）
   - 非同次線形連立系
   - 定数係数の線形連立系
   - 線形高階微分方程式
   - 定数係数の高階微分方程式

- 周期係数の線形連立系（Floquet の定理）

3. 常微分方程式の大域理論

- 大域理論とは？
- 線形連立方程式の解軌道（次元２）
- 安定行列
- 自励系
- 線形近似
- リアプノフの方法
- ω-limit set と limit cycle
- Poincaré-Bendixon の定理

講義の感想

科目名 **基礎解析 III** **担当教官** **尾畑 伸明**

サブタイトル ルベーグ積分と直交多項式

対象学年 **３年** **６単位** **選択**

教科書
参考書 伊藤清三：ルベーグ積分，裳華房
コルモゴロフ・フォーミン：関数解析の基礎，岩波
吉田洋一：ルベーグ積分入門，培風館

予備知識

微積分

講義内容

現代の解析学・関数解析学・確率論に必要不可欠の抽象的測度論・積分論の基礎を解説する．実数直線上のルベーグ測度は，最も基本的であるからその構成や収束定理の応用などについて詳述する．

具体的な講義内容は以下の通り：

1. 可測空間と測度
   集合のなす環，ボレル集合，集合関数，可算加法的測度，零集合，完備な測度，完備化，例
2. 可測関数
   定義，極限で閉じていること，単関数の極限，代数演算で閉じていること
3. 測度の構成 – 特に実数直線上のルベーグ測度
   外測度，内測度，ルベーグ可測集合
4. 積分の定義
   単関数の積分，線型性，単関数で近似される関数，可積分関数，殆どいたるところ一致，チェビシェフ不等式
5. 収束定理
   殆どいたるところ収束，測度に関する収束，ファトゥの補題，有界収束定理，積分記号下の微分
6. 直交多項式
   グラム・シュミットの直交化，抽象フーリエ級数，パーセバル等式，３項間漸化式

講義の感想

抽象的な定理を理解することに加えて，実際の計算力つけることも重要である．

試験問題

問題１． $\mathbf{R}$ を定義域とする $\mathbf{R}$-値関数 f が可測であるとは，任意の $c \in \mathbf{R}$ に対して，$\{x\,;\,f(x) \le c\}$ がボレル集合であるときにいう.

(1) ボレル集合とは何か?

(2) この定義に基づいて，2 つの可測関数 f, g の積 fg もまた可測関数になることを示せ.

(3) さらに，f, g とも可積分関数であれば，その積 fg も可積分関数か? 正しければ証明，誤りならば反例を示せ.

問題２． p を正整数とする．$0 < x \le 1$ を p 進法で展開して，$x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$ とおく.

(1) $0 < x \le 1$ に対して 2 通りの異なる表示

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{p^n}$$

が存在したとする．このとき，2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ にはどのような関係があるか?

(2) 2 通り以上の表示が可能な $0 < x \le 1$ の全体を A とするとき，そのルベーグ測度 $\mu(A) = 0$ を示せ.

(3) x が 2 通り以上に表示できるときは，$f(x) = 0$ とおき，表示が一意的な x に対しては,

$$f(x) = \begin{cases} a_1 & a_1 \neq 0 \\ a_2 & a_1 = 0,\ a_2 \neq 0 \\ a_3 & a_1 = a_2 = 0,\ a_3 \neq 0 \\ \vdots & \quad\vdots \end{cases}$$

で定義する．このとき $\displaystyle\int_{(0,1]} f(x)\,dx$ を計算せよ.

問題３． $(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間で，$\mu(X) = 1$ をみたすものとし，p を $0 < p < 1$ をみたす定数とする．$f_1, f_2, \cdots$ を可測関数列で次の 3 性質をみたすものとする.

- $f_n(x) = 0$ または $= 1$;
- すべての n に対して $\mu(\{x \in X\,;\,f_n(x) = 1\}) = p$;
- $m \neq n$ ならば $\displaystyle\int_X f_m(x) f_n(x) \mu(dx) = \int_X f_m(x)\mu(dx) \int_X f_n(x)\mu(dx)$.

このとき,

(1) $\displaystyle\int_X (f_n(x) - p)^2 \mu(dx)$ を計算せよ.

(2) 任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\left\{x \in X\,;\,\left|\frac{f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)}{n} - p\right| > \epsilon\right\}\right) = 0$$

を証明せよ.

問題４． $n \in \mathbf{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ に対して,

$$P_0(x) = 1, \qquad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n \ge 1$$

とおく.

(1) $k, m, n \in \mathbf{N}$ に対して，

$$\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^n\bigg|_{x=\pm 1} \quad (0 \leq k \leq n-1), \qquad \int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx$$

を計算せよ．

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\{P_n(x)\}^2 dx$ を計算せよ．

(3) $P_{n+2}(x), P_{n+1}(x), P_n(x)$ がみたす（導関数を含まない）3 項間漸化式を求めよ．

問題５． 各 $n \in \mathbf{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ に対して，n 次多項式で最高次の係数が 1 であるもの全体を

$$\mathcal{Q}_n = \{ f(x) = x^n + \cdots \text{ なる } n \text{ 次多項式} \}$$

とおき，

$$(\star) \qquad \inf\left\{ \int_{-1}^{1} f(x)^2 dx \,;\, f \in \mathcal{Q}_n \right\}$$

を考える．

(1) $n = 3$ のとき，$(\star)$ を達成する $f \in \mathcal{Q}_3$ を求めよ．

(2) n 次多項式 $P_n(x)$ で

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \delta_{mn}$$

をみたすものを 1 組とる．そのような $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ を構成するグラム・シュミットの直交化法を説明せよ．

(3) 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して $(\star)$ を達成する $f \in \mathcal{Q}_n$ はただ 1 つだけ存在し，それは $P_n(x)$ の定数倍であることを示せ．

科目名　**多項式論**　**担当教官**　**向井 茂（一部 橋本 光靖）**

サブタイトル

対象学年　**３年**　**６単位**　**選択**

教科書
参考書　松坂和夫，代数系入門，岩波
他，プリントを配布

予備知識

講義内容

環と加群に関する学部３年生が是非学ぶべき基本事項を他の代数の授業の内容を考慮しつつ順番に講義した.「多項式論」なので，単に繁雑さを避けるだけのために非可換でできる部分も可換環に制限し，終盤では Hilbert の零点定理を目標として進んだ.

具体的な講義内容は以下の通りでおおむね講義をした順序通りだが，そうではない部分もある.

1. イデアル
   - R 加群，R 部分加群，イデアルの定義と例
   - 部分加群の生成，単項イデアル
   - 整域とその例，単項イデアル整域，Euclid 整域，Euclid の互除法，$\mathbb{Z}[i]$ の例
   - 環準同型，剰余類環，環の準同型定理，剰余類環のイデアル，極大イデアルと素イデアル
   - 単元，約元，倍元，同伴元，既約元，素元，UFD，Gauss の定理
2. 代数拡大と整拡大
   - 代数的，整，有限，有限型
   - 行列式の技巧，整かつ有限型と有限の同値
   - 整域の整拡大の一方が体なら他方も体
   - 体 $\bar{\mathbb{Q}}$
3. 単因子論
   - a.c.c.，d.c.c.，ネーター加群，アルティン加群，ネーター環，アルティン環
   - ＰＩＤはネター１次元ＵＦＤ
   - ＵＦＤでの最大公約元，最小公倍元
   - ネター環上の有限生成加群

- ＰＩＤでの有限生成加群の Fitting 不変量と不変因子
- ねじれ元，ねじれ部分，ねじれのない加群，自由加群
- 中国剰余の補題
- 単因子論の基本定理，アーベル群の基本定理，Jordan 標準形と不変因子

4. アルティン加群とアルティン環
   - 単純加群と半単純加群
   - 組成列と長さ
   - イデアルの根基と Jacobson 根基
   - 中山の補題
   - 秋月の定理
5. 基底定理と零点定理
   - Hilbert の基底定理
   - 環拡大として有限型の体の拡大は有限
   - 積閉集合による環の局所化，商体，有理関数体
   - 零点定理の弱形
   - 代数的閉体，代数学の基本定理，無限体上では多項式と多項式関数は同じ
   - 零点集合，代数的集合，Zariski 位相
   - Hilbert の零点定理

講義の感想

剰余加群，準同型定理などなれてしまえば空気のように扱える操作に不慣れで核心部分にいく前に戸惑ってしまう様子が分かり困った．こうした部分は授業ではいかんともし難い部分があり，とにかく慣れるしかないのだが...

試験問題

問題１． $\omega := (-1+\sqrt{-3})/2 \in \mathbb{C}$ とおく．$\mathbb{C}$ の部分環 $\mathbb{Z}[\omega]$ が体ではない PID であることを示せ．

問題２． K を体，$R = K[t]$ を K 上の１変数多項式環とする．M が有限生成 R 加群で，ある n が存在して $t^n M = 0$ とする．この時，M は長さ有限であり，$\dim_K M = l_R(M)$ であることを示せ．

問題３． 次の２題のうちから，選択して一題に答えよ．

A. K が体，$R = K[t]$ は K 上の１変数多項式環とする．L は R の商体，すなわち，K 上の t を変数とする１変数有理関数体 $K(t)$ とする．R 上有限型である L の R 部分代数は体ではない PID であることを示せ．

B. $\mathbb{Z}$ 上有限型である体 K は有限体，すなわち集合として有限集合であるような体であることを示せ.

問題 4. $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ は UFD ではないことを示せ．授業でやっていなくても，整閉整域に関する知識は自由に証明なしで使って良い.

科目名　群論　**担当教官**　橋本 光靖（一部 向井茂）

サブタイトル

対象学年　３年　**４単位**　**必修**

教科書　松坂和夫：代数系入門，岩波書店
参考書　佐武一郎，線形代数学，裳華房
永田雅宜，吉田憲一：代数学入門，培風館

予備知識

特にない

講義内容

1. 群の公理と準同型写像
2. 作用の公理，軌道，種々の作用
3. 剰余類群，作用付きの群，生成元，直和
4. 群と準同型写像の例
5. 群作用の例と導作用
6. Sylow の定理の証明（正則表現と導作用の応用）
7. Sylow の定理の後半（一意性と個数）
8. 正多面体群と Burnside の公式
9. 正多面体群の続き，整数行列の基本変形と標準型
10. アーベル群の基本定理
11. 可解群

講義の感想

講義を通じて，できる限り平易に解説を心がけた.

試験問題

問題１. (1) 二つの群が同型であるとはどういうことか？その定義を述べよ.

次の３つの文章の（　　）内に「ある」「ない」のどちらか正しいと思う方をいれて，それを証明せよ.

(2) 整数全体のなす加法群 $\mathbf{Z}$ と有理数全体のなす加法群 $\mathbf{Q}$ は同型で（　　）.

(3) 実数全体のなす加法群 $\mathbf{R}$ と正の実数全体のなす乗法群 $\mathbf{R}^+$ は同型で（　　）.

(4) 正４面体群と４次対称群は同型で（　　）.

問題２. (1) 有限群 G の p Sylow 群の定義を述べよ.

G として立方体をそれ自身にうつす回転全体のなす群を考える.

(2) G の位数を求めよ.

(3) G の 3 Sylow 部分群は可換か？また，3 Sylow 部分群は全部でいくつあるか？

(4) G の 2 Sylow 部分群に対して上と同じ問に答えよ.

問題３. (1) 有限群が有限集合に作用しているとき，その軌道の個数に関する Burnside の公式を述べよ.（証明しなくてよい.）

(2) 立方体の８頂点のうちの相異なる３頂点を結んでできる３角形は，回転によって移り合うものを同じと数えるとき，いくつあるか？

(3) 正１２面体の２０頂点に対して上と同じ問に答えよ.

問題４. 行列 $\begin{pmatrix} 6 & 8 & 10 \\ 12 & 14 & 16 \end{pmatrix}$ に $\mathbf{Z}$ 上の基本変形を施して標準型にせよ.

問題５. アーベル群ではないが可解な群の例を一つ挙げよ.（アーベルでないことと可解なことにはどちらも証明を付けよ.）

科目名　**幾何学要論**　**担当教官**　**金井 雅彦**

サブタイトル

対象学年　**３年**　**６単位**　**選択**

教科書
参考書　小林昭七著「曲線と曲面の微分幾何（改訂版）」裳華房
ウィルヘルム・クリンゲンバーグ著「微分幾何学」海外出版貿易
A. グレイ著「曲線と曲面の微分幾何」トッパン
長野正著「曲面の数学」培風館
小沢哲也著「平面図形の位相幾何」培風館
Ｓ. ヒルデブラント他著「形の法則」東京化学同人
H. Hopf, "Differential Geometry in the Large", Lecture Notes in Math., no.1000, Springer

予備知識

大学１年次に学習するはずの微積分・線形代数

講義内容

曲線・曲面に対象を限定し，それらの微分幾何学・トポロジーに関する入門的な話題を紹介した．詳細は以下の通りである．

§ 平面曲線

弧長パラメータ / 曲率 / 4 頂点定理 / 単純閉曲線の凸性の判定法 / Jordan の閉曲線定理（証明なし） / 閉曲線の回転数 / 全曲率に対する Fenchel の不等式

§ 円周間の写像の写像度

写像度のホモトピー不変性 / Brouwer の不動点定理とその拡張 / 「ハム・サンドウィッチ」の定理等の応用

§ 平面上のベクトル場

ベクトル場の回転数・特異点の指数 / Poincaré の指数定理の写像度を用いた証明 / Poincaré の指数定理の組み合わせ論的証明

§ 球面上の接ベクトル場

球面上の連続接ベクトル場に対する指数定理（立体射影を用い平面上のベクトル場の問題に帰結させることにより証明）

§ Euler の定理

球面の 3 角形分割に対する Euler の定理 / Harriot の定理（球面 3 角形の内角の和と面積の間の関係）/ 正多面体の分類

§ 曲面の定義

曲面の定義と（反）例（自分自身と交わりを持たないものに限定）/ 単位法ベクトル場と向き付け可能性 / 閉曲面の向き付け可能性（証明なし）/ 閉曲面の分類（証明なし）

§ 閉曲面の Euler 数

閉曲面の 3 角形分割に対する Euler の定理 / 閉曲面の多角形からの構成 / 閉曲面のパンツ分解 / 閉曲面上の連続接ベクトル場に対する Poincaré–Hopf の定理

§ 曲面の曲率

形状作用素（shape operator）・第 2 基本形式 / Gauss 曲率と平均曲率 / 極小曲面・平均曲率が一定の曲面（単なるお話として）/ Gauss–Bonnet の定理（証明なし）

講義の感想

試験問題

中間試験

問題１． (1) 平面曲線に対し，その曲率の定義を述べよ．
(2) $\mathbf{p}(s)$, $\bar{\mathbf{p}}(s)$ を弧長 s (ただし $0 \leq s \leq L$) でパラメータ付けられた平面曲線と，また $\kappa(s)$，$\bar{\kappa}(s)$ をそれらの曲率とする．もし

$$\kappa(s) = \bar{\kappa}(s), \qquad 0 \leq {}^{\forall}s \leq L$$

が成り立つならば，$\mathbf{p}(s)$ に対し適当に回転と平行移動をほどこすことにより，$\mathbf{p}(s)$ を $\bar{\mathbf{p}}(s)$ に「完全に重ねる」ことが出来ることを示せ．

問題２． $\mathbf{p}(s)$（ただし $0 \leq s \leq L$）を弧長でパラメータ付けられた平面内の閉曲線と，また $\kappa(s)$ をその曲率とする．このとき，$\mathbf{p}(s)$ の全曲率

$$K = \int_0^L |\kappa(s)|\, ds$$

に対し，Fenchel の不等式

$$K \geq 2\pi$$

が成り立つことを証明せよ．

問題３． 成分がすべて正の実数であるような 3 次正方行列は，正の固有値を持つことを示せ．ただし，次の事実は証明なしに利用して良い．

> **事実（Brouwer の不動点定理）．** 正 3 角形の周および内部を Δ で表す．このとき任意の連続写像 $f : \Delta \to \Delta$ は不動点を有する．ただし，$P \in \Delta$ が f の不動点であるとは，$f(P) = P$ が成り立つことを意味する．

問題４． $z \in \mathbb{C}$ に対し，

$$G(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}, \qquad F(z) = G(z) + z^n$$

（ただし，$n \geq 1$，$a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$）とする．

(1) 任意に与えられた $\epsilon > 0$ に対し，

$$|z| \geq R \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{|G(z)|}{|z^n|} \leq \epsilon$$

なる $R > 0$ が存在することを示せ．

(2) 十分大きな $R > 0$ に対し，

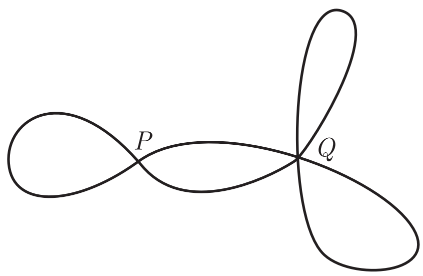
$$|z| \geq R \qquad \Longrightarrow \qquad F(z) \neq 0 \quad \text{かつ} \quad \left| \frac{F(z)}{|F(z)|} - \frac{z^n}{|z^n|} \right| < \frac{1}{1000}$$

が成り立つことを示せ．

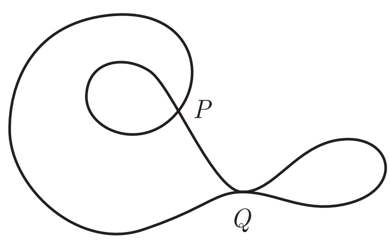
(3) $F(z) = 0$ なる $z \in \mathbb{C}$ が存在することを証明せよ．

問題 5． $\mathbf{p}(t)$（ただし $0 \leq t \leq L$）を平面内の閉曲線とする．$\mathbf{p}(t)$ は 2 重点以外の多重点を持たないとし，しかも各 2 重点は横断的であるとする．ただし，

(i) 点 $P \in \mathbb{R}^2$ が曲線 $\mathbf{p}(t)$ の**多重点**であるとは，$\mathbf{p}(t) = P$ なる $t \in [0, L)$ が複数個存在することである．また，$\mathbf{p}(t) = P$ なる $t \in [0, L)$ がちょうどふたつ存在するとき，P は $\mathbf{p}(t)$ の **2 重点**であると言われる．例えば下図において，点 P，Q はともに多重点であるが，そのうち 2 重点は点 P のみである．



(ii) 曲線 $\mathbf{p}(t)$ の 2 重点 $P = \mathbf{p}(t_1) = \mathbf{p}(t_2)$（ただし，$0 \leq t_1 < t_2 < L$）が**横断的**であるとは，ふたつの接ベクトル $\mathbf{p}'(t_1), \mathbf{p}'(t_2)$ が線形独立であることを意味する．例えば，下図において点 P，Q はともに 2 重点であるが，点 P は横断的であるのに対し点 Q は非横断的である．

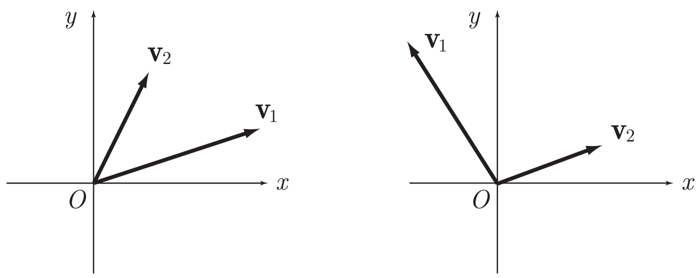


(1) さらに，$\mathbf{p}(t)$ は点 $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}(L)$ における接線の片側にあり，したがってとくに $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}(L)$ は 2 重点でないとする．このとき，正の向きを持つ 2 重点の個数を $d+$，負の向きを持つ 2 重点の個数を d_- としたとき，それらと回転数 ρ の間には，

$$\rho + 1 = d_- - d_+ \qquad \text{または} \qquad \rho - 1 = d_- - d_+$$

なる等式が成立することを証明せよ．（ヒント：ベクトル場に対する Poincaré の指数定理を用いよ．）ただし，

(iii) $\mathbb{R}^2$ の基底 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ に対し，$\mathbf{v}_i = \begin{pmatrix} v_{1i} \\ v_{2i} \end{pmatrix}$（$i = 1,\ 2$），$A = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}$ としたとき，もし $\det A > 0$ ならば $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ は**正の向き**を持つと，また逆に $\det A < 0$ ならば $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ は**負の向き**を持つと言われる．一方，閉曲線 $\mathbf{p}(t)$（$0 \le t \le L$）の横断的 2 重点 $P = \mathbf{p}(t_1) = \mathbf{p}(t_2)$（ただし $0 \le t_1 < t_2 < L$）に対し，基底 $\{\mathbf{p}'(t_1), \mathbf{p}'(t_2)\}$ が正の向きを持つときに P は**正の向き**を持つと，また逆に $\{\mathbf{p}'(t_1), \mathbf{p}'(t_2)\}$ が負の向きを持つときに P は**負の向き**を持つと言うことにする．



(a) 正の向きを持つ基底　　(b) 負の向きを持つ基底

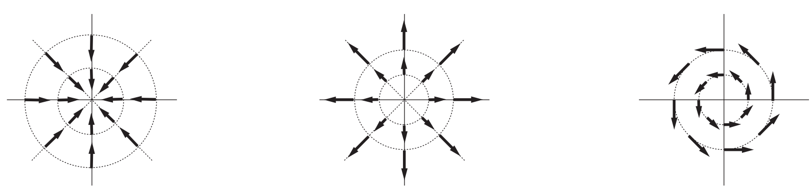
(2) $\mathbf{p}(t)$ の回転数 ρ と 2 重点の個数 d の間に

$$|\rho| \le d + 1$$

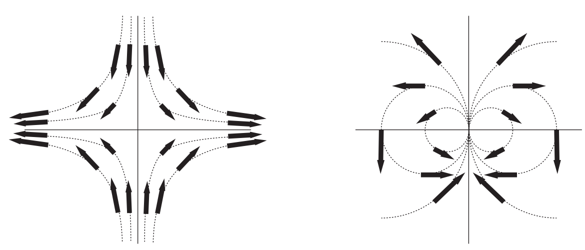
なる関係が成り立つことを示せ．

期末試験

問題１． 平面上で定義された次の様な連続ベクトル場を考える．ただし，原点は各ベクトル場の孤立特異点であるとする．各ベクトル場の原点における指数を求めよ．



(i)　　(ii)　　(iii)



(iv)　　(v)

問題２． (1) 円板 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ 上の連続ベクトル場に対する Poincaré の指数定理を述べよ．
(2) 球面 $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ 上の連続接ベクトル場に対する Poincaré–Hopf の指数定理について述べよ．
(3) (1) で述べた円板に対する指数定理から，(2) で述べた球面に対する指数定理を導け．

問題３． (1) 球面 n 角形に対し，その面積を A，内角を $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ としたとき，次の等式が成り立つことを示せ：

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = (n-2)\pi + A.$$

(2) 球面 S^2 が多角形に分割されているとする．そこに現れる頂点，辺，面の個数をそれぞれ v，e，f としたとき，

$$v - e + f = 2$$

が成り立つことを証明せよ．

問題４． (1) $\mathbb{R}^3$ 内の曲面 Σ に対し，その第２基本形式 II，Gauss 曲率 K，平均曲率 H の定義を述べよ．
(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を，

$$f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

（ただし，a，b，c は定数）で定義される関数とする．このとき f のグラフとして実現される曲面 $\Sigma = \{(x,y,f(x,y)) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ の原点 O における第２基本形式 II，Gauss 曲率 K，平均曲率 H の値を a，b，c を用いて表せ．
(3) Σ を $\mathbb{R}^3$ 内の曲面，I，II をそれぞれ Σ の第１基本形式，第２基本形式とする．もし

$$II = cI$$

なる定数 c が存在するならば，Σ は平面あるいは球面に含まれることを証明せよ．

問題５． Σ を閉曲面とする．その Euler 数 χ に対し，$\chi \leq 0$ が成り立つとする．

$$N = \left[\frac{5+\sqrt{49-24\chi}}{2}\right] + 1$$

とおく．ただし，実数 t に対し $[t]$ はそれを越えない最大の整数を表す．一方 Σ の多角形分割 Π に対し，

$$A_\Pi = \frac{2e}{f}$$

とおく．ただし e，f はそれぞれ Π に現れる辺，面の個数である．
(1) Π を Σ の多角形分割とする．ただし，Π の各頂点には少なくとも３本の辺が集まっているものとする．Π に現れる面の個数を f とする．もし $N < f$ であるならば

$$N > A_\Pi$$

が成り立つことを証明せよ．
(2) Π を Σ の任意の多角形分割とする．Π の各面に色を塗る．ただし辺を隔てて隣り合うふたつの面の色は異なるようにしたい．N 色あればこのような色づけが可能であることを証明せよ．

科目名　演習幾何（1/2）　**担当教官**　佐藤 猛

サブタイトル　常微分方程式

対象学年　３年　**２単位**　**選択**

教科書
参考書
笠原晧司，微分方程式の基礎，朝倉書店，216 頁 3,200 円 + 税
アール・A．コディントン，ノーマン・レヴィンソン，常微分方程式論 上，吉岡書店
Coddington, Earl A. and Levinson, Norman, Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1955, xii + 429 頁，品切れ
V. I. Arnold, Ordinary differential equations, 334 頁，Springer
アーノルド，常微分方程式，256 頁，品切れ，現代数学社
高橋陽一郎，微分方程式入門，164 頁，2200 円，東京大学出版会
W. Hirsch, S. Smale, Differential equations, dynamical systems, and linear algebra, ＄71, xi + 358 頁，Academic Press
スメール，ハーシュ，力学系入門，388 頁，5000 円，岩波書店
佐藤文広，数学ビギナーズマニュアル，155 頁，1600 円 + 消費税，日本評論社

予備知識

線型代数の基礎，微分積分

講義内容

講義（常微分方程式）に沿った問題演習を行なった．
目標は次の二つである．

1. 常微分方程式の基本的な求積法を理解し，使えるようになる．
2. 具体的にいろいろな微分方程式とそのあつかい方を知る．

学生に配布した問題のプリントの表題はつぎの通りである．

1. 常微分方程式の解法（求積法）
2. 常微分方程式の解法（求積法のつづき，定数係数 2 階の方程式）
3. 基本定理と近似
4. 基本定理の続き（解析的な解，パラメータに関する連続性）
5. 行列の指数関数と定数係数線型常微分方程式
6. 行列の指数関数と定数係数線型常微分方程式
7. ２階の変数係数線型常微分方程式とくにロンスキアンとグリーン関数
8. 周期的な係数をもつ微分方程式

講義の感想

講義の範囲を越える内容を扱うことは一切しなかった.

科目名　　**演習幾何（2/2）**　　　　　　**担当教官**　**吉川 謙一**

サブタイトル　幾何学要論

対象学年　　**３年**　　　　　　　**２単位**　　**選択**

教科書　特に無し
参考書　R. Bott, L. W. Tu, Differential Forms in Algebraic Topology, Springer
V. Guillemin, A. Pollack, Differential Topology, Prentice-Hall
小林昭七，曲線と曲面の微分幾何，裳華房

予備知識

位相空間・微積分・線形代数・関数論

講義内容

幾何学要論の演習．講義内容の演習（曲面の微分幾何学）は元より，講義で扱われない主題についても積極的に学ぶ.

具体的な講義内容は以下の通り：

1. Exercise 1・2（微積分と線形代数の復習・３５問）
   - 位相空間と連続写像（連続性・コンパクトなどの概念）
   - 対称行列と二次形式（標準化・固有値 etc.）
   - 逆関数定理
   - 常微分方程式（解の存在・一意性・１パラメータ変換群）
   - 関数の Taylor 展開と応用（関数の臨界点における Morse 化と例）
2. Exercise 3・4・5（微分形式 ・４８問）
   - 外積代数
   - 微分形式の定義と性質
   - 微分形式の外微分
   - de Rham コホモロジーの定義と性質
   - Poinceré の補題
   - Jordan 閉曲線定理（微分可能な場合）
   - 曲面の向き付け
   - 微分形式の積分の定義
   - Stokes の定理と具体的な積分の計算
   - 平面曲線の写像度と例

- 閉形式の積分のホモトピー不変性
- 調和関数の性質（平均値定理・積分公式・最大値原理 etc.）

3. Exercise 6（空間曲線・９問）

- Frenet-Serret の公式
- 空間曲線のねじれと曲率
- 曲線の長さ

4. Exercise 7（空間曲面・３５問）

- 第一基本形式・第二基本形式
- Gauss 曲率・平均曲率・Gauss 写像・面素
- 具体例に対する諸量の計算（空間グラフ・回転面・二次曲面 etc.）

5. 夏休みレポート

- 微分形式に関する問題（２問）
- 曲線に関する問題（１問）
- 曲面に関する問題（１問）

講義の感想

様々な問題を考えることで，曲面に関する理解を深めることを心がけた．また，１・２年で学習した内容を効果的に用いて，曲面の種々の不変量が定まることを伝えたかった．当初は交点理論や Poincaré-Hopf の定理，Gauss-Bonnet の定理についても演習で触れる予定であったが（参考書はそれ用に選んだ），微分形式に時間を取られて結局できなかった．

科目名　演習解析　　　**担当教官**　千代延 大造

サブタイトル

対象学年　３年　　　**１単位**　選択

教科書

参考書　伊藤清三，ルベーグ積分入門，裳華房
折原明夫，測度と積分，裳華房

予備知識

特に仮定しない

講義内容

基礎解析 III の内容にそくして，演習をおこなった．途中，２回出題した問題から小テストをおこなった．

講義の感想

学生が motivate されるように心掛けた．

科目名 **演習代数** **担当教官** **吉田 健一**

サブタイトル

対象学年 **３年** **１単位** **選択**

教科書 対応する講義で使用しているものを利用するよう指示した.
参考書

予備知識

特に仮定しない

講義内容

群論及び多項式論（環論）の内容に付随した演習問題を出し，学生に黒板で解いて解説してもらう．演習問題は 8 回（前半：群論 4 回，後半：環論 4 回）配布し，12 回の演習を行なう．黒板で解いた回数と２回のレポート（夏休み前後に提出）の結果により成績をつける．

以下， 各演習問題におけるキーワードをあげておく：

1. 第１回問題：２年次の復習
   - 巡回群， ２面体群，四元数群，対称群，交代群
   - 部分群，正規部分群，元の位数，指数，剰余類，部分群の決定（ラグランジェの定理），
   - 群の直積，中心化群，自己同型群
2. 第２回問題：群の作用
   - 群の作用，安定加群，軌道，推移的な作用，Ore の定理，置換表現
   - 体上の一般線型群と特殊線型群，有限体の場合の位数，実対称行列全体への作用
   - 共役類，類等式
   - p-群の中心，ジョルダン標準形，D_{2n} の共役類の計算
3. 第３回問題：シローの定理
   - 対称群，交代群の共役類，A_5 の単純性の証明
   - シローの定理の証明（作用の問題として）
   - 正規化群の定義，具体的な群のシロー群の例（有限体上の一般線型群， ４次対称群）
   - 位数 pq の群の可解性
   - 位数 60 の単純群について，素数位数の元の個数の利用
4. 第４回問題：可解群

- 交換子群の定義，具体例，複素数体の乗法群への準同型の個数
- 可解群，巾零群の定義
- シローの定理を利用した可解性の証明（p-群，シローの定理，置換表現，元の個数）
- 半直積，位数 $2p$ の群の構造，位数 8 の非可換群の決定

5. 第５回問題：イデアル，アーベル群の基本定理
   - イデアル，素イデアル，極大イデアル
   - Zorn の補題とイデアル，剰余環のイデアル，準同型定理
   - 中国の剰余定理，アーベル群の基本定理，環の直積と単数群
6. 第６回問題：一意分解整域（U.F.D.）
   - 単項イデアル整域と一意分解整域
   - 既約多項式の判定（Eisenstein の既約判定法，有限体上の帰着）
   - 判別式と終結式，斉次多項式の導関数，不変式
7. 第７回問題：局所化，整拡大，単因子論
   - 局所化の定義及び基本性質（イデアル，剰余環，商体）
   - 整閉整域と一意分解整域
   - 単項イデアル整域上の加群，単因子の計算，ジョルダン標準形への応用
8. 第８回問題：ネーター環
   - ネーター環とアルチン環，Hilbert の基定理
   - 準素分解，アルチン環のネーター性，局所環，Zariski 位相

講義の感想

この演習を受講する学生は２年次に代数学要論（現：序論）を履修していることを前提にしたため，群，環，体の定義などは省き，具体的な群の部分群などを調べる問題から初めた．そのため，有限群については比較的早くからシローの定理に到達したが，行列群に関する問題は少なかったと思う．

環論の問題については，イデアルのあたりで息切れしてしまう生徒が多かったせいか，後半の問題が過剰気味になってしまった．前年度の講義では「グレーブナー基底」が行なわれ，今年度の講義では「Hilbert の零点定理」が行なわれたが，過剰気味の問題を考慮して新しい問題の配布を見送った．また，全体を通して演習時間は足りなかったように思える．

科目名　大域解析　　**担当教官**　名和 範人

サブタイトル　自己共役作用素のスペクトル分解

対象学年　４年　　**４単位**　**選択**

教科書
参考書　Berezin and Shubin, The Schrödinger Equation, Kluwer
田辺広域，関数解析（上），実教出版社

予備知識

３年次の関数解析およびルベーグ積分

講義内容

Hilbert 空間上の自己共役作用素の基本的性質，及びそのスペクトル分解定理について，おそらく非常に標準的な事項を講議した.

具体的な講義内容は以下の通り：

1. 前半
   標準的な，Hilbert 空間上の対称作用素，自己共役作用素，本質的自己共役作用素の簡単な性質とその証明．講議時間中に演習問題をいくつか出し，その半分以上について正確な解答を与えた.

2. 後半
   可分な Hilbert 空間上の自己共役作用素のスペクトル分解定理の証明を,（洋書では，わりと見かけるのだが）日本語で書かれて本では私は見かけたことのない（少なくとも記憶には残っていなかった）方法で行った．具体的には上記参考書「The Schrödinger Equation」の付録を肉付けして講議した. 与えられた Hilbert 空間と自己共役作用素の組みを，それと同型な別の Hilbert 空間上とその上のかけ算作用素の組みに写す写像を構成し，それを用いてスペクトル分解定理を証明するのだが，その過程で，発展方程式的の基礎の基礎，超関数の Fourier 変換，Stieltjes 積分などにもふれた.

3. 今日の物理
   抽象的な話になりがちな関数解析の話を補う意味で，毎回２０分ぐらいづつ，量子力学の誕生の歴史的背景から始めて，物理的な計算演習のような事を行っていたが，後半は，数学の証明に時間を割かれて，予定していた分量をこなすことはできなかった.

講義の感想

あまりにも厳密に細かいことまでやり過ぎたかな.「今日の物理」は，途中から数学に凝り過ぎて，しり切れとんぼになってしまった.

レポート問題

問題１． $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ 上の微分作用素 $\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ は（$L^2(\mathbb{R}^3)$ 内の作用素として）本質的に自己共役であることを示せ.

問題２． $L^2(\mathbb{R}^+)$ 内の作用素 A_0 を，定義域を $D_{A_0} \equiv C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ として $A_0 \equiv i\dfrac{d}{dx}$ と定める．A_0 は本質的に自己共役か．ここで $\mathbb{R}^+ \equiv \{x|x > 0\}$ である．

問題３． $D_{A_1} \equiv \{f \in C^2([0,\infty)) \,|\, \exists M > 0 \text{ s.t. } f(x) = 0 \text{ for } x > M\}$ とする．これを定義域とする $L^2([0,\infty))$ 内の作用素を $A_1 \equiv \dfrac{d^2}{dx^2}$ と定義する．A_1 のすべての自己共役拡張を求めよ.

科目名　　体論　　　　**担当教官**　松本 耕二

サブタイトル

対象学年　　４年　　　　**４単位**　　**選択**

教科書　森田康夫，代数概論，裳華房
参考書

予備知識

群論の初歩的な知識

講義内容

体論及び Galois 理論への入門講義であって，体の定義から始めて，体の拡大についての基本事項，代数的閉包の存在と同型写像の拡張定理，分離拡大，有限次分離拡大が単拡大であること，正規拡大と Galois 拡大，Galois の基本定理，具体的ないくつかの方程式の Galois 群の計算，円分体の性質，有限体の構造，一次 Galois コホモロジーと Hilbert の定理 90，方程式の代数的可解性とくに Abel の定理まで講義した．

講義の感想

代数学の標準的な履修内容なので，スタンダードな結果を，スタンダードに証明するようにした．具体的な Galois 群の計算などにはもう少し時間をかけたかったが，半期ではそこまでの時間はとれないように思う．

科目名　多様体の Topology　　**担当教官**　大和 一夫

サブタイトル　モース理論

対象学年　４年　　**４単位**　**選択**

教科書

参考書　ミルナー；モース理論，吉岡書店

予備知識

多様体をおもしろく思う程度知っていること

講義内容

多様体の位相的性質を論ずるときもっとも基本的な方法．高次元の多様体も目に見えるようになる．
具体的な講義内容は以下の通り：

1. 位相空間のホモトピー型
    - 写像のホモトピー，ホモトピー型，変形レトラクト，可縮性.
    - 単連結性，基本群，被覆空間.
    - k-単体，境界をもつ多様体，部分多様体，多様体の三角形分割，ホモロジー群，ベッチ数.
2. 多様体上の実数値関数
    - 非退化臨界点，ヘッシアン，指数.
    - モースの補題.
3. 勾配ベクトル場，１径数変換群
    - リーマン距離，勾配ベクトル場.
    - ベクトル場の積分，特異点の安定多様体，サードの定理，横断性定理.
4. モースの不等式
    - 臨界点をこえるときの等高面の変化とハンドルボディ.
    - モースの不等式（弱い形）とその特別な場合の証明.
5. 応用
    - 力学系，モース – スメイル力学系.
    - 玉突き問題，モース不等式と k-クッションボールの存在，ポアンカレ写像，円環写像，ポアンカレ最後の定理.
6. 本来のモース理論

- リーマン多様体，共変微分，曲率テンソル．
- 多様体上の道全体のつくる空間，道のエネルギー．
- エネルギー関数の臨界点とヘッシアン，測地線．
- ヤコビ場，モースの指数定理．

講義の感想

直観的な説明によったので，不満に思った人がいたかも知れない．

レポート問題

問題：微分位相同型

$$\phi : \mathbf{T}^2 \to \mathbf{T}^2, \quad \phi(x, y) = (2x + y, x + y)$$

の固定点 $(0, 0)$ の安定多様体を求めよ．ここで $\mathbf{T}^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$.

科目名　自然数理特論１／確率論　　**担当教官**　長田 博文

サブタイトル　Exotic Brownian Motions

対象学年　４年／大学院　　**２単位**　**選択**

教科書　なし
参考書　なし

予備知識

確率論の基礎，３年生後期の確率論の授業，とくにブラウン運動までを理解していること

講義内容

確率過程のクラスなかで最も重要な物の一つに拡散過程がある．拡散過程とは空間の中をランダムに連続的に動き回る粒子の数学的モデルで特に強マルコフ性を持つことが大きな特徴である．典型的な例は $\mathbf{R}^d$ の場合のブラウン運動である．この講議では，フラクタルのような特異な空間，無限粒子系の空間のように巨大な空間の上の拡散過程の構成方法と性質について論じた．

具体的な講義内容は以下の通り：

1. 序
   - ブラウン運動のもっとも間接的な表現
   - 吸収壁ブラウン運動，反射壁ブラウン運動と Dirichlet 形式
   - フラクタルと無限粒子系
2. 拡散過程と Dirichlet 形式
   - 拡散過程とは
   - マルコフ過程とセミグループ
   - Dirichlet 形式に関する諸概念とその応用
   - 例
3. Exotic Brownian motions
   - 特異な空間の拡散過程のある構成法について
   - Dirichlet 形式の単調収束定理
   - Sierpinski carpet 上の拡散過程の構成
4. Nash-Moser-Aronson-Davies 理論

講義の感想

通常この時期の講義ではブラウン運動から始めて，伊藤の公式，確率積分，確率微分方程式などを論じるのだが，こんかいは，かなり違ったことを話した．つぎからは，一年間の確率論の講義でブラウン運動を無理なく理解できるように工夫したいと思う．

科目名　　高次位相特論１　　　　　**担当教官**　木村 芳文・坂上 貴之

サブタイトル　計算機数学

対象学年　　４年　　　　　**２単位**　　**選択**

教科書
参考書

予備知識

講義内容

以下のようなシラバスを講義の初めに配付し，ほぼ，予定通りに授業および演習をすすめた．

講師：	木村 芳文	坂上　貴之
	1 号館 401 号室	A 号館 329 号室
	内線：2819	内線：2431
	kimura@math.nagoya-u.ac.jp	sakajo@math.nagoya-u.ac.jp

目的：
・数値解析の具体的な問題を通して OS（UNIX）と言語（C，FORTRAN）について学習する．
・アルゴリズムを知ることによって各種数学的方法論を身近なものとしてとらえる．
・後期の課題である微分方程式の数値解析を学ぶ上での準備をする．

予定：

4/26	Introduction（計算機の使い方）
5/10	代数方程式の近似解（２分法，Newton 法）
5/17	関数の多項式近似 I（Lagrange 多項式）
5/24	関数の多項式近似 II（spline 近似）
5/30	数値微分法（差分法，Richardson 外挿法）
6/7	数値積分法 I（台形公式と Simpson 法）
6/14	数値積分法 II（Gauss 求積法，Romberg 法）
6/21	連立方程式の解 I（Gauss 消去法）
6/28	連立方程式の解 II（LU 分解とピボット）
7/5	連立方程式の解 III（Jacobi 反復法，Gauss-Seidel 反復法）
7/12	連立方程式の解 IV（SOR 法）

評価：　レポートおよび出欠によって評価する．
参考書：　授業中に必要があれば挙げる．

講義の感想

項目については数学の問題を数値解析するのに必要な基本的なことに絞った．学生は大まかな概念については漠然と知っていても具体的に計算をすることは全くできないといったことが多く愕然とさせられた．（例えば Lagrange 多項式等）

レポート問題

問題１．（Newton 法）ニュートン法のアルゴリズムによって与えられた方程式の零点を数値的に求めるプログラムを作成し，実際に以下の方程式の零点を一つ求めよ．

- $x^7 + 5x^3 - 4x^2 + 4 = 0.$
- $x \sin x - \cos x = 0.$

問題２．（Lagrange 関数近似）与えられた関数の Lagrange 関数近似を求めるプログラムを作成し，以下の関数の近似問題を数値的に解け．

- $y = \sin x$ の区間 $[-1, 1]$ での 10 次 Lagrange 多項式の係数を求めよ．
- $y = x\sqrt{x^3 + 7x^2 - 2x + 4}$ の区間 $[0, 2]$ での 20 次 Lagrange 多項式の係数を求めよ．

問題３．（Spline 関数近似／補間）与えられた関数の３次スプライン関数による関数近似／補間を行なうプログラムを作成し，以下の関数のスプライン近似／補間を行なえ．

- $y = \sin x$ の区間 $[-1, 1]$ での 10 点 spline 補間の係数を求めよ．
- 以下に与えられた２次元データを読み込み，そのデータに対する spline 補間関数を数値的に求め，その関数のグラフを書け．

  データ:$(0.0, 10.5)$, $(2.5, 18.9)$, $(5.0, 14.0)$, $(7.5, 23.4)$, $(10.0, 19.3)$, $(15.0, 28.4)$, $(20.0, 25.7)$, $(22.5, 29.0)$, $(28.0, 34.0)$, $(30.4, 45.4)$, $(34.8, 38.7)$, $(39.5, 48.0)$

問題４．（数値微分）与えられた関数の微分を 20 次 Lagrange 多項式近似を用いて行なうプログラムを作成せよ．さらに，そのプログラムを用いて関数 $y = \sin x$ の区間 $[-2\pi, 2\pi]$ における数値微分を行ない，その結果をプロットし，実際に $\cos x$ になることを確かめよ．

問題５．（数値積分）与えられた関数の Simpson 法と Romberg 法による数値積分のプログラムを作成し，そのそれぞれを用いて，次の関数の数値積分値を求めよ．

- $\displaystyle\int_0^1 x^2 dx.$
- $\displaystyle\int_0^\pi \sin x dx.$

問題６．（線形方程式の解法) 与えられた $n \times n$ の行列 A と n 次元ベクトル $\mathbf{b}$ に対して，連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を以下の数値アルゴリズムによって解くプログラムを作成せよ．ただし，プログラムは行列の大きさに応じて行列のメモリサイズを動的に確保するように設計すること．

- Gauss 消去法
- Jacobi 法
- Gauss-Seidel 法
- SOR 法

科目名　**整数論**　**担当教官**　**鈴木 浩志**

サブタイトル　類体論その他代数的整数論の基礎

対象学年　**大学院**　**２単位**　**選択**

教科書

参考書　Matzat, Konstruktive Galoistheorie, Lec. Notes in Math. 1284

予備知識

講義内容

Galois 理論の復習から始めて，代数的整数論の基礎的な事柄をなるべく多岐にわたって説明したい．具体的な講義内容は以下の通り：

1. Galois 理論の復習
   - Galois 群，Kummer 拡大，Artin-Schreier 拡大，Šafarevič の定理，Hilbert の既約性定理.
2. 整数環の復習
   - 代数的整数，整数環，判別式，Dedekind 整域.
3. 分岐，不分岐，分解の復習
   - 分岐指数，相対次数，剰余体，分解群，惰性群，分岐群，Hasse の関数.
4. Galois 群が非可換単純群になるような Galois 拡大
5. 類体論
   - 局所類体論，類体論，Čebotarev の密度定理.
6. その他
   - 岩澤理論，埋め込み問題など.

講義の感想

復習に重点をおいた講義でした．Galois 理論から始めたのでなるべく話が Galois 群に戻ってくるようにしました.

科目名　基幹数理特論１　　**担当教官**　岡田 聡一

サブタイトル　古典群の表現論

対象学年　大学院　　**２単位**　**選択**

教科書

参考書

H. Weyl, The Classical Groups, Princeton Univ. Press.

W. Fulton and J. Harris, Representation Theory, Springer Verlag.

R. Goodman and N. Wallach, Representations and Invariants of the Classical Groups, Cambridge Univ. Press.

R. Howe, Perspectives in Invariant Theory, "The Schur Lectures (1992)", Amer. Math. Soc.

予備知識

線型代数，代数学の基礎

講義内容

古典群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$，$\mathrm{O}_n(\mathbb{C})$，$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ の表現論について，これらの既約表現の分類を目標として，講義を行った．Weyl の "The Classical Group" の方針に従って，自然表現のテンソル積表現を対称群の作用を用いて分解することによって，既約表現の構成を与えたが，証明などのアイデアは R. Howe に従った．

具体的な講義内容は以下の通り：

1. 古典群と代数群
   - 古典群 GL_n，O_n，Sp_{2n} の定義
   - 双線型形式
   - アフィン代数多様体とその座標環，代数多様体の射
   - 代数群の定義と例（加法群，乗法群，古典群）
2. 古典群の有理表現
   - 代数群の有理表現
   - 表現に関する一般論（既約表現，完全可約表現）
   - 古典群の有理表現の完全可約性の証明
3. 半単純環とその表現
   - 半単純環の定義と構造（Wedderburn の定理の特別な場合）
   - 再交換団定理
   - 半単純環の既約表現と原始巾等元の関係
4. 対称群の表現論

- 対称群の既約表現の Young 対称子による実現

5. Schur-Weyl の双対性

- Schur-Weyl の双対性の証明.
- GL_n の既約多項式表現の分類
- GL_n の最高ウェイト理論

6. $(\mathrm{GL},\mathrm{GL})$-双対性

- $\mathrm{GL}_m \times \mathrm{GL}_n$-加群 $\mathbb{C}[M_{m,n}]$ の既約分解
- GL_n-加群 $\mathbb{C}[S_n]$，$\mathbb{C}[A_n]$ の既約分解（S_n，A_n はそれぞれ n 次対称行列，交代行列の全体）

7. 縮約と traceless tensor

8. Brauer-Weyl の双対性

- O_n，Sp_{2n} に対する不変式論の第一基本定理

9. O_n，Sp_{2n} の既約表現

講義の感想

古典群を代数群とみてその有理表現を扱うことによって，Lie 群論などの予備知識がなくても理解できるように，心掛けて講義をした．最高ウェイト理論，Lie 代数と関係などについても解説ができればよかった．

科目名 **自然数理特論１** **担当教官** **太田 啓史**

サブタイトル Floer homology theory for Lagrangian intersections

対象学年 **大学院** **２単位** **選択**

教科書 なし
参考書 適宜授業中に提示

予備知識

講義内容

1. Arnold 予想.
   - Morse 関数の臨界点とベッチ数，余接空間上での言い換え.
   - シンプレクティック構造，ラグランジアン部分多様体，ハミルトンベクトル場，ハミルトンアイソトピー.
   - Arnold 予想（ラグランジアン交叉版）.
   - Arnold 予想（不動点版），ラグランジアン交叉版との関係，Lefschetz fixed point formula との比較，Poincaré-Birkoff の定理.
2. 有限次元 Morse 理論概説.
   - 勾配ベクトル場，積分曲線.
   - Morse 複体，$\partial^2 = 0$ の証明.
3. 有限次元 Novikov ホモロジー概説.
   - closed 1-form の被覆空間，Novikov 環とその性質.
   - Novikov ホモロジーとその基本的性質.
4. シンプレクティック構造の基本事項.
   - 両立する概複素構造，その存在，可縮性，可積分条件.
   - Maslov 指数，ラグランジアン部分空間のなす空間の基本群，symplectic area.
5. ラグランジアン交叉の Floer ホモロジー（I）.
   - 道の空間の上の 1-form，道の空間のホモトピー群，２つのラグランジアンの場合の Maslov 指数.
   - 道の空間の被覆，汎関数，臨界点.
   - L^2 計量，勾配方程式 = コーシー・リーマン方程式，J-正則写像.

6. J-正則写像の理論.

   - ソボレフ空間，Fredholm property，線形化方程式，次元.
   - Sard-Smale の定理，横断正則性.
   - Gromov コンパクト性定理.
   - removable singularity 定理.

7. ラグランジアン交叉の Floer ホモロジー（II）.

   - 単調ラグランジアン多様体の場合の境界作用素の定義，一般の場合の問題点.
   - $\mathbf{C}P^1$ バブル，負多重被覆曲線の問題，コンパクト化の境界での横断正則性の問題.
   - $\partial^2 \neq 0$，D^2 バブルの問題，最小 Maslov 指数.
   - $\mathbf{Q}$-障害類の系列.
   - Arnold 予想への応用.

講義の感想

科目名　**数理解析特論１**　**担当教官**　**青本 和彦**

サブタイトル　関数解析と関数近似

対象学年　**大学院**　**２単位**　**選択**

教科書

参考書　G. Szego, Orthogonal Polynomials
N. I. Achieser, Theory of Approximation
E. H. Lieb and M. Loss, Analysis

予備知識

Fourier 級数と Fourier 変換の初等的知識

講義内容

関数を近似する方法として Fourier 多項式，直交多項式，Bernstein 多項式, スプライン関数を用いるなどの方法がある．これらについての概要を紹介し，その収束性や誤差評価を関数空間のノルムを使って行なうなどの初等的内容を講義した.

具体的な講義内容は以下の通り：

1. 差分カルキュラス（2 回）
   - 一般の差分商の計算法
   - Lagrange の補間法
   - Gregory-Newton の公式
2. Bernstein 多項式（2 回）
   - 定義
   - 近似定理
3. Fourier 多項式（2 回）
   - 古典的 Dirichlet の定理
   - Cesaro 和と Fejer の定理
   - Carlson の収束定理
4. Spline 関数（2 回）
   - 定義
   - Schoenberg の定理
5. Pade 近似と 直交多項式（3 回）

- 定義と実例
- Pade 近似とは？ Pade 近似と直交多項式
- 行列式の Laplace 展開と直交多項式の Selberg 型積分公式
- Gauss の力学積分

講義の感想

講義を通じて，できる限り平易に解説を心がけた．内容はむずかしくなく，レポート問題の出来もまーまーの感じ．変分原理についてもやるつもりであったが，出来なかった．

科目名　**リー代数と表現**　**担当教官**　**A. N. Kirillov**

サブタイトル　Algebraic and Combinatorial Aspects of Schubert Polynomials

対象学年　**大学院**　**２単位**　**選択**

教科書

参考書　I. Macdonald, Notes on Schubert Polynomials, Publ. LACIM, vol. 6, Montreal, 1991

L. Manivel, Fonctions symmétriques, polynômes de Schubert et lieux de dégénérescence, Course Spécialisés, vol. 3, SMF, 1998

予備知識

講義内容

The main purpose of the lectures was to give an Introduction to algebraic and combinatorial aspects of Schubert Calculus.

Content of the lectures:

1. Symmetric group.

   Simple transpositions; Coxeter relations; Lehmer's diagram of permutation; reduced words; Exchange Lemma; Bruhat order; dominant, grassmannian and vexillary permutations.

2. Divided difference operators.

   Definition and basic properties of divided difference operators corresponding to simple transpositions; BGG–operators; monomial basis in the ring of S_n–coinvariants; Schur functions; Schubert polynomials of Lascoux and Schützenberger.

3. NilCoxeter algebra.

   Generators and relations; linear basis $\{e_w | w \in S_n\}$; representation by divided difference operators.

4. NilCoxeter algebra and Schubert polynomials.

   Yang–Baxter equation (YBE); universal exponential solution to the YBE; Verma's relations; solutions to the YBE corresponding to the Lie algebras A_2, B_2 and G_2; Schubert's and Stanley's expressions; generating function for Schubert polynomials; double Schubert expression and double Schubert polynomials; orthogonality relation; interpolation formula; Stanley's formula for Schubert polynomials; proof of Macdonald's conjecture on the principal specialization of Schubert polynomials.

5. Geometry of Schubert varieties.

   Flag varieties; Schubert cells and Schubert manifolds; cohomology ring of flag varieties; geometric definition of Schubert polynomials; Grassmannians.

講義の感想

科目名 **数理物理学（II）** **担当教官** **南 和彦**

サブタイトル 量子スピン系の厳密解

対象学年 **大学院** **２単位** **選択**

教科書 なし
参考書 なし

予備知識

特に仮定しない

講義内容

- 第１回：（統計力学における）位相空間，ボルツマン因子の導出，エルゴード仮説.
- 第２回：伝送行列，1 次元 Ising 模型の厳密解，分配関数と熱力学的量.
- 第３回：量子力学の必要な部分，ハミルトニアンの導入.
- 第４回：角運動量の量子化，スピン演算子とそのスペクトル，磁性体のハミルトニアン.
- 第５回：ボーズ粒子とフェルミ粒子，Jordan-Wigner 変換，1 次元 XY 模型の厳密解.
- 第６回：2 次元 Ising 模型の厳密解.
- 第７回：相転移と臨界指数，dual 変換と臨界温度.
- 第８回：スケーリング関係式，Kadanoff の議論とスケーリング仮説，くりこみ群.
- 第９回：1 次元 XXZ 模型，Bethe 仮説.

講義の感想

数理物理を網羅するのではなく，スピン系の厳密解に話を限ったので，数理物理学 II というよりも数理物理学特論というべき内容になった.

科目名　　**数理変分学（数学基礎 I）**　　**担当教官**　**小林 亮一**

サブタイトル

対象学年　　**大学院（昼夜開講コース）**　　**２単位**　　**選択**

教科書　なし．講義内容を書いた資料を配布した.
参考書　なし．ときどき本を紹介した.

予備知識

共通教育程度の数学の素養を仮定した.

講義内容

昼夜開講の数学基礎は必ずしも数理学科で教えられる数学を専門に勉強していない人に学部程度の数学基礎を教えるコースである．今回私が選んだ題材は，初等変分法を通して線形代数と多変数微積分を学ぶこと，平面代数曲線のパラメタが Riemann 面の幾何学で統制されているという話を通しての複素関数論入門，線形代数と運動群の考え方にもとづいて曲面論を展開することの，多変数解析学・関数論・幾何学要論に相当する 3 項目であった．実際の講義ではこれらをごちゃまぜにした．なお，曲面論は引続き後期にも行なう予定で，位相幾何学・複素変数と結び付けようと思っている．なお，7 月に海外渡航で講義できなかった分は 9 月に補った.

講義の感想

共通教育程度の数学のバックグラウンドがあることを仮定して講義を行なった．ε-δ 論法などの作法はセミナーでやるのが適当と思うので，完備化の概念を紹介する以外やらなかった．また，線形代数の基礎をテーマにして講義をやる可能性もあるが，そのような講義は本研究科大学院の役目ではないという考えにいたり，やめた．変換群などの概念の説明は直観的ではあるが丁寧にやった．具体例は配布資料に少し書いたが，講義ではあまりやれなかった．このコースを教えて，共通教育や学部学生の講義への良い準備になったと思う．学生の理解度は数学のバックグラウンドのあるなしで大きく差が開いたようである.

科目名　**構造変分学（数学基礎 II）**　**担当教官**　**尾畑 伸明**

サブタイトル　配列の情報解析

対象学年　**大学院（昼夜開講コース）**　**２単位**　**選択**

教科書

参考書　ミラー :『統計学の基礎』培風館
クロー :『基礎集団遺伝学』培風館
村上征勝 :『真贋の科学』朝倉書店
寺本 英 :『ランダムな現象の数学』吉岡書店

予備知識

特になし

講義内容

配列の情報解析では，確率論・数理統計・情報理論などを基礎にして，１次元配列に関わる応用・実用研究を目的とする．講義では，極く基本的な知識に加えて，最近話題の DNA 鑑定や文章の計量分析，色彩パターン化法などの応用面について述べる．

具体的な講義内容は以下の通り：

1. 二項分布
2. 標本分布と有意性検定
3. 確率統計の基礎
4. ランダム性と規則性 — 配列のエントロピー
5. DNA 鑑定の数理
6. 配列の複雑さ
7. 主成分分析と判別分析
8. 類似性の判定
9. 色彩パターン化法
10. 文章の計量分析

講義の感想

社会人としての経験から，各自が持っている様々な問題意識を刺激するような内容を心がけた．数理統計，より広くは，配列の情報解析に何らかの感触を新たに得てくれたのではないか，と期待している．これによって，各自の社会的立場から情報発信してくれることを願う．

科目名　認知構造数理学（応用系講義）　**担当教官**　御橋 廣眞・長谷川 勝夫・宮尾 克・眞継 隆

サブタイトル

対象学年　大学院（昼夜開講コース）　**２単位**　**選択**

教科書
参考書

予備知識

講義内容

- 「運動と空間・時間の問題」（御橋 廣眞，３回）
  1. ニュートンの運動の三法則に関するコメント
     - 運動学（見えるもの）と力学（見えないもの）を結ぶ方程式
     - 取り扱う「力」の数による分類
  2. 角運動量保存則とコリオリの力
     - 見かけの力
     - コリオリの力と釣合うのは何か
- 「自分で数学を見つけよう」（長谷川 勝夫，３回）
  1. 数量化の意味
     - 数学における定義と解釈
     - 数式の意味
  2. 直線
     - 実数と空間とオペレーション
     - 空間の分割
  3. 論理
     - アルゴリズム
- 「数学と統計科学との関わり」（宮尾 克，３回）
  1. 数理統計学とはなにか．統計学と確率論の関係
  2. 統計データの記述，分布
  3. 確率の基本概念，平均値，分散と標準偏差，確率変数の独立性，確率変数とその分布
  4. 確率分布，２項分布，正規分布，２項分布の正規近似

5. 情報とシャノンのエントロピー
6. 推定と検定
7. 種々の統計モデル

こうした考え方の上で，実際の研究計画のたて方，考え方を実例に則した講義を行った.

- 「実証研究の考え方」(眞継 隆，3 回）
  1. 観察データと法則性
  2. 「分ける」こと,「分かる」こと
  3. 生産関数の実証研究

講義の感想

科目名　経済構造数理学（応用系討論）　**担当教官**　御橋 廣眞・長谷川 勝夫・宮尾 克・眞継 隆

サブタイトル

対象学年　大学院（昼夜開講コース）　**２単位**　**選択**

教科書
参考書

予備知識

講義内容

修士の学位修得のための研究，論文作成について，講義・講読などを行う．

- 御橋 廣眞「論文の書き方」（3 回）
  自然科学系の場合について，具体例を挙げながら,「企画・構想」「データーの集積と処理」「取捨・選択」「まとめ方のポイント」プラス「発表の仕方」
- 長谷川 勝夫（2 回）
  1. 数学における定義と解釈.
  2. 直線を例にした数学的考え方.
  3. 論理とアルゴリズム.
- 宮尾 克（2 回）
  1. 数理統計学とはなにか．統計学と確率論の関係.
  2. 統計データの記述，分布.
  3. 推定と検定.
  4. 種々の統計モデル.

  こうした統計学的な研究方法と種々のモデルを解説し，個々の院生の研究テーマとの関連で，統計的考え方や実験計画のたて方について実例に則した講義を行った.
- 眞継 隆「計量経済学の考え方」（3 回）
  1. 経済構造と構造変化
  2. 自己回帰モデルとカルマン・フィルター
  3. 賃金と物価の相互依存関係

講義の感想

１９９９年度 後期講義内容要約

１９９９年度後期時間割表（数理学科）

		1年生	2年生	3年生	4年生
月	1			多様体と微分型式（土屋）	
	2				
	3				高次位相特論2（木村・坂上）
	4				
火	1			代数系と表現（藤原）	
	2				基幹数理特論1（寺西）
	3		関数論（大沢健）		
	4				
水	1		ベクトル解析（中西敏）	確率・統計要論（市原）	
	2				自然数理特論1（浪川）
	3				
	4				
木	1		解析学要論（三宅）	Lie 群と対称性（小林）	
	2				数理解析特論1（名和）
	3	数学展望 II（藤原）	数学演習 V（千代延）		
	4	数学演習 II（笹原・古田）			
金	1		代数学序論（岡田）	関数解析（尾畑）	
	2				
	3		数学演習 VI（吉田）		
	4				

１９９９年度後期時間割表（大学院）

		４年生と共通	大学院のみ
月	1		
	2		保型形式論（伊藤）
	3		
	4		
火	1		
	2	不変式論（寺西）	
	3		
	4		
水	1		
	2	数理物理学（I）（浪川）	
	3		
	4		
木	1		
	2	偏微分方程式論（名和）	代数多様体論（金銅）
	3		
	4		
金	1		
	2		複素解析学（中西敏）
	3		数理物理学（II）（Kirillov）
	4		

１９９９年度後期時間割表（大学院昼夜開講コース）

月	5	
	6	
火	5	応用系講義（社会構造数理学） 担当：浪川 幸彦
	6	
水	5	応用系討論（社会数理特論１） 担当：眞継 隆
	6	
木	5	数学基礎 II（大域変分学２） 担当：内藤 久資
	6	
金	5	数学基礎 I（位相変分学） 担当：小林 亮一
	6	

科目名 **数学展望 II** **担当教官** **藤原 一宏**

サブタイトル

対象学年 **１年** **２単位** **選択**

教科書 なし
参考書 なし

予備知識

なし

講義内容

合計 11 回の講義を行った．個人的な都合により，2 回休講とした．講義は一時から二時半までの一時間半行った．

講義では古典的な解析を数論とからめて解説をした．あまり厳密性を強調せず，数学におけるアイディアを説明することに力点を置いた．

成績評価はレポート二回の総合点によった．

具体的な講義内容は以下の通り（回数は目安）

1. 素数はどのぐらいあるか（1 回）
   - $\zeta(2)$ を求めるオイラーのアイディア
   - ζ-関数のオイラー積，調和級数の発散
   - 素数の無限性（オイラーの証明，ユークリッドの証明）
2. 母関数（1.5 回）
   - 母関数と数列
   - 線形漸化式，フィボナッチ数列
3. 二項定理（1 回）
   - 非線形漸化式
   - 数列の収束，テイラー展開
4. 三重積公式（2.5 回）
   - 分割数
   - 五角数定理の紹介
   - 三重積公式と五角数定理
   - q-二項定理

5. 複素関数の例（2 回）
    - 複素変数と解析関数
    - 指数関数，オイラーの定理
    - 指数関数の周期性，$\mathbf{C}/\mathbf{Z} \simeq \mathbf{C}^{\times}$
    - テータ関数
    - 楕円関数，二重周期，複素トーラス
6. 熱方程式（1.5 回）
    - フーリエの解法，重ね合わせの原理
    - 熱核としてのテータ関数
    - ガウス核と Jacobi の虚変換
7. ζ-関数（1.5 回）
    - ガンマ関数
    - テータ関数の Mellin 変換
    - テータの虚変換と ζ の関数等式
    - Hadamard-de la valeé Poussin の方法

講義の感想

前半は母関数の考え方をメインに，フィボナッチ数列の具体的表示を部分分数展開で求めたり，ベキ級数の計算に慣れることを心がけた．このように計算できるものだとわかりよいようである．途中まではかなりついてきている感じがあったが，12 月頃複素関数をだましだまし使い始めるころから理解が難しくなったように思う．素数の話から始めたので素数定理の証明まで説明しようと計画したのだが，その一歩手前でやめた.（高校の授業でもやっているはずなのだが）複素数に弱いという印象を持った．内容的には二年，三年生でやった方が良かったかもしれない．ただ個人的には,「難しいけど，何かありそうだ」と思ってもらえるような講義も早い段階から必要だと思う.「やさしいけど，何もなさそう」「難しいうえ，何も感じない」というのが数学展望として最悪だろう.

科目名　**数学演習 II**　**担当教官**　**笹原康浩・古田泰之**

サブタイトル

対象学年　**１年**　**２単位**　**選択**

教科書
参考書　飯高茂 編/監修，微積分と集合 そのまま使える答の書き方，講談社

予備知識

微積分では，$\varepsilon - N$ 型の定義，$\varepsilon - \delta$ 型の定義，等の前期の知識

講義内容

線形代数は笹原，微積分は古田が担当した．線形代数は次のようなことをやりました．

1. 行列の和積の計算と，それによって保たれる性質など
2. 置換の符号や互換分解など
3. 行列式と逆行列の計算
4. 行列の既約・可約とジョルダン標準形
5. 行列の固有値と固有ベクトルの計算
6. 実ベクトル空間の内積と対称行列の性質など
7. 正規行列の性質
8. 行列の指数関数

微積分では次のことをやりました．

1. 数列の極限，$\varepsilon - N$ 型の定義
2. 関数の連続性，$\varepsilon - \delta$ 論法
3. 上限と下限
4. 上極限と下極限

講義の感想

線形代数の演習では，まだ学生に完全な解答の記述を求めるのは難しいと判断したため，それを理由に誤りとするのは避けた．これは，いきなり完全な解答を求めても学生にはどこがいけないのか理解できず，解答する意欲をそぐだけになることをおそれたためである．不完全な解答に対しては補足・訂正を加え，とりあえず数学で求められる記述の仕方を実例に即して教えたつもりである．だが，感触としては一割から

二割程度の学生がなんとか形になっている解答を記述できるといったところで十分な成果があったとはとても言えない状況である．

微積分の授業では，実際にレポートを書いてもらうために，答の書き方を重視しました．そのせいで，授業の進度が非常に遅くなってしまいました．

レポート問題

問題１． $r > 0$ を有理数とする．このとき

$$f(x) = x^r$$

は定義域 $D = [\,0, \infty)$ で連続であることを，$\varepsilon - \delta$ 型の論法により直接証明せよ．

問題２． 正数列 a_n $(n = 1, 2, \cdots)$ について，次のことを証明せよ．

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

科目名 **代数学序論** **担当教官** **岡田 聡一**

サブタイトル 代数系入門

対象学年 **２年** **４単位** **必修**

教科書
参考書 松坂 和夫，代数系入門，岩波書店

予備知識

特に仮定しない

講義内容

群論，環論を中心とした代数系の基礎を講義した．
具体的な講義内容（キーワード）は以下の通りである．

1. 群論の基礎（3 回）

   §1 半群（結合法則，交換法則，単位元，可逆元，逆元）

   §2 群，環，体（定義と例，対称群，一般線型群，Hamilton の四元数体）

   §3 部分群，正規部分群（生成系，元の位数）

   §4 準同型写像（核，像，同型写像，群の直積）

   §5 巡回群（巡回群の部分群，生成元，直積，Euler の関数，二面体群）

   §6 対称群（巡回置換，互換，差積，符号，交代群）

2. 剰余群と群の作用（4 回）

   §7 剰余類（同値関係，Lagrange の定理）

   §8 剰余群（定義，G と G/N の部分群の対応）

   §9 準同型定理（普遍写像性，同型定理，交換子群）

   §10 群の作用（軌道，可移な作用，固定化群）

   §11 共役類（置換のサイクル分解，対称群の共役類）

   §12 Sylow の定理（Sylow 部分群，Sylow の定理の証明，位数 $2p$ の群の分類）

   §13 正多面体群（$SO(3)$ の有限部分群の分類）

3. 環論の基礎（3.5 回）

   §14 部分環，イデアル（イデアルの和，生成系，整除関係）

   §15 多項式環（形式的な定義，形式的巾級数環，割算の原理）

§16 準同型写像（核，像，多項式環からの準同型写像，環の直積）

§17 分数環（構成，商体，有理関数体，Laurent 多項式環）

§18 剰余環（定義，R と R/I のイデアルの対応，素イデアル，極大イデアル）

§19 準同型定理（普遍写像性，同型定理，中国剰余定理）

§20 整数環の剰余環（整数環とその剰余環のイデアル，標数，p 元体，Fermat の小定理，Wilson の定理）

4. PID と UFD（2.5 回）

§21 単項イデアル環と Euclid 環（例と反例，Euclid の互除法）

§22 素元と既約元（既約多項式，$\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ の素元）

§23 一意分解整域（UFD の定義の同値性，PID は UFD）

§24 UFD 上の多項式環（UFD 上の多項式環は UFD，原始多項式，Gauss の補題）

§25 体の拡大（代数的元，超越的元，拡大次数，有限体）

講義の感想

講義は，時間割通り途中 15 分程度の休憩をはさんで 3 時間，合計 13 回行った．講義中に演習の時間を設けることはしなかったが，証明を省略しないように，また，具体例を多く与えるように心がけた．

内容的には，代数学の基本的な部分（参考書の第 2 章，第 3 章）をほとんどカバーしているが，次のような項目には触れていない．

1. 自由群，群の生成系と基本関係
2. 巾零群，可解群
3. 作用域をもつ群，組成列，Jordan-Hörder の定理
4. アーベル群の基本定理（PID 上の加群の応用として扱ったほうがよいだろう.）
5. Noether 環，Hilbert の基底定理
6. 環上の加群（テンソル積，PID 上の加群）

試験問題

問題１． 次の条件にあてはまるものの例をあげよ.（例を 1 つ，あるいは 1 組だけあげればよく，理由を示す必要はない．また，あてはまるものが存在しないときは「存在しない」と答えよ.）

(1) 4 次対称群 S_4 の元 σ，τ で，$\sigma\tau \neq \tau\sigma$ となるもの.

(2) 複素数体 $\mathbb{C}$ 上の n 次一般線型群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の正規部分群 N で，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$，$\{I_n\}$ のいずれにも等しくないもの.

(3) 正の実数全体が乗法に関してなす群 $\mathbb{R}_{>0}$ から実数全体が加法に関してなす群 $\mathbb{R}$ への同型写像 $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$.

(4) 位数 6 の群 G_1，G_2 で，互いに同型ではないもの.

(5) S_4 の 3-Sylow 部分群 H.

(6) 複素数を成分とする n 次正方行列全体のなす環 $M_n(\mathbb{C})$ の左イデアル I で，$M_n(\mathbb{C})$，$\{0\}$ のいずれにも等しくないもの.

(7) 整域 R と R 上の 0 でない多項式 $f(X) \in R[X]$ で，任意の $a \in R$ に対して $f(a) = 0$ をみたすもの.

(8) 整数環 $\mathbb{Z}$ の素イデアル I で，極大イデアルではないもの.

(9) $\mathbb{Z}$ 上の 1 変数多項式環 $\mathbb{Z}[X]$ のイデアル I で，単項イデアルでないもの.

(10) $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ の素元で，$\mathbb{Z}$ に含まれないもの.

問題２. G，G' を群とし，$f : G \to G'$ を準同型写像とする．N を G の正規部分群で，$N \subset \mathrm{Ker} f$ となるものし，G/N を G の N による剰余群，$\pi : G \to G/N$ を自然な準同型写像とするとき，次を示せ.

(1) $g \circ \pi = f$ となる準同型写像 $g : G/N \to G'$ が存在する.

(2) g が単射であるための必要十分条件は，$\mathrm{Ker} f = N$ となることである.

(3) g が全射であるための必要十分条件は，f が全射であることである.

問題３. 0 でない複素数全体が乗法に関してなす群 $\mathbb{C}^\times$ について，次を示せ.

(1) H を $\mathbb{C}^\times$ の有限部分群とすると，H は巡回群である.

(2) K を $\mathbb{C}^\times$ の部分群で，指数 $[\mathbb{C}^\times : K]$ が有限であるものとすると，$K = \mathbb{C}^\times$ である.（ヒント：剰余群 $\mathbb{C}^\times/K$ を考え，任意の $z \in \mathbb{C}^\times$ に対して $w^n = z$ となる $w \in \mathbb{C}^\times$ が存在することを利用せよ.）

(3) $\mathbb{R}^\times$ を 0 でない実数全体のなす $\mathbb{C}^\times$ の部分群，$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| = 1\}$ とするとき，$\mathbb{C}^\times/\mathbb{R}^\times \cong \mathbb{T}$.

問題４. p を素数とし，G を p-群とするとき，次を示せ.

(1) G の位数が p であるとき，G は巡回群である.

(2) $Z(G) = \{z \in G \mid$ 任意の $a \in G$ に対して $za = az\}$ を G の中心とするとき，$Z(G) \neq \{e\}$.（ヒント：$G - \{e\}$ を G の共役による作用に関して G-軌道に分解せよ.）

(3) G の位数が p^2 であるとき，G は p^2 次の巡回群 C_{p^2}，または p 次の巡回群 C_p の直積 $C_p \times C_p$ と同型である.

問題５. 整域 R 上の 1 変数多項式環 $R[X]$ の，イデアル $(X^2 + X + 1)$ による剰余環 $R[X]/(X^2 + X + 1)$ について，次の問に答えよ.

(1) $R = \mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$（2 個の元からなる体）であるとき，$\mathbb{F}_2[X]/(X^2 + X + 1)$ の和と積の演算表（乗積表）を作れ．例えば，$\mathbb{F}_2$ の和と積の演算表は,

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

である．

(2) $R = \mathbb{R}$（実数体）であるとき，$\mathbb{R}[X]/(X^2+X+1) \cong \mathbb{C}$ となることを示せ．

(3) $R = \mathbb{Z}$ であるとき，$\mathbb{Z}[X]/(X^2+X+1)$ の構造を調べ，(X^2+X+1) が $\mathbb{Z}[X]$ の極大イデアルであるかどうか，素イデアルであるかどうかを判定せよ．

(4) $R = \mathbb{C}$ であるとき，$\mathbb{C}[X]/(X^2+X+1)$ のイデアルをすべて求めよ．

問題６． 整数環 $\mathbb{Z}$ のイデアル $24\mathbb{Z}$ による剰余環 $R = \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ について，次の問に答えよ．

(1) $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ が加法に関してなす群の部分群の個数を求めよ．

(2) $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ の乗法に関する可逆元の個数を求めよ．

(3) $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ の巾零元（$a^n = 0$ となる正整数 n が存在するような元 $a \in \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$）の個数を求めよ．

(4) $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ のイデアルをすべてあげ，その包含関係を図示せよ．

(5) $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ と環の直積 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ は環として同型であるかどうか，理由もつけて答えよ．

科目名　解析学要論　**担当教官**　三宅 正武

サブタイトル　関数の近似と各種の方程式の問題への応用

対象学年　２年　**４単位**　**必修**

教科書　解析概論（高木貞治著）
参考書

予備知識

微積分の初歩

講義内容

解析学は関数に関わる各種の方程式（関数方程式，微分方程式，積分方程式など）をどのように解くかを通して発展してきた．一般には，そのような方程式は実際に解く事は出来ないので，解が存在するか，解はどのように求められるか（解の近似），どのような性質を持つものかを調べる事が重要な課題となる．この講義では，微積分に続く解析学への入門として，関数の近似（関数列，関数項級数の収束問題）とそれが方程式の解の存在の問題にどのように応用されるのかを，各種の方程式を通して説明した．

具体的な講義内容は以下の通り：

1. 連続関数の基本性質の復習（1 回 = 3 時間）
   - 距離の概念と同値性，関数の極限
   - 連続関数の基本性質（中間値の定理，最大値・最小値の定理，一様連続性など）
2. 関数列の収束性（2 回）
   - 勉強の動機付け（微分方程式の解の存在を通して．折れ線法と積分方程式による逐次近似法）
   - 関数列の収束の概念（単純収束と一様収束）
   - 連続関数列の一様収束と極限関数の連続性
   - 極限関数の微分可能性
   - 関数項級数の一様収束性
   - 項別積分，項別微分
   - 積分記号下での極限操作，微分可能性，応用例
3. 巾級数の収束半径と収束判定法（優級数法）（2 回）
   - 巾級数と収束半径（コーシー・アダマールの定理）
   - 収束半径内での微分可能性，項別微分，項別積分など
   - テーラー展開への応用

- 巾級数の収束判定法（優級数法と優級数の構成法）
- 応用１　複素微分方程式の解の存在
- 応用２　複素陰関数定理

4. 縮小写像の原理とその応用（3 回）

- 動機付け（陰関数定理の証明を通して縮小写像の原理を概観する）
- バナッハ空間，完備距離空間
- 不動点と縮小写像の原理
- 積分方程式（= 微分方程式）と縮小写像の原理
- 単独方程式から，連立方程式，高階方程式への拡張
- 積分方程式の逐次近似列による解の近似

5. フーリエ級数とその応用（2 回）

- 直交関数系と関数の近似
- ベッセルの不等式と直交関数系の完全性
- ３角関数系の完全性と滑らかな関数のフーリエ級数展開
- 熱方程式の初期値・境界値問題への応用

講義の感想

講義を通じて, できる限り具体的で平易な解説を心がけた.

試験問題

問題１. (1) 有界開区間 $I=(a,b)$ で一様連続な関数 $f(x)$ は I で有界な事を証明せよ.

(2) (1) の逆は必ずしも成り立たないことを示せ．例えば，$J=(0,1)$ で有界ではあるが，一様連続でない連続関数の例を与えよ.

問題２. (1) 実数 $\mathbf{R}$ 上で連続な関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ で次の条件をみたすものを与えよ.

$$\begin{array}{ll}\text{(i)} & \displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0 \quad （\mathbf{R}\ \text{上で一様収束}） \\ \text{(ii)} & \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx=1 \quad (n=1,2,3,\cdots)\end{array}$$

(2) (1) で与えた関数列が $\mathbf{R}$ 上で 0 に一様収束する事を示せ.

問題３. (1) $f(x)=\log(1+x^2)$ の $x=0$ を中心とする Taylor 級数展開とその収束半径 R を求めよ．この問題で，独立変数 x は実数と考えても，複素数と考えてもどちらでもよい.

(2) 巾級数 $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ はその収束半径内において，項別微分，項別積分が自由に出来る理由を述べよ.

問題４． $X = C^0[0,1]$（$[0,1]$ で連続な関数の全体）に $\|u\| = \max_{x\in[0,1]} |u(x)|$（$u(x) \in X$）として X にノルムを導入するとき，X はバナッハ空間になる．

(1) ここで定義なしで述べた，ノルム，バナッハ空間とはどんなものか説明せよ．X がバナッハ空間である理由を述べよ．

(2) $a(x) \in X$ を任意に固定しておく．このとき，$u(x) \in X$ に対して，

$$(Tu)(x) = \int_0^x a(t)u(t)dt, \quad x \in [0,1]$$

として写像 $T : X \to X$ を定義する．このとき，n を十分大きく選べば，$T^n : X \to X$ は縮小写像になることを証明せよ．

問題５． (1) $f(x) \in C^0[-\pi,\pi]$ が奇関数のとき，$f(x)$ のフーリエ級数展開において，$\cos nx$（$n \geq 0$）に関する係数は全て 0 であることを示せ．

(2) 次の初期値・境界値問題の解 $u(t,x)$（$t > 0$，$x \in (0,\pi)$）を求めよ．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t > 0,\ 0 < x < \pi \\ u(0,x) = 1, & u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \end{cases}$$

科目名　関数論　　**担当教官**　大沢 健夫

サブタイトル

対象学年　２年　　**４単位**　**必修**

教科書　複素解析（アルフォース）
参考書　解析関数（田村二郎）

予備知識

講義内容

前期の数学基礎 V の続きとして，正則関数の無限乗積展開と有理型関数の部分分数展開と Laurent 展開を皮切りに，L. オイラーの言葉である「z の分数関数，無理関数は $A+Bz+Cz^2+Dz^3+\mathrm{etc}$ の形の有限式では表されないので，これらの項が無限に続いた式で表す．同様に超越関数を項が無限に続いた式で表すと，その性質がよくわかる.」を徹底的に具体化することをめざして，以下の項目について，主に教科書に沿って話をした.

1. $\dfrac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum \dfrac{1}{(z-n)^2}$.
2. $\sin \pi z = \pi z \prod \left(1 - \dfrac{z^2}{n^2}\right)$.
3. $\dfrac{\pi^2}{6} = \sum \dfrac{1}{n^2}$.
4. $\Gamma(z) = z^{-1} e^{-\gamma z} \prod \left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n}$，$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin \pi z}$.
5. $\zeta(s) = \prod (1-p^{-s})^{-1}$.
6. $\zeta(s)\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx$.
7. $(s-1)\zeta(s) \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$，$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin \dfrac{\pi s}{2} \cdot \Gamma(1-s)\zeta(1-s)$.
8. 二重周期関数とアーベルの定理.
9. $\wp(z) = \dfrac{1}{z^2} + \sum \left\{ \dfrac{1}{(z-\omega)^2} - \dfrac{1}{\omega^2} \right\}$.
10. $\sigma(z) := z \prod \left(1 - \dfrac{z}{\omega}\right) e^{z/\omega + (z/\omega)^2/2}$.
11. $\wp(z) = -(\log \sigma(z))''$.
12. $\wp'(z)^2 = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3)$.
13. $\lambda(\omega_2/\omega_1) := (e_3 - e_2)/(e_1 - e_2)$，$\lambda$ の保型性.
14. アスコリ・アルツェラの定理，フルヴィッツの定理を用いてリーマンの写像定理を証明し，シュワルツの鏡像原理を用いて λ を幾何的に構成した.

15. リーマンの写像定理の周辺：ディリクレ問題，調和関数，カラテオドリの定理，フェファーマンの定理，シュワルツ・クリストフェルの公式（について），ジュコフスキー変換，完全流体の定義と等角写像．［証明はほとんど省いた］
16. 二重周期関数の周辺：楕円積分，楕円の弧長とレムニスケートの弧長（について）．
17. 素数定理の証明（の概要）．

講義の感想

出席者の一人が「予備知識が必要であるというわけではないが，二年生には高級すぎる」と言っていた．

試験問題

問題１． 複素平面 $\mathbb{C}$ 内の直線 ℓ に対し，点 $z \in \mathbb{C}$ に ℓ に関して z と線対称な位置にある点を対応させる写像を σ_ℓ で表す．このとき，$\mathbb{C}$ 内の任意の二直線 ℓ_1，ℓ_2 に対し，

$$\sigma_{l_1} \circ \sigma_{l_2} \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$$

であることを示せ．

問題２． Mittag-Leffler の定理，Weierstraßの乗積定理，$\wp$ 関数，σ 関数の具体的な内容，表示式について，それらの関連に重点を置いて説明せよ．

問題３． つぎの各問に答えよ．(1)，2) は 3) と無関係ではない．）

1) $\dfrac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \text{etc.}}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \text{etc.}} = \infty.$
2) 全射 $\lambda : \mathbb{N} \to \{-1, 1\}$ で，
$$\lambda(ab) = \lambda(a)\lambda(b) \quad (\forall a, \forall b \in \mathbb{N})$$
をみたすものが存在する．
3) $1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{11} - \dfrac{1}{12} - \text{etc.} = 0.$

ただし，3) では収束性の証明に素数定理を用いても構わない．

科目名　ベクトル解析　　**担当教官**　中西 敏浩

サブタイトル

対象学年　２年　　**４単位**　**必修**

教科書　なし
参考書　岩堀長慶，ベクトル解析，裳華房
安達忠次，ベクトル解析，培風館
その他ベクトル解析に関係するのは何でも

予備知識

これまでに習った微分積分学と線形代数学

講義内容

いままで習ったユークリッド空間上の解析学から 3 年次に習う多様体論への橋渡しとなることを目的とし，おもに 3 次元空間内の曲面や領域を舞台にベクトル場の演算や積分定理を中心とした解析学を展開する．

具体的な講義内容は以下の通り：

- 第 1 回（10 月 13 日）線積分
（項目：線積分の定義，線積分のパラメータの変換による不変性，弧長による線積分，Green の定理，問題演習）

- 第 2 回（10 月 20 日）曲面の向き
（項目：曲面の定義，同調する向きをもつ座標近傍，曲面の向きづけ，単位法ベクトル場，問題演習）

- 第 3 回（10 月 27 日）面積分
（項目：面積分の定義，面積要素についての面積分の定理，Gauss の定理，問題演習）

- 第 4 回（11 月 11 日）Stokes の定理
（項目：Stokes の定理，スカラー場，スカラー場の勾配と等位曲面，ポテンシャル，問題演習）

- 第 5 回（11 月 18 日）ベクトル場とテンソル場
（項目：ベクトル空間上の線型形式，線型形式のテンソル積，交代線型形式，交代形式の外積，接ベクトル空間，ベクトル場，微分形式（交代共変テンソル場），問題演習）

- 第 6 回（11 月 26 日）微分形式
（項目：微分形式とその演算，外微分，微分形式を用いた積分定理の表現，問題演習）

- 第 7 回（12 月 1 日）全微分方程式
（項目：全微分方程式とその解，完全積分可能性，閉形式，Poincaré の補題，積分可能条件，問題演習）

- 第 8 回（12 月 8 日）ベクトル場の演算
（項目：スカラー場の勾配，ベクトル場の回転・発散，ベクトル場の言葉で書かれた積分定理，Poincaré の補題（ベクトル・ポテンシャルの存在），Poisson の方程式，問題演習）
- 第 9 回（12 月 22 日）
（項目：Poisson の方程式（前回の続き），Helmholtz の定理，総合問題による小テスト）
- 第 10 回（1 月 19 日）
（項目：曲線座標系，直交曲線座標系，円柱座標と空間極座標，またそれらに関する Laplace 作用素の表示，Helmholtz の方程式の解，問題演習）
- 第 11 回（1 月 26 日）重積分の変数変換
（項目：重積分の変数変換の公式の証明，問題演習）

講義の感想

毎回小テスト形式の演習問題を行ない，解答を提出させたので，学生が計算をきちんとできるようにすることを心がけた．従って内容は目新しさのないあまり現代的でないものになってしまった．リーマン幾何の入門になるような項目をもっと取り入れることができればよかった．テストの時間中は学生に強制的に数学に取り組ませることになるが，そのことが学生にとっては好評だったようである．レポートの採点がしんどかった．

試験問題

問題１． 3 次元空間内の平面 $z = ax + by$ と円柱面 $x^2 + y^2 = 1$ とが交ってできる閉曲線を C とする．このとき線積分について

$$\int_C ydx + (z-x)dy - ydz = 0, \quad \int_C zdx + ydy - xdz = 0$$

が成立するような a, b の値を求めよ．

問題２．（以下の (1) と (2) は同じ問題である．片方のみ解答せよ．）
曲面 S を $x^2 + y^2 = z^2$（$0 < z < 1, x > 0, y > 0$）の xy 平面に面する方を表向きとして定める．
(1) 面積分

$$\iint_S ydy \wedge dz + zdz \wedge dx + xzdx \wedge dy$$

を計算せよ．
(2) $\boldsymbol{F} = (y, z, xz)$ とするとき，面積分

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$$

を計算せよ．

問題３． (1) 微分形式

$$zdx + xz^2dy + xyzdz$$

が積分可能条件をみたすことを示せ.

(2) 全微分方程式

$$zdx + xz^2dy + xyzdz = 0$$

の解を求めよ.

問題４. 以下，$\mathbf{R}^3$ には直交軸 Ox, Oy, Oz が右手系となる向きが与えられているとする．$r > 0$ に対して

$$S(r) = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\} \quad (O \text{ 中心半径 } r \text{ の球面})$$

とおく．また $0 < r_1 < r_2$ に対して

$$D(r_1, r_2) = \{(x, y, z) : r_1^2 < x^2 + y^2 + z^2 < r_2^2\}$$

とおく．ω を $\mathbf{R}^3 - \{O\}$ で定義された C^1 級の 2 形式で，すべての $r > 0$ に対して

$$(*) \qquad \iint_{S(r)} \omega = a + \frac{b}{r}$$

をみたすものとする．ここで a, b は定数である．

(1) $d\omega = 0$ となるとき，a, b はどのような条件をみたさないといけないか.

(2) ω が完全形式，すなわち $\omega = d\varphi$ をみたす 1 形式 φ が存在するとき，a, b はどのような条件をみたさないといけないか.

(3) $(*)$ をみたす微分形式 ω の例を一つあげよ.

（$D(r_1, r_2)$ の記号は問題中は出てこないが，必要ならば解答に用いてよい.）

科目名　数学演習 V　　**担当教官**　千代延 大造

サブタイトル

対象学年　２年　　**２単位**　**必修**

教科書
参考書

予備知識

講義内容

解析学要論と関数論の講義の内容にそって演習をおこなう．一度小テストをおこなう．

講義の感想

科目名　**数学演習 VI**　**担当教官**　**吉田 健一**

サブタイトル　代数学序論，ベクトル解析演習

対象学年　**２年**　**２単位**　**必修**

教科書　講義に使用したものを使用
参考書　特に指定なし

予備知識

微積分（2 年前期まで），線型代数（2 年前期まで）

講義内容

1. 第 1, 2 回（10 月 8 日, 15 日）代数学序論の講義の補助
   群論の基本的な問題を配布した．主なキーワードは以下の通りである：群の定義，同値関係と類別，部分群，正規部分群，群の生成系，巡回群，アーベル群，群の位数，対称群と交代群，互換，巡環，剰余類，剰余群，群の準同型，準同型定理，ラグランジュの定理，群の同型，素数位数の群，単純群，四元数群，直交群，正２面体群，2 次直交群の有限部分群など．

2. 第 3 回（10 月 22 日）ベクトル解析の講義の補助
   2 年前期の線型代数から，多重線型代数の内容を中心に復習した．体上のテンソル積代数，外積代数を定義し，基本性質，間違いやすい点を問題にした．一般の環上のテンソル積の概念は，時間の都合上で取り扱うことはできなかった．

3. 第 4 回（10 月 29 日）ベクトル解析の講義の補助
   第 3 回の続きとして，空間内のスカラー場，ベクトル場に対する微分演算（grad, div, rot）に対する基本的な問題，特に，後に微分形式の理解に役立つような問題を配布した．

4. 第 5, 6 回（11 月 12 日, 19 日）代数学序論の講義の補助
   群論の続きの演習問題を配布した．主なキーワードは，群の作用，置換表現，安定化群，共役類（対称群，2 面体群），類等式の応用（素数べきの群，p 群の中心，5 次交代群の単純性）である．

5. 第 7, 8, 9, 10 回（12 月 3 日, 10 日, 17 日, 21 日）ベクトル解析の講義の補助
   外積代数を通して，微分形式を定義し，外微分，引き戻しなどの基本操作及び，微分形式の積分計算（線積分，面積分），グリーン・ストークスの定理を利用した積分計算，曲面の向きなどを問題の対象にした．その他，ポアンカレの補題，コーシーの積分定理にも多少触れた．

6. 演習の進め方：演習の基本として，黒板で解いて説明してもらう形の演習を行った．また，一月に一回，小テスト（範囲は指定）を行い，基本的なことを理解してもらうよう心がけた．例えば，代数学序論に関しては，非可換有限群の部分群，正規部分群をラグランジュの定理を通して決定できることを最低限の目標にした．また，ベクトル解析では，1, 2 年の線型代数，微積分から，3 年次の多様体

論への橋渡しとして，微分形式を難しくないものとして理解してもらうことを目標にし，できるだけ実例を重視した．また，冬休みのレポートの一部として，講義内容のまとめを一枚の用紙にまとめるよう指示した．

講義の感想

1. 成績の付け方：黒板で解いてもらう他，小テストを行った．さらに，冬休み時に課題レポートを提出してもらい，これらの結果を総合して成績を付けた．また，学生の過度の負担を避けるため，講義の試験との重複を避けて，定期試験は行わなかった．

2. 反省すべき点：

• 2 年次後期の演習は，解析系の講義の補助を数学演習 V で，代数学序論とベクトル解析に対する補助をこの数学演習 VI で行う方向で行った．しかし，代数学とベクトル解析の内容があまりにも違いすぎるため，問題数が多くなり過ぎ，十分に内容をフォローすることができなかった．特に，群論（シローの定理），環論（イデアル論，単項イデアル整域，一意分解整域）などに関する演習問題を配布することができなかった．これらの点は，引き続き 3 年次の演習代数でフォローすることになった．

（注意）講義の方で，別途問題を配布していただいていたので，そちらを解くように勧めた．

• 冬休みのレポートで，講義内容のまとめを行うという課題を出したが，一部の生徒を除いて，定理をただ羅列するのみのレポートが多く，自分の言葉でまとめるという趣旨をあまり理解してもらえなかったようである．

科目名　**確率・統計要論**　　**担当教官**　**市原 完治**

サブタイトル

対象学年　**３年**　　**６単位**　**選択**

教科書
参考書　西尾真喜子，確率論，実教出版
伊藤 清，岩波講座・基礎数学・確率論，岩波書店

予備知識

基礎解析 III

講義内容

測度論的確率論の基本的事項について説明した．一般論に入る前に，直観的イメージを与えるため，離散的な空間上の確率論（第１章）について少し詳しく論じた．

講義の内容のまとめ（証明抜き，手書きのノート）を毎回を渡した．

具体的な講義内容は以下の通り：

1. 離散確率空間（2 回）
   - 可算集合上の確率測度，確率変数とその平均値，チェビシェフの不等式，離散分布の例（二項分布，ポアソン分布）
   - 条件付き確率，ベイズの定理，分割に関する条件付き確率
   - 独立性，確率変数の独立性，平均値の乗法性，独立確率変数の和の分布とたたみこみ
   - ベルヌーイの大数の法則とその応用（ワイヤストラスの多項式近似定理の証明）
2. 一般の確率空間（3.5 回）
   - 一般の可測空間上の確率測度とその性質，確率測度の例（ガウス分布，コーシー分布，一様分布）
   - Dynkin 族 と乗法族，確率測度の一致の定理と拡張定理およびその応用（Lebesgue-Stieltjes 測度，確率測度の直積）
   - 事象系の独立性，Borel-Cantelli の補題
   - 確率変数の分布と分布関数，平均値・分散・モーメント，結合分布と周辺分布およびその例（n 次元正規分布），Jensen の不等式
   - 確率変数の独立性，加法族の独立性
   - 確率変数の収束（概収束，確率収束等）
3. 特性関数と分布（3.5 回）
   - 分布の特性関数，正の定符号関数，特性関数の例

- 特性関数とモーメントの関係
- Levy の反転公式，特性関数と分布の一対一対応性，Fubini の定理
- n 次元分布の収束性について
- 法則収束，分布の収束と特性関数の収束の関係，一般化された正規分布

4. 独立確率変数列（2.5 回）
   - Kolmogorov の 0-1 法則
   - Kolmogorov の不等式, 大数の強法則
   - 中心極限定理（Lindeberg の条件，Liapounov の条件）
5. その他（0.5 回）
   - ポアソンの小数の法則，指数分布と待ち時間
   - 確率変数の変換とその応用

講義の感想

確率論に関する講義の内容を少しけずって統計学の基礎的概念についても説明すべきだったと後悔している．

演習の時間をもう少しとるべきだった．

試験問題

問題１．

(i) 確率変数 ξ_i（$i = 1, 2$）は互いに独立で，パラメータλ_i（> 0）の指数分布に従っている（i.e. ξ_i の分布は確率密度関数

$$f_i(x) = \begin{cases} \lambda_i e^{-\lambda_i x} & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

を持っている）ものとする．和 $\xi_1 + \xi_2$ の分布を求めよ．

(ii) $X_1, \cdots, X_n$ は互いに独立で，同分布（パラメータ λ の指数分布）に従うものとする．和 $X_1 + \cdots + X_n$ の分布を求めよ．

問題２．

(i) 確率変数 X はパラメータ λ（> 0）のポアソン分布 $P(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ に従うものとする．X の平均，分散を求めよ．

(ii) 確率変数列 $X_1, \cdots, X_n, \cdots$ は互いに独立，同分布（$P(X_n = 1) = p$，$P(X_n = 0) = 1-p$，$n = 1, 2, \cdots$）に従うものとし，N を $\{X_n, n = 1, 2, \cdots\}$ と独立で，パラメータ λ のポアソン分布に従う確率変数とする．和 $\sum_{k=1}^{N} X_k$ の分布を求めよ．

問題３．

(i) X, Y を互いに独立，平均がそれぞれ λ, μ のポアソン分布に従う確率変数とする．和 $X+Y$ の分布を求めよ．

(ii) $X_1, \cdots, X_n, \cdots$ は平均 λ のポアソン分布に従う独立確率変数列とする．f を $[0, \infty)$ 上の有界連続関数とするとき，次の等式を示せ．

$$E\Big[f\Big(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\Big)\Big] = \sum_{k=0}^{\infty} f\Big(\frac{k}{n}\Big) e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^k}{k!}.$$

(iii) (ii) における関数 f に対して

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f\Big(\frac{k}{n}\Big) e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^k}{k!} = f(\lambda)$$

を証明せよ．

科目名　関数解析　　**担当教官**　尾畑 伸明

サブタイトル

対象学年　３年　　**６単位**　**選択**

教科書

参考書　日合・柳：ヒルベルト空間と線形作用素
新井：ヒルベルト空間と量子力学

予備知識

線形代数・ルベーグ積分

講義内容

関数解析の基礎的事項を解説する．

具体的な講義内容は以下の通り：

1. バナッハ空間（2 回）
    - ノルム空間，バナッハ空間，定義
    - 例．$\mathbf{R}^n$，$\mathbf{C}^n$，ℓ^p，L^p，$C(X)$
    - ヘルダー不等式，ミンコフスキ不等式
    - ℓ^p の完備性の証明
2. ヒルベルト空間（2 回）
    - 内積，シュワルツ不等式
    - 直交補空間
    - 正規直交基底，例：三角多項式，エルミート多項式
    - グラム・シュミットの直交化，直交多項式
3. 有界線形作用素（2 回）
    - 定義と非有界作用素に関する注意
    - 双対空間，リースの表現定理
    - 共役作用素．像と核の関係
    - 直交分解と射影作用素
    - ユニタリ作用素，部分等距離作用素
4. スペクトル（2 回）

- スペクトルとレゾルベント集合
- レゾルベント方程式
- スペクトルの分類
- 例：シフト作用素，かけ算作用素
- スペクトル測度とスペクトル分解（例による説明）

5. 応用 — 復習をかねて（3 回）

- 離散群上のランダムウォークをめぐって
- 正準交換関係の表現をめぐって

講義の感想

関数解析の広がりを感じて欲しかったが，線形代数レベルですでにつまづいている人が多く，いささか心配である．

試験問題

問題１． $S = \{0, 1, 2, \cdots, N-1\}$ 上の $\mathbf{C}$-値関数全体 H は，

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} f(k)\overline{g(k)}, \qquad f, g \in H$$

を内積とするヒルベルト空間になる．$f \in H$ に対して，

$$Uf(x) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{2\pi ikx/N}, \qquad 0 \le x \le 1$$

とおく．このとき，次の問に答えよ．

(1) 任意の $f \in H$ に対して，$Uf \in L^2(0,1)$ かつ $U : H \to L^2(0,1)$ は有界線型作用素であることを示せ．

(2) $\|U\|$ を求めよ．

(3) U の随伴作用素 U^* は $\langle U^*\phi, f \rangle = \langle \phi, Uf \rangle$（$\phi \in L^2(0,1)$，$f \in H$）で特徴づけられる．$P = UU^*$ とおくとき，$P^2 = P^* = P$ を示せ．

(4) $P = UU^*$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

問題２． $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \in \mathbf{C}$ として，$H = \ell^2$ 上の作用素 T を

$$T(\xi_1, \xi_2, \cdots) = (\lambda_1\xi_1, \lambda_2\xi_2, \cdots)$$

で定める．

(1) $T \in \mathbf{B}(H) \Longleftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \cdots) \in \ell^\infty$ を示せ．

以下，これを仮定する．

(2) $\lambda_n \in \sigma_p(T)$ を示せ．ただし，$\sigma_p(T)$ は T の固有値全体を表す．

(3) $\sigma(T) = \overline{\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots\}}$ を示せ．

(4) $\sigma(T) - \sigma_p(T)$ はすべて連続スペクトルであることを示せ.

問題３. (1) H を可分無限次元ヒルベルト空間とし，$T \in \mathbf{B}(H)$ とする．このとき，2 つの CONS $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|Tf_n\|^2$$

が $\infty = \infty$ をこめて成立することを示せ．以下，この量を $\mathrm{hs}(T)$ で表す.

(2) $H = L^2(0, 2\pi)$ は,

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx, \qquad f, g \in H$$

を内積とする可分無限次元ヒルベルト空間である．$f \in H$ に対して,

$$Tf(x) = \int_0^{2\pi} f(y) \sin(x - y)\, dy$$

とおくとき，$T \in \mathbf{B}(H)$ を示せ.

(3) (2) の T に対して $\mathrm{hs}(T)$ を求めよ.

(4) さらに，$\mathrm{Ran}(T)$ を求めよ.

問題４. $\mathbf{R}$ 上の無限回微分可能な $\mathbf{C}$-値関数が急減少であるとは，任意の整数 $m, n \geq 0$ に対して

$$\lim_{|x| \to \infty} |x^m f^{(n)}(x)| = 0$$

が成り立つときにいう．急減少関数の全体を $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ とおく.

(1) $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ はヒルベルト空間 $L^2(\mathbf{R})$ の部分空間であることを示せ.

(2) $D = \dfrac{d}{dx} : \mathcal{S}(\mathbf{R}) \to L^2(\mathbf{R})$ は線形作用素であるが，有界作用素に拡張されないことを示せ．すなわち，$T \in \mathbf{B}(L^2(\mathbf{R}))$ で, 任意の $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ に対して $Tf = Df$ をみたすものは存在しないことを示せ.

(3) $\mathcal{S}(\mathbf{R}) \subset \mathrm{Dom}(D^*)$ を示し, $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ に対して D^*f を求めよ.

(4) $H_n(x)$ は母関数

$$e^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\, t^n$$

で定義されるものとする.（$H_n(x)$ はエルミート多項式と呼ばれ，同値な定義はいろいろあるが，上記の定義を議論の出発点とする.）さて,

$$\phi_n(x) = H_n(x) e^{-x^2/2}$$

とおくとき，$\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ は $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ の部分集合であることを示せ.

(5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_m(x)\phi_n(x) dx$ を計算せよ.

科目名　代数系と表現　　**担当教官**　藤原 一宏

サブタイトル

対象学年　３年　　**６単位**　**選択**

教科書　なし
参考書　J. P. Serre，有限群の線形表現，岩波書店

予備知識

線形代数，群論の基礎

講義内容

合計 12 回の講義を行った．個人的な都合により，2 回休講とした．最初の一回は紹介として使ったため，一時間半程度，それ以外は原則として 9 時から 12 時まで，途中一回から二回休憩をいれて講義した．各回の講義の前半部では表現論の話題を，後半部ではそれと関連した基礎的な話題や，問題を解いて見せる演習的な要素を取り入れた．

講義では有限群の線形表現の基礎を伝えることを目的とした．特に，指標を考えることが極めて重要であること，有限群の構造に手がかりを与えるだけでなく，一番簡単な巡回群のときでも FFT という応用があること，などを強調した．

成績評価はレポートを一回，あと筆記試験の結果による．

具体的な講義内容は以下の通り（回数は目安）

1. 群行列式の分解（1 回）
    - 三次方程式の解法
    - 巡回行列式
2. 線形表現（1 回）
    - 群の例（線形群，置換群）
    - 表現の定義
    - 巡回群の表現
    - 正則表現，群環
3. 一次表現（2.5 回）
    - 交換子群とアーベル化
    - 表現の同値
    - 有限アーベル群の構造定理
    - フーリエ変換

4. 完全可約性（2.5 回）
   - 部分表現，直和表現，既約表現
   - Schur の補題
   - 内積線形空間，補空間
   - 完全可約性
5. 指標（2 回）
   - 指標の直交性
   - 既約性の判定，表現の既約分解，テンソル積
   - 正則表現の分解
   - 例（二面体群）
6. 整数性定理（2 回）
   - 環，環の中心，代数的整数
   - 整数性定理
7. 補足（1 回）
   - アーベル化の計算法，単因子論
   - 誘導表現

講義の感想

具体的な問題を念頭においた講義を心がけた．例えば，群行列式の分解から講義を始める，など．あと，アーベル群の表現を特に重要視した講義構成にした．これは Fourier 変換とつながりやすい，具体的なイメージが作りやすくなるという利点がある．正則表現，群環も通常の定義以外に，関数空間として実現するという視点を打ちだすこととした．デルタ関数という用語も積極的に使った．

但し，このような構成の教科書が存在していないため（!），自分一人で勉強するのが困難になるというデメリットもあるかもしれない．Serre の本も時代の要請に合っていない．

反省点は多々あるのだが，やはり演習の要素がまだまだ足りない．演習が少なくなると講義に対する学生の反応もつかみづらくなり，講義へのフィードバックを得るという点でも問題がある．また，テンソル積，誘導表現は触れただけで終わっており，環論的な要素を少なくして多元環論は触れないなど，内容的にも不満足な点が多い．ただ，これ以上量を増やすことは現実にはかなり難しいと思う．

試験問題

問題１． p，q を互いに異なる素数，$q > p$ とし，G を位数 pq の非可換群とする．

a) $q \equiv 1 \bmod p$ であることを示せ．

b) 位数 q の正規部分群 H で商群 G/H が位数 p の巡回群になるものが存在することを示せ．

c) $p=2$ であるとき G は二面体群 D_{2q} と同型なことを示せ.（Sylow の定理から G には位数 2 の元が存在することを使う.）

問題２． a) 複素数 α に対してその複素共役を $\bar{\alpha}$ とする.

$$A=\left\{X=\begin{pmatrix}\alpha & -\bar{\beta}\\ \beta & \bar{\alpha}\end{pmatrix};\alpha,\beta\in\mathbf{C}\right\}\subset M_2(\mathbf{C})$$

と定義するとき，A は行列環 $M_2(\mathbf{C})$ と単位元を共有する部分環であることを示せ.

b) A のゼロでない元に対して乗法の逆元が A の中にあることを示せ.

c) 等式

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2)=f_1^2+f_2^2+f_3^2+f_4^2$$

を満たす変数 x_i, y_j の二次多項式 f_1, f_2, f_3, f_4 があることを示し，具体的な形を一つ与えよ.

問題３． $G=S_n$ を n $(n\geq 4)$ 次対称群とし，V，V' をそれぞれ基底 $<e_1,\ldots,e_n>$，$<e_{(i,j)};1\leq i,j\leq n>$ を持つ $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間とする．G の表現 ρ，ρ' を

$$\rho(\sigma)e_i=e_{\sigma(i)}\quad(\sigma\in S_n,\ 1\leq i\leq n)$$
$$\rho'(\sigma)e_{(i,j)}=e_{(\sigma(i),\sigma(j))}\quad(\sigma\in S_n,\ 1\leq i,j\leq n)$$

で定義する．このとき，

a) $\rho=1\oplus\theta$（θ は恒等表現 1 を含まない表現）と書けることを示せ.

b) 指標 χ_ρ，$\chi_{\rho'}$ の間に関係

$$\chi_{\rho'}=\chi_\rho^2$$

が成り立つことを示せ.

c) a) の表現 θ に対し内積の値 $(\chi_\theta,\chi_\theta)=1$ を示し，θ が既約表現であることを示せ.

問題４． ４次交代群 $G=A_4=\{\sigma;\sigma$ は $\{1,2,3,4\}$ 上の偶置換$\}$ について，

a) $\{(1),\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23)\}$ が G の正規部分群であることを示せ.

b) G の指標表を書け.

問題５． σ, τ により生成され関係式 $\sigma^4=\tau^2=1$, $\sigma\tau=\tau\sigma$ で与えられる群を G とする.（$G\simeq\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.）$\rho_{\mathrm{reg}}$ を正則表現とするとき，次の不定元 X_g（$g\in G$）に関する 8 変数の行列式を因数分解せよ.

$$\det\left(\sum_{\alpha\in G}X_\alpha\rho_{\mathrm{reg}}(\alpha)\right)=?$$

問題６． $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ 上の関数 $f(x)$ のフーリエ変換を

$$\mathcal{F}f(\alpha)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}f(i)\exp\left\{-\frac{2\pi\sqrt{-1}\alpha i}{N}\right\},\qquad\alpha\in\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$$

で定義する．$\mathcal{F}$ を $\mathbf{C}[\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}]$ から $\mathbf{C}[\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}]$ への線形変換と思ったときの固有値の絶対値を求めよ.（Hint：合成 $\mathcal{F}\cdot\mathcal{F}$ を計算する.）

科目名　多様体と微分型式　　**担当教官**　土屋 昭博

サブタイトル

対象学年　３年　　**６単位**　選択

教科書

参考書　シンガー, ソープ共著, トポロジーと幾何学入門
小沢哲也，曲線・曲面と接続の幾何
松本幸夫，多様体の基礎

予備知識

２年，解析学序論

２年，解析学要論

２年，ベクトル解析

３年前期，幾何学要論

講義内容

1. 逆関数，陰関数の定理
写像のヤコピー行列，テイラー展開
条件付き極値問題と Lagrange の未定乗数法

   ２年解析学の復習として話をした．ヤコビ行列は C^∞ 写像の線形近似であることを何度も説明した．

2. 多様体の定義，接空間，接ベクトル
多様体の間の微分可能写像とその微分

   多様体の定義として，a) はりあわせ，b) 方程式 $=0$，の２つを採用し，陰関数の定理が a) と b) の同値性を与えることを示した．例としては，S^n，$SO(n)$ を与えた．

   接ベクトル = 方向微分と解釈できることを示し，b) の描像を使って，接ベクトル空間 = 多様体の線形近似を強調した．局所座標を用い，変換公式を具体的に計算した．

3. 線形リー群と線形リー環

   行列群として，線形リー群の定義を与え，また，古典型についてはその形をすべて列挙し，各点での接ベクトル空間を具体的に計算した．行列の指数関数や対数関数を使い，線形リー環が線形リー群の原点での線形近似＝接空間上にリー群演算の２次近似として，リーかっこ積を導入したものであることを示した．また，すべて行列として具体的に計算を行って見せた．さらに，$SO(3)$ と $SU(2)$ のリー環は同型であることを具体的に計算して見せた．

4. $SU(2)$ と $SO(3)$

位相空間として，$SU(2)$ が S^3 と同相であること，Adjoint 表現が $SU(2)$ から $SO(3)$ 上への連続準同型を与えること，また，核 $\cong Z_2$ であることを示した．さらに，$SO(3)$ のすべての元はある軸に関する回転であることを示した．

5. 剛体の運動

剛体の状態が剛体内の定点 O と O での剛体に固定された正規直交形 $\mathbf{f}$ の２つ，$(O, \mathbf{f})$ の６パラメータで記述されることを詳しく述べた．また，剛体を互いの位置が拘束されている質点系とみて，ニュートンの運動方程式より剛体の運動方程式 = オイラー方程式を導出し，貫性モーメントが剛体の運動を記述する不変量であることを示した．外力 $= 0$ の場合，エネルギー・運動量保存則，角運動量保存則を導出した．楕円関数による解の構成までは講義でしなかった．

6. 微分型式とその演算

多様体上の微分型式，外積，外微分，ベクトル場との縮約，リー微分等を定義し，カルタンの公式に言及した．２年次のベクトル解析の復習を頭において講義したが，代数的性質の強調のみに留まった．微分型式の積分，de Rham の定理等は講義できなかった．

7. ２次元定曲率空間

２次元多様体上にリーマン計算を導入し，まず，曲率が一定で，正，０，負の場合にその幾何学の特質，すなわち，半径 r の円周の長さおよび円板の面積の挙動，測地線の挙動 = 平行線公理の成立と不成立，Isometry 群の構造等を直感的に述べた．次の動標構の方法により，カルタンの構造方程式を導出し，接続型式および曲率型式のゲージ共変性を示し，さらに曲率がリーマン幾何としての不変量であることを示した．また，平面，単位球面，上半平面について，接続型式，曲率を具体的に計算した．測地線や Isometry 群の具体的決定は講義できなかった．

講義の感想

１）講義回数（月曜日開講）

１０月１８日，２５日

１１月1日，８日，１５日，２２日，２９日

１２月6日，１３日，２０日

1月１７日，２５日

２月７日試験

２）講義のやり方

講義時間帯は，９時〜１２時．途中２０分程度の休憩を入れた．また，講義時間が長いため，講義内容の復習，線型代数の復習・計算を丁寧にやった．

３）単位

１１月中旬，１２月中旬にそれぞれ１時間の中間試験を行い，２月の本試験（２時間）と合わせて合否の判定を行った．

１０問程度の演習問題を２回配布し，試験問題には類題を取り入れた．

４）注意書き

講義の最初に次のような学習にあたっての注意書きを学生に配布した.

幾何学（３年後期）

１９９９年度　担当　土屋

１０月１８日（月）

1. 講義	9:00〜12:00		
	途中で 20 分の休憩を入れる		
2. 試験	中間試験　２回	１１月中旬，１２月中旬　１時間	
	本試験	２月中旬　２時間	
3. 単位	中間試験	３０点×２	
	本試験	６０点	
	計	１２０点	
		６０点以上合格	
4. 内容	多様体とその上の生物達	ベクトル場，微分型式	
		微分型式とその積分（de Rham の定理）	
	線型群と等質空間		
	２次元定曲率空間		

5. 教科書および参考書

トポロジーと幾何学入門	シンガー・ソープ共著
曲線・曲面の接続の幾何学	小沢哲也著
多様体の基礎	松本幸夫著

6. 関連する講義

２年生　解析学序論
２年生　解析学要論
２年生　ベクトル解析
３年前期　幾何学要論

試験問題

中間試験

問題１. $a > b > c > 0$ とする. $S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ とおく. $d > 0$ について, $X_d = \{(x,y,z) \in R^3 : ax^2+by^2+cz^2 = d\}$ とおく. また, $f(x,y,z) = ax^2+by^2+cz^2$ とおく.

(a) S および X_d は多様体の構造を持つことを示せ.

(b) $(x_0, y_0, z_0) = P \in S$ のとき，S および X_d の P における接平面の方程式を求めよ.

(c) 条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ のもとでの $f(x, y, z)$ の最大値と最小値およびその値を取る点を求めよ.

問題２. $SO(3) = \{A:\ ３次直交行列, \det A = 1\}$ とおくとき，

(a) $SO(3)$ は多様体の構造を持つことを示せ.

(b) $SO(3)$ の次元はいくつか.

(c) $SO(3)$ の単位行列 E における接平面を求めよ.

(d) $S0(3)$ は連結であることを示せ.

中間試験

問題１. $so(3) = \{A \in M_3(\mathbf{R}) : {}^tA + A = 0\}$ とおく.

(a) $J_1 = \begin{pmatrix} & & \\ & & -1 \\ & 1 & \end{pmatrix}$，$J_2 = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & & \\ -1 & & \end{pmatrix}$，$J_3 = \begin{pmatrix} & -1 & \\ 1 & & \\ & & \end{pmatrix}$ とおくとき，J_1, J_2, J_3 は $so(3)$ の基底であることを示せ.

(b) リー括弧積 $[J_i, J_j]$ を計算せよ.

(c) $(A, B) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{trace}AB$（$A, B \in so(3)$）とおくとき，$(J_i, J_j)$ を計算せよ.

(d) $([A, B], C) + (B, [A, C]) = 0$（$A, B, C \in so(3)$）を示せ.

問題２. $f(t)$（$t \in \mathbf{R}$）を $SO(3)$ に値を持つ C^∞ 関数とする．また，$I : so(3) \longrightarrow so(3)$ を $(IA, B) = (A, IB)$ をみたす線型写像とする.

(a) $\Omega(t) = f(t)^{-1}\dfrac{df}{dt}(t)$ とおくとき，$\Omega(t) \in so(3)$ であることを示せ.

(b) $M(t) = I\Omega(t)$ とおくとき，

$$(*) \qquad \frac{dM}{dt} + [\Omega, M] = 0$$

が成立するとする．I は

$$IJ_i = I_iJ_i, \qquad i = 1, 2, 3, \quad I_i \in \mathbf{R}$$

の形をしているとする．$\Omega(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \Omega^i(t)J_i$ として，方程式 $(*)$ を $\Omega^i(t)$，I_i を使って書き表しなさい.

(c) $I_1 = I_2 > I_3 > 0$ とし，$\Omega^1(0) = \Omega^2(0) = 0$，$\Omega^3(0) = 1$ なる初期条件のもとで $(*)$ を解きなさい.

(d) $\dfrac{1}{2}(I\Omega, \Omega)$，$\dfrac{1}{2}(M, M)$ は t によらないことを示せ.

期末試験

問題１． 次の変換のヤコビ行列とヤコビ行列式の計算をせよ．また，この変換の幾何学的意味を図を描くことにより説明せよ．

$$\begin{aligned} f^1(r,\theta,\varphi) &= r\sin\theta\cos\varphi, \\ f^2(r,\theta,\varphi) &= r\sin\theta\sin\varphi, \\ f^3(r,\theta,\varphi) &= r\cos\theta \end{aligned}$$

問題２． 任意の $A \in SO(3)$ に対し，次の条件 $(*)$ をみたす $P \in SO(3)$，$\theta \in R$ が存在することを示せ．また，この公式の幾何学的意味を説明せよ．

$$(*) \qquad PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

問題３． 上半平面 $H = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y > 0\}$ にリーマン計量を $g(\partial/\partial x, \partial/\partial x) = \dfrac{1}{y^2}$，$g(\partial/\partial y, \partial/\partial y) = \dfrac{1}{y^2}$，$g(\partial/\partial x, \partial/\partial y) = g(\partial/\partial y, \partial/\partial x) = 0$ として定義する．

(a) H 上のベクトル場を $e_1 = y\partial/\partial x$，$e_2 = y\partial/\partial y$ とおくと，e_1, e_2 は H の各点で H の接空間の正規直交系であることを示せ．

(b) θ^1, θ^2 を e_1, e_2 と双対となる１次微分型式とする．θ^1, θ^2 を求めよ．

(c) $d\theta^1 = -\omega \wedge \theta^2$，$d\theta^2 = \omega \wedge \theta^1$ をみたす１次微分型式 ω がただ一つ存在することを示し，かつ ω を求めよ．

(d) (c) で求めた ω について $d\omega = -\theta^1 \wedge \theta^2$ を示せ．

問題４． 半年間講義を受けて，講義のやり方，講義の内容に関する意見，また受講者自身のの学習方法（講義出席状況も込めて）等について述べよ．

科目名　Lie 群と対称性　　**担当教官**　小林 亮一

サブタイトル

対象学年　３年　　**６単位**　**選択**

教科書　教科書は指定しなかった．レジュメを配布した．

参考書　Dubrovin/Fomenko/Novikov, Modern Geometry, II
Singer/Thorpe, Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry
Warner, Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups

予備知識

微積分・線形代数・幾何学要論・集合と位相の知識をだいたい仮定したが，大事な概念は復習した．

講義内容

(i) 写像度の概念を導入し，応用として Gauss-Bonnet の定理を証明する．

(ii) 基本群と被覆空間．

以上２つの話題を通して，幾何学的トポロジーの初歩を絵を描きながら直観的に展開した．

具体的な講義内容は以下の通り：

1. 多様体の概念．向きづけ可能性．射影空間．無限小変換．ベクトル場とその積分．
2. ホモトピーと写像度の概念．幾何学への応用．
   - 連続写像を滑らかな写像で近似する．積分変換の考え方．
   - 主曲率の概念．焦点．管状近傍の存在．
   - 横断正則性定理とその証明．
   - 写像度の概念．写像度のホモトピー不変性．
   - コンパクト多様体から球面への写像のホモトピー類の写像度による分類．
   - 写像度の応用．Gauss 写像．Gauss-Bonnet の定理．
3. 基本群と被覆空間．
   - 基本群の定義と基本的性質．
   - 被覆空間と被覆写像．モノドロミー原理．
   - 被覆空間・被覆写像のいろいろな例．普遍被覆空間．分岐被覆．Riemann 面．
   - 被覆変換群と Galois 被覆．基本群のモノドロミー表現．方程式への応用．
   - Galois 被覆の被覆変換群と基本群の関係．

- 初等的方法によるいろいろな空間の基本群の計算.

講義の感想

横断正則性をきちんと説明してからそれに基づいて写像度の概念を丁寧に説明することは非常に大変であったが，毎回３時間かければ，上の内容をほとんど全部こなせた．しかし演習を行なう時間の余裕はなかった．授業で絵をたくさん描いて見せたので，学生はそれなりに楽しんでいたようである.

試験問題

問題１. 次の [**1-1**], [**1-2**] のうちのいずれかを選んで答えよ.

[**1-1**] 以下の問いに答えよ.

(i) 滑らかな多様体 M が向きづけ可能であることの定義を述べよ.

(ii) 平面 $\mathbb{R}^2$ の標準的な座標を (x, y) とし,

$$T_1(x,y) = (x, y+1), \quad T_2(x,y) = (x+\frac{1}{2}, -y)$$

が生成する平面の運動群を G とする．このとき，G の $\mathbb{R}^2$ の作用に関する商空間 K は滑らかなコンパクト 2 次元多様体であることを示せ.

(iii) (ii) で定義される多様体 K は向きづけ可能か．理由をつけて答えよ.

[**1-2**] 実射影平面 $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ について以下の問いに答えよ.

(i) 実射影平面から 1 点を除いた空間と homotopy 同値な 1 次元多様体は何か.

(ii) 実射影平面のループ（閉曲線）で，連続的変形で 1 点に収縮しないものをひとつ見つけて，それを記述せよ.

(iii) 実射影平面は向きづけ可能か．理由をつけて答えよ.

(iv) 実射影平面は 4 次元空間に埋めこまれた曲面として実現されることを示せ．文章で記述しても，式で書いてもよい.

問題２. 以下の問いに答えよ.

(i) 複素係数の n-次多項式関数 $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n$ は Riemann 球面 $M = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ からそれ自身への滑らかな写像とみなせることを示せ．ヒント：変数変換 $z \mapsto \frac{1}{z}$，$f \mapsto \frac{1}{f}$ を考えよ.

(ii) (i) の写像 $f : M \to M$ の写像度を求めよ.

(iii) (ii) を用いて，代数学の基本定理を証明せよ.

問題３. 以下の問いに答えよ.

(i) 特殊直交群 $SO(3)$ は，自然に $\mathbb{R}^3$ の正の向きの正規直交基底全体のなす集合と同一視できることを示せ.

(ii) 複素 2 次元ベクトル空間 $\mathbb{C}^2$ の $\mathbb{C}$-線形変換 I, J, K を複素行列

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

で定義する．$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$（$|x|^2 + |y|^2 = 1$）を行列 $\widetilde{X} = \begin{pmatrix} x & -\overline{y} \\ y & \overline{x} \end{pmatrix}$ と同一視する．このとき，$\widetilde{X}I\widetilde{X}^{-1}$, $\widetilde{X}J\widetilde{X}^{-1}$, $\widetilde{X}K\widetilde{X}^{-1}$ は，x の実部 $= 0$ で定義される $\mathbb{C}^2$ の実 3 次元部分空間 V（$\cong \mathbb{R}^3$）の正の向きの正規直交基底であることを示せ.

(iii) 逆に，V の任意の正の向きの正規直交基底は，適当な $X \in \mathbb{C}^2$（$|x|^2+|y|^2=1$）をとると順番もこめて $XIX^{-1}, XJX^{-1}, XKX^{-1}$ に一致することを示せ．また，このような X は ± 1 をかけることを除いて一意的であることを示せ．

(iv) (i)，(iii) により，特殊直交群 $SO(3)$ は自然に実射影空間 $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ と同一視されることが導かれる．その理由を述べよ．

問題４． 本問は自由解答であり，解答しなくても不利益は生じません．講義と関係がある話題で，何か知るところ（たとえば，他の講義との関連に気がついたこと，定理の別証明など）を自由に書いてください．また，講義の感想を自由に書いてください．

科目名　基幹数理特論１／不変式論　**担当教官**　寺西 鎮男

サブタイトル

対象学年　４年／大学院　２単位　選択

教科書

参考書

H. Weyl, The classical groups, Their invariants and representations, Princeton
R. Goodmam, N. Wallach, Representations and invariants of the classical groups, Cambridge
H. Kraft, Geometrische methoden in der invariantentheorie, Vieveg
向井 茂，モジュライ理論１，岩波書店
T. A. Springer, Invariant theory, Springer LNM. 585

予備知識

特に仮定しない

講義内容

不変式論の基礎的事柄と応用について解説する．主として古典的内容を扱う．

（１）有限群の不変式論，　（２）古典群の不変式論.

具体的な講義内容は以下の通り：

1. 有限群の不変式（5 週間）
   - 対称群の不変式の基本定理
   - 有限群の不変式環の有限性定理，Molien の定理
   - 有限鏡映群の不変式論の基本定理（Shephard-Todd の定理）
   - ある有限鏡映群の不変式と符号の重さ枚挙多項式（MacWilliams の恒等式，Gleason の定理）
2. 古典群の不変式（8 週間）
   - 有限群の表現論の復習
   - コンパクト群の表現論（指標の直交関係，表現の完全可約性等）
   - Molien-Weyl の公式
   - Weyl の unitarian trick
   - Weyl の積分公式
   - 二元形式の古典不変式（Cayley-Sylvester の個数定理，Hermite の相互律）
   - GL(n) の指標公式，Borel-Weil の定理，Cauchy の補題，Jacobi の公式
   - 古典群のベクトル不変式の基本定理，Capelli-Pascal の定理，グラスマン多様体のヒルベルト多項式

- 対称群の既約指標のフロベニウスの定理
- ヒルベルトの理論（ヒルベルトの論文 “不変式の完全系について” の解説）

講義の感想

講義を通じて，できる限り平易に解説を心がけた．

レポート問題

問題：

(1) 二つの n 変数の多項式が，ある Zariski 開集合のうえで一致すれば，同じ多項式であることを証明せよ．

(2) 二元二次形式と二元三次形式の不変式の基本型を求めよ．

(3) 対称群の既約次数の hook length formula を証明せよ．

(4) $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ の既約次数の hook length formula を証明せよ．

(5) グラスマン多様体の次数を対称群の表現論を用いて求めよ．

科目名　自然数理特論２／数理物理学（I）　**担当教官**　浪川 幸彦

サブタイトル　古典力学

対象学年　４年／大学院　**２単位**　**選択**

教科書　なし
参考書　V. I. アーノルド，古典力学の数学的方法，岩波書店
高橋陽一郎，力学と微分方程式，岩波書店
深谷賢治，解析力学と微分形式，岩波書店
R. Abraham, J. E. Marsden, Foundations of Mechanics, Benjamin

予備知識

座標幾何，微分方程式の基礎理論

講義内容

目標：古典力学をその数学的な構造を明らかにするよう努めながら展開する．特に Newton 力学，Lagrange 力学，Hamilton 力学の枠組みとそれらの特徴を明確にする．

具体的な講義内容は以下の通り：

1. ３種類の力学（ここでは質点系の力学のみを扱う）（3 回）
   - Newton 力学，ガリレイ構造・ガリレイ変換・ニュートンの決定性原理・ガリレイの相対性原理・ポテンシャル系・仕事・万有引力の法則・クーロン力・バネの復元力
   - Lagrange 力学，Lagrange 系・変分原理・自然系・最小作用の原理
   - Hamilton 方程式，Hamilton 関数・Poisson の括弧式
2. 保存則と積分（2.5 回）
   - 運動の積分とエネルギー，積分・自励的 Lagrange 系
   - 運動量の保存，空間の等質性・慣性中心・運動量
   - 角運動量の保存，角運動量・角運動量の保存則
   - 中心力場における運動，中心力場・ケプラーの法則
   - Noether の定理，積分・ Noether の定理
3. 振動（2 回）
   - １次元の振動（単振子），調和振動・振幅・振動数・周期・等時性・サイクロイド振り子
4. 剛体の運動方程式（2.5 回）
   - 動座標系，回転・角速度・瞬間角速度・遠心力・Coriolis の力・フーコー振り子

- 剛体の運動，剛体・慣性テンソル・主慣性モーメント・慣性主軸・慣性楕円体
- Euler 方程式，Euler 方程式・対称ゴマ・歳差運動・Euler 角
- Lagrange のコマ，章動・歳差・有効ポテンシャル・Kowalevskaja のコマ

講義の感想

力学の数学的構造を明らかにすること，特に様々の「原理」「法則」で何が前提されているのかを明確にするよう心がけた．また古典力学として代表的なものを提示することを目指した．これらの点では一応所期の目的を達した．

しかしながら，急な理由で２回予定外の休講をせざるを得なかったことと，準備不足で授業中計算に詰まってしまったりしたため，予定していた講義内容より遙かに少ないものになってしまった．

レポート問題

問題： ある（自分が面白いと考える）系について，力学の理論をまとめよ（運動方程式を立て，積分を求め，解を求め，解の諸性質を調べる等々）．

特に数学理論とその物理的意味の対応を明らかにすること．

科目名　数理解析特論１／偏微分方程式論　**担当教官**　名和 範人

サブタイトル

対象学年　４年／大学院　２単位　選択

教科書

参考書
D. Sogge : Fourier Integrals in Classical Analysis, Cambridge
小松彦三郎 : Fourier 解析，岩波
L. Hörmander : The Analysis of Linear Partial Differential Operators, Springer
E. Leib, M. Loss : Analysis, AMS
L. C. Evance, R. F. Gariepy : Measure Theory and Fine Properties of Functions, CRC
H. Bréziz : Analyse Fonctionnele, Masson（邦訳あり）
K. Yosida : Functional Analysis, Springer
W. Rudin : Functional Analysis, McGraw Hill
谷島賢二 : 物理数学入門, 東大
W. P. Ziemer : Weakly Differentiable Functions, Springer
R. A. Adams : Sobolev Spaces, Academic
V. G. Maz'ja : Sobolev Spaces, Springer
J. Rauch : Partial Differential Equations, Springer
T. Kato : Nonlinear Schrödinger Equations in LNP 345, Springer

予備知識

微分方程式，Lebesgue 積分，関数解析

講義内容

「Schrödinger 方程式の解の存在定理」を一つの題材に選び，これを目指して，超関数論，Fourier 変換，Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式や Sobolev の不等式，Gagliardo-Nirenberg の補間不等式等を学び，基本的な実解析的な技術の修得と目的とした．また，結果として，前期の「小澤 徹先生の集中講義」を理解するために必要な予備知識が得られるようにした（つもりである）.

講義時に適当に演習問題，参考文献（上記）を上げて，独習の便をはかった．演習問題は，本講義の試験対策ともなるように出題したつもりである．

具体的な講義内容は以下の通り：

1. ガイダンス（10/14）
   - これからやること（講義の目標）.
   - 基本的な参考書，試験の日程.
   - 方程式の型（双曲，放物，楕円，分散型波動）について.
2. §0 準備（10/21, 10/28, 11/4）
   - 超関数論（Distribution）のさわり（$\mathcal{D}$ と $\mathcal{D}'$）.

- Poisson 方程式と基本解.

3. §1 Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式（11/4, 11/11, 11/18, 11/24）
   - Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式を厳密に証明する.
   - この証明を通して，実解析の基本的な技術や不等式の作り方を学ぶ.
4. §2 Sobolev の不等式とその周辺（11/24, 12/9）
   - H-L-S 不等式の応用として Sobolev の不等式を証明する.
   - Sobolev の不等式の別形と別証明.
   - Sobolev 空間.
   - Gagliardo-Nirenberg の補間不等式とその証明.
5. §3 Fourier 変換と複素補間定理（1/13, 1/20：この両日は 9:00–12:00）
   - 急減少関数のクラス $\mathcal{S}$ とその上の Fourier 変換.
   - 緩増加超関数のクラス $\mathcal{S}'$ とその上の Fourier 変換.
   - Riesz-Thourin の補間定理と Fourier 変換.
   - $\mathcal{S}'$ と $\mathcal{S}$ の合成積と Fourier 変換.
6. §4 Schrödinger 方程式（1/20：9:00–12:00）
   - Schrödinger 方程式の基本解.
   - Riesz-Thourin の補間定理の応用として基本解の評価.
   - H-L-S 不等式の応用としての時空間評価.
   - 非線形 Schrödinger 方程式の解の局所存在定理の証明の概略.
7. 試験（1/27）
   - ノート持ち込み可，コピー不可
   - 7 題から 3 題を選択して解答

なお，出張等で休講とした回を補うため，１月１３日，２０日の両日は９時から１２時の３時間講義とした.

講義の感想

この講義で話した事が，非線形の波動方程式（特に分散型波動）を研究するに当たって最低限の知識であると思うが，マニアックな講義とならないよう心掛けたつもりである.

試験問題

問題１． $1 < q < \infty$ とし $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ とする．この時，次の不等式を示せ．

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dy \right|^q dx\right)^{1/q} \leqq \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x,y)|^q dx\right)^{1/q} dy.$$

問題２． $1 < \alpha < \beta < \infty$ とする．問題１の結果を用いて，$g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ に対して次の不等式を証明せよ．

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^m} |g(x,y)|^\alpha dy \right|^{\beta/\alpha} dx\right)^{1/\beta} \leqq \left(\int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x,y)|^\beta dx\right)^{\alpha/\beta} dy\right)^{1/\alpha}.$$

問題３． $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ に対して $p_k(f) = \sup_{|\alpha|<k} \sup_{x\in\mathbb{R}^N}(1+|x|)^k|\partial^\alpha f(x)|$ とし，

$$\mathcal{S} = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \mid \text{すべての } k \in \mathbb{N}\cup\{0\} \text{ に対して } p_k(f) < \infty\}$$

と定義する．この時，$\mathcal{S}$ 上 の $\{p_k(\cdot)\}_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ から定まる局所凸線形位相について論じなさい．

問題４． 問題３で定めた $\mathcal{S}$ 上に次の積分変換を定める．

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f](\xi) &= (2\pi)^{-N/2}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\exp(-i\xi\cdot x)dx,\\ \mathcal{F}^*[f](\xi) &= (2\pi)^{-N/2}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\exp(i\xi\cdot x)dx.\end{aligned}$$

$\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^{-1}$ となることを証明せよ．また

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\mathcal{F}[f](\xi)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^2 dx$$

となることを証明せよ．

問題５． $\mathcal{S}$ 上に 作用素 $U(t)$（$t \in \mathbb{R}$）を

$$U(t)\phi = \mathcal{F}^*\exp(-it|\xi|^2/2)\mathcal{F}[\phi] \quad (\phi \in \mathcal{S})$$

と定義する．この時，$1 \le p+1 \le 2$ に対して $U(t)$（$t \neq 0$）は $L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$ から $L^{\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N)$ への有界線形作用素へ一意的に拡張され，その norm は，上から $(2\pi|t|)^{-\frac{N}{2}+\frac{N}{p+1}}$ で評価されることを説明せよ．

問題６． $N \ge 3$ とする．$U(t)$ を問題５で定義したものとし，$f \in C(\mathbb{R};\mathcal{S})$ に対して

$$\Gamma[f](x,t) = \int_0^t U(t-\tau)f(x,\tau)d\tau$$

と定義する．$1 \le p+1 \le \frac{2N}{N-2}$ の時 $r = \frac{4(p+1)}{N(p-1)}$ とすると，$T > 0$ に対して

$$\left(\int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Gamma[f](x,t)|^{p+1}dx\right)^{r/p+1} dt\right)^{1/r} \lesssim \left(\int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x,t)|^{(p+1)'}dx\right)^{r'/(p+1)'} dt\right)^{1/r'}$$

が成り立つ事を，Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式を用いて証明せよ．ここで，$\frac{1}{p+1}+\frac{1}{(p+1)'} = 1$，$\frac{1}{r}+\frac{1}{r'} = 1$ である．

問題７． 問題３で定めた $\mathcal{S}$ の双対空間 $\mathcal{S}'$ 上に問題４で定めた積分変換はどのように拡張されるか．また，それら拡張された積分変換の性質について論じなさい．（例えば，(1) $\mathcal{S}$ と $\mathcal{S}'$ の合成積と呼ばれるものの定義を与え，それと拡張された積分変換の関係，(2) $\mathcal{S}'$ に拡張された積分変換と $L^p(\mathbb{R}^N)$ 上に拡張されたものとの関係等について各自，自由にテーマを設定して，講義または自分で勉強した事をもとに論述せよ．）

科目名　高次位相特論２　　**担当教官**　木村 芳文・坂上 貴之

サブタイトル　計算機数学 II　– 微分方程式の数値解法

対象学年　４年　　**２単位**　**選択**

教科書
参考書

予備知識

線形代数，常微分方程式の基礎理論及び前期の高次位相特論１で学んだこと，特に数値微分，Lagrange 多項式，線形連立方程式の数値解法（直接法，反復法）等について理解していることが望ましい.

講義内容

前期の内容の発展，応用として微分方程式の数値解法を学習する．前半の中心課題は常微分方程式の初期値問題の解法であり，差分化の方法，解の誤差，収束，安定性の問題等について簡単な例題を挙げてイメージを与えた上で方法論を議論した．後半は偏微分方程式の初期値境界値問題を解説した．応用上重要な２階の線形偏微分方程式として熱方程式，波動方程式，Poisson 方程式を取り上げ，それぞれについて具体的な数値解法とその安定性について議論した.

講義は前半の一コマで木村が理論を解説し，後半の一コマは坂上が情報メディア教育センターの多元数理サテライトで具体的な問題を演習形式で講義した.

成績は演習の問題についてレポートを提出してもらい，それによって判定した.

具体的な講義内容は以下の通りである：

1. 常微分方程式の初期値問題
   - Euler 法
   - Taylor 展開法
   - Runge-Kutta 法
   - 多段階法
   - 差分法の誤差，収束，安定性
   - 線形差分方程式の解法
   - 誤差のコントロール
2. ２階線形偏微分方程式の数値解法
   - 熱方程式の差分解法 I（中心差分，前進後退差分）
   - 熱方程式の差分解法 II（陽解法，陰解法，Crank-Nicolson 法）
   - Fourier-von Neumann 安定性解析

- 波動方程式の差分解法
- Poisson 方程式の差分解法

講義の感想

- 演習は学生が問題や理論を理解するのに非常に役立ったと思う．
- 学生が以前に教わったと思われることで数値解析に関係しそうなことはなるべく触れるように心掛けた．
- 時間の都合で常微分方程式の境界値問題は省略したが，Poisson 方程式の差分解法を解説するときに類似性について触れた．
- 多くの学生は微分方程式についてイメージを全くと言って良いほど持っていなかった．少なくとも大学院で解析を学ぶ学生はこの程度の数値解析の教養が不可欠であると思われる．
- さらに advanced なコースとして常微分方程式の境界値問題から Sturm-Liouville 作用素の問題を経て偏微分方程式の固有関数展開（広義 Fourier 展開），有限要素法，スペクトル法等を議論することが考えられると思う．

レポート問題

以下の問題１～４については以下の常微分方程式の初期値問題を考える．

$$\frac{dy}{dx} = y - x^2 + 1, \quad y(0) = 0.5. \tag{$*$}$$

問題１． 常微分方程式 $(*)$ を，$0 \le x \le 2$ 範囲で Euler 法を使って数値的に解け．ただし x の区間の分割数は 10 とせよ．$(h = 0.2)$ その結果から $x = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0$ での y の値を出力すること．また，解析解と数値解との誤差も計算して出力せよ．

問題２． ４段４次 Runge-Kutta 法のプログラムを作成し，常微分方程式 $(*)$ を $0 \le x \le 2$ の範囲で数値的に解け．ただし x の区間の分割数は 10 とせよ．$(h = 0.2)$ その結果から $x = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0$ での y の値を出力すること．また，解析解と数値解との誤差も計算し出力せよ．

問題３． 問題１と問題２で作成した各数値計算法用いて，区間の分割数を変えたときの $(*)$ の数値解を計算し，その結果から $x = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0$ での真の解と数値解の誤差を計算して GNUPLOT で出力せよ．ただし，縦軸に誤差，横軸に分割点数を取り，グラフは両対数目盛で出力すること．また，この二つのグラフを比較して，アルゴリズムの誤差の収束の性質の違いを考察せよ．

問題４． Adam-Bashforth の 3 step method のプログラムを作成し，常微分方程式 $(*)$ を，$0 \le x \le 2$ の範囲で数値的に解け．ただし x の区間の分割数は 100 とせよ．$(h = 0.02)$ その結果から $x = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0$ での y の値を出力すること．また，解析解と数値解との誤差も計算し出力せよ．

問題５． ４段４次の Runge-Kutta 法を用いて，次の常微分方程式を数値的に解け．

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x + \epsilon\frac{dx}{dt}(1-x^2)$$

ただし，ϵ はパラメータ．初期値は適当にいくつか選び，その解軌道 $(x, \frac{dx}{dt})$ を GNUPLOT を使って一枚の絵に図示せよ．なお分割数は適当（解の精度が十分保証できている程度）に定めよ．ただし，パラメータ ϵ の選び方については次の３つの場合を考えて，それぞれの場合の解軌道の図を作成すること．：(1). ϵ が負の時　(2). ϵ が０の時　(3). ϵ が正の時

問題６． ４段４次の Runge-Kutta 法を用いて，次の常微分方程式を数値的に解け．

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y-x),\\ \frac{dy}{dt} &= \rho x - y - xz, \qquad (x,y,z)\in\mathbf{R}^3\\ \frac{dz}{dt} &= -\beta z + xy.\end{aligned}$$

ただし，σ, ρ, β はパラメータ．初期値は適当にいくつか選び，その解軌道 (x, y) および (x, z) を GNUPLOT を使って図示せよ．なお分割数は適当（解の精度が十分保証できている程度）に定めよ．ただし，パラメータは $\sigma = 10$，$\beta = \frac{8}{3}$ と固定し，ρ だけを変化させて次の場合の解軌道を作成すること．：(1). $\rho = 0.5$ の時　(2). $\rho = 15$ の時　(3). $\rho = 30$ の時

問題７． 常微分方程式の差分解法

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf_n,$$

を用いて次の常微分方程式を解き，この差分解法が不安定なものであることを実際に以下の常微分方程式を解くことで確かめよ．

$$\frac{dy}{dx} = -2y + 1\ (\equiv f(x,y)), \qquad y(0) = y_0$$

なお，分割数および初期値は「不安定性の定義」にしたがって，その様子が最もよくわかるように選び，厳密解，数値解を図示するなどして不安定な数値解法というものを体感せよ．

問題８． 空間一次元熱方程式を以下のような初期条件・境界条件の下で差分法で解け．

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < t < 2,\ -1 \le x \le 1\\ u(0,x) &= (1-x^2),\\ u(t,1) &= u(t,-1) = 0,\end{aligned}$$

数値計算のパラメータ（空間分割数，時間分割数）の選び方は安定性の条件などに照らし合わせて，正しく選ぶこと．この結果を図示して，解の性質およびパラメータの選び方についての考察せよ．

問題９． 空間一次元熱方程式を以下のような初期条件・境界条件の下で Crank-Nicolson 法で解け．

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < t < 2,\ -1 \le x \le 1\\ u(0,x) &= (1-x^2),\\ u(t,1) &= u(t,-1) = 0,\end{aligned}$$

数値計算のパラメータ（空間分割数，時間分割数）の選び方は特に問題８の時には，うまく計算できないようなパラメータを選んで計算をすること．その結果からこのアルゴリズムの安定性解析の重要さを認識せよ．

問題１０． 次の Poisson 方程式を差分法で解け．

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \sin x \sin y && \text{in } [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \equiv D, \\ u &= 0 && \text{on } \partial D \end{aligned}$$

差分の結果生じる行列を解く方法は各自自由に選択して良い．その結果から厳密解と数値解の各格子点の上での誤差の最大値と分割数の関係をグラフにせよ．

科目名　　**保型関数論**　　　　　　　　**担当教官　伊藤 博**

サブタイトル　３次の Gauss 和の積公式と偏角の一様分布の関係（試論）

対象学年　　**大学院**　　　　　　　　**２単位　　選択**

教科書　なし
参考書　講義ノート，およびその文献表にある文献

予備知識

学部レベルの数学の知識

講義内容

Gauss 和に関連した既知の事実の解説（§1～§4）を通して整数論的素養を育成しつつ，§5 のような考察の紹介を通してこの方面に残っている重要な問題のひとつを指摘することを講義の意図とした.

具体的な講義内容は以下の通り：

§0 Introduction（1 回）

- 講義の目的，全体の内容，半年間の予定の説明.

§1　２次の Gauss 和の積表示と「符号」の決定（1 回）

- ２次の Gauss 和の符号の決定の問題についての Gauss の論文の紹介.

§2　３次の Gauss 和とその積表示（Matthews の結果）（2 回）

- ３次の Gauss 和を楕円関数の積として表示する Matthews の結果の解説.

§3　３次の Gauss 和の偏角の一様分布（Patterson の結果）（1 回）

- ３次の Gauss 和の偏角の一様分布を示した Patterson の結果の概説.

§4 積表示に現れる楕円関数の積について（McGettrick の結果）（2 回）

- §2 の主結果に現れる楕円関数の等分値の積の「決定」についての McGettrick の結果について説明した.

§5 積表示と偏角の一様分布（1 回）

- ２次の場合に，積表示から Gauss 和の偏角が決定されたのであるから，３次の場合にも Matthews の積表示が Gauss 和の偏角について何らかの情報を与えてくれるのではないか，もっと端的に言えば積表示から（Heath-Brown と）Patterson の結果（偏角の一様分布）が導けるのではないかという問いを出発点とした若干の考察の紹介.

講義の感想

自分自身の勉強のためにも一度しっかりとまとめておきたいと思った内容を主に選んだ．予想通り自分のためには非常に有益であった．学生にとっては,（特に後半で）少し内容が高度になり過ぎた（あるいは説明不足であった）かも知れない．当初予定していた４次の Gauss 和の場合についての話は時間不足のため割愛した．このこと以外については，ほぼ予定通りの内容を話すことができた.

科目名　**代数多様体論**　**担当教官**　**金銅 誠之**

サブタイトル　モジュラー多様体入門

対象学年　**大学院**　**２単位**　**選択**

教科書

参考書　B. Hunt, The geometry of some special arithmetic quotients, Lecture Notes in Mathematics vol. 1637, Springer, 1996

予備知識

講義内容

この講義では Siegel 上半平面の算術的部分群による商空間の幾何学をテーマに取り上げた．特に次の論文の解説を中心に進めた：

1. J. Igusa, On the graded ring of theta constants, Amer. J. Math. **86** (1964), 219–246.
2. J. Igusa, On Siegel modular forms of genus two II, Amer. J. Math. **86** (1964), 392–412.
3. G. van der Geer, On the geometry of Siegel modular threefold, Math. Ann. **260** (1982), 317–350.

具体的な講義内容は以下の通り：

1. Introduction：Theta constants を用いた modular embedding の話しを genus 1 の場合に限定して，この講義の概略を話した（1 回）
2. Symplectic group $Sp(g, \mathbf{R})$, congruence subgroups $\Gamma(n)$, $\Gamma(n, 2n)$ について（1.5 回）
3. テータ関数の変換公式，テータ関係式，Theta constants の零点（2.5 回）
4. Graded ring of theta constants（1 回）
5. Igusa quartic threefold, Segre cubic threefold（1 回）
6. Sylvester の duad と syntheme について（0.5 回）
7. Igusa quartic，Segre cubic と hyperelliptic curves of genus 2, trigonal curves of genus 4 との関係（0.5 回）
8. ジーゲル上半平面の境界成分について（1 回）
9. Satake のコンパクト化（genus 2 の場合），Classical reducton theory (1 回）
10. Toroidal compactification (genus 2 の場合）（1 回）

講義の感想

内容が特殊であったため面白さが伝わったか心配である．講義の最後の頃は学生の数が激減してしまった．

科目名 **複素幾何学** **担当教官** **中西 敏浩**

サブタイトル タイヒミュラー空間入門

対象学年 **大学院** **２単位** **選択**

教科書 なし
参考書 L. V. Ahlfors, Lectures on Quasiconformal Mappings, Van Nostrand, 1966
A. Douady and C. Earle, Conformally natural extensions of homeomorph isms of the circle, Acta Math. 157 (1986), 23-48
今吉洋一・谷口雅彦，タイヒミュラー空間論，日本評論社，1989

予備知識

複素解析学，関数解析学の初歩

講義内容

曲面上の複素構造の変形空間であるタイヒミュラー空間の解析的あるいは幾何的研究を志望する初学者にとって大きな障壁である Beltrami 方程式の理論を丁寧に解説する．タイヒミュラー空間論からのトピックスとして，Douady-Earle extension とその応用，例えばタイヒミュラー空間の可縮性の証明などを取り上げる．

具体的な講義内容は以下の通り：

- 第 1 回（10 月 8 日）Friedrichs の mollifier とその応用
（内容）Friedrichs の mollifier を用いて，いろいろな関数空間（たとえば L^p 空間など）内で，関数を C^∞ 級の関数列で近似できること．超関数（distribution）の意味での微分，mollifier と微分作用素の可換性，$W^{1,p}$-空間の導入とその完備性の証明.

- 第 2 回（10 月 15 日）ACL 性
（内容）関数が ACL（Abosolutely continuous on lines）であることの定義，ACL 関数の普通の意味での偏導関数と超関数の意味で偏導関数との同一性の証明.

- 第 3 回（10 月 22 日）Weyl の補題
（内容）Cauchy の積分公式，正則関数の L^p 収束列の極限関数の正則性，一般化された Green の定理，Weyl の補題

- 第 4 回（11 月 5 日）Cauchy-Hilbert 変換
（内容）２つの積分作用素 P と T の定義とその性質．特異積分作用素 T は有界な台を持つ C^∞ 関数の空間上で定義した後，その L^2-ノルム保存性を証明し，それを用いて L^2 上に定義域を拡張した.

- 第 5 回（11 月 12 日）Calderón-Zygmund の不等式の証明（その１）
（内容）作用素 T を L^p（$p > 2$）上にの有界作用素に拡張するために Calderón-Zygmund の不等式

を証明する．今回は 1 次元 Hilbert 変換を定義し，それに対し Calderón-Zygmund 型の不等式が成立することを見た．

- 第 6 回（11 月 19 日）Calderón-Zygmund の不等式の証明（その２）
（内容）T に対する Calderón-Zygmund 型の不等式をノルムについての sharp さを無視して証明.

- 第 7 回（11 月 26 日）Calderón-Zygmund の不等式の証明（その３）
（内容）Doetsche の 3 線定理，Riesz-Thorin の凸性定理を証明した後，T のノルムの評価を完成させる.

- 第 8 回（12 月 3 日）Calderón-Zygmund の不等式の証明（その４）
（内容）不等式の証明で前回までにやり残したところを埋める.

- 第 9 回（12 月 10 日）Beltrami 方程式
（内容）L^∞ ノルムが 1 より小さい可測関数 μ に対する Beltrami 方程式 $f_{\bar{z}} = \mu f_z$ の解の存在と，ある正規化条件の下での解の一意性.

- 第 10 回（12 月 17 日）Beltrami 方程式の解の位相的性質
（内容）C^∞ 級 Beltrami 微分に対する方程式の解の微分同相性，Beltrami 方程式の解が Beltrami 微分に連続的依存すること．一般の Beltrami 方程式の解の同相性

- 第 11 回（1 月 21 日）Beltrami 係数が実または複素パラメータに解析的に依存するときに適当に正規化された Beltrami 方程式の解もある関数空間で解析的な変化することを示したのち，第一変分の具体的表示を与えた.

- 第 12 回（1 月 28 日）Teichmüller 空間
（内容）Fuchs 群，Fuchs 群の変形空間としての Teichmüller 空間の定義，Conformal Naturality，Douady-Earle Extension，Teichmüller 空間が可縮であることの証明.

講義の感想

Beltrami 方程式の解法とその準備のために予定より多くの時間を費やしたため，本論であるタイヒミュラー空間，とくにその多様体としての性質にあまり踏み入ることができなかった．しかしカバーできた項目については懇切丁寧に解説したつもりである．本来対象となる大学院修士 1 年生の反応があまりなかったのが残念．講義の理解を助けるためにレポート問題をいくつか出していたが,（成績判定にかかわらない部分での）レポートを提出した者はなかった.

科目名 **数理物理学（II）** **担当教官** A. N. Kirillov

サブタイトル Schubert Calculus II

対象学年 **大学院** **２単位** **選択**

教科書
参考書

予備知識

講義内容

The main purpose of my lectures in the 1999-Fall semester was to explain some hidden noncommutative structures lying behind the classical and quantum Schubert Calculus. In my 1999-Spring course I explained remarkable and unexpected connections between some representations of the Yang-Baxter algebras of type A and Schubert Calculus. In the 1999-Fall semester I mainly concentrated on the study of the bracket algebra $\mathcal{B}_n^0$ of type A, nilKnuth algebras, and nilCoxeter algebras of types B, C and D, and their connections with Schubert Calculus.

The bracket algebra $\mathcal{B}_n^0$ is defined as a quadratic algebra with the set of generators $\{x_{ij}, 1 \le i \ne j \le n\}$ and defining relations

1) $x_{ij} + x_{ji} = 0$, if $1 \le i \ne j \le n$;
2) $x_{ij}x_{kl} = x_{kl}x_{ij}$, if all i, j, k, l are distinct;
3) $x_{ij}x_{jk} + x_{jk}x_{ki} + x_{ki}x_{ij} = 0$, if all i, j, k are distinct;
4) $x_{ij}^2 = 0$, if $1 \le i \ne j \le n$.

The bracket algebra $\mathcal{B}_n^0$ was introduced by A. N. Kirillov and S. V. Fomin in 1995, and its connections with Schubert Calculus may be described as follows. Consider the Dunkl elements $\theta_j = \sum_{i \ne j} x_{ij}$, $1 \le j \le n$. These elements are commutative, and the algebra over $\mathbf{Z}$ generated by Dunkl elements $\{\theta_j\}$ is canonically isomorphic to the cohomology ring $H^*(\mathcal{F}_n, \mathbf{Z})$ of flag variety $\mathcal{F}_n := G/B$.

In the 1999-Fall lectures I explained this result, its quantum analogue, and connections of the bracket algebra with classical and quantum Schubert polynomials. Algebraic structure of the bracket algebra is remain still mysterious, and it is unknown yet whether the bracket algebra $\mathcal{B}_n^0$ is finite dimensional or not.

In my 1999-Fall lectures I explained also a construction of B, C and D type Schubert polynomials based on the properties of NilCoxeter algebras of types B, C, D.

講義の感想

科目名　　位相変分学（数学基礎 I）　　　**担当教官**　小林 亮一

サブタイトル

対象学年　　大学院（昼夜開講コース）　　　**２単位**　　**選択**

教科書
参考書　教科書は指定しなかった．そのかわり，講義ノートを配布し，本を適宜紹介した．

予備知識

特に仮定しない．

講義内容

学部学生と異なり，大学レベルの数学に関しては必ずしも現役でない昼夜開講コースの学生には，学部レベルの数学とその問題意識がどんなものなのかを知ってもらうウォーミングアップの講義が必要である，という昼夜開講立ち上げ委員会の提言がある．本講義は，この提言を実行した最初の試みである．このコースがいかにあるべきかについて，担当者（小林）の試行錯誤のあとを，講義ノートとして残した．

具体的な講義内容は以下の通り：

1. 2 次形式の対角化を通しての変分法入門.
    - 勾配ベクトルとレベル曲線.
    - Lagrange 未定乗数法の幾何学的意味.
2. 線形代数における双対性.
    - 連立方程式と双対性.
    - 平面射影幾何学入門.
3. 座標変換の考え方.
    - 積分の変数変換.
    - Stokes の定理.
4. 幾何学入門.
    - 3 角形の合同から曲線の合同へ.
    - Plücker 座標と微分形式．曲面の微分幾何学.
    - 曲面の合同類の完全不変量について.
    - 写像度の概念とその例.
    - Gauss-Bonnet の定理とそのいろいろな証明.

5. 複素変数の関数.
    - Cauchy の積分公式とその応用.
    - 曲線のパラメタ表示，楕円関数.

講義の感想

学生は４人全員がある程度の数学のバックグラウンドをもっていたので講義はやりやすかった．質疑応答もある程度できた．高校教師レベルの数学のバックグラウンドがあればよく理解できる程度の講義の例になっていると思う．論理的に律義なやりかたはできないので，微分形式などは直観的に説明した．それなりに首尾一貫した説明ができたと思う．以後，他の講義にも生かしたいと思う．

科目名　**大域変分学２（数学基礎 II）**　**担当教官**　**内藤 久資**

サブタイトル　フーリエ変換とその応用

対象学年　**大学院（昼夜開講コース）**　**２単位**　**選択**

教科書
参考書　T. W. ケルナー，フーリエ解析大全，朝倉書店

予備知識

共通教育程度の微積分と線形代数

講義内容

三角関数の復習からはじめて，フーリエ変換とその応用について解説する．応用については，情報科学・工学などから種々のトピックを選び解説する．

具体的な講義内容は以下の通り：

1. Introduction
   - 三角関数の定義．微分方程式による定義を採用し，その上で正弦関数が周期関数であることなど．
   - 境界値問題と固有値．スケール変換による固有値の変化など．
   - Hilbert 空間と Laplacian の固有値の完全性．
2. Fourier 級数
   - Fourier 級数の収束について．
   - Fourier 級数と L^2-最良近似
   - 収束の速さと Gibbs 現象
   - 反転公式，Parseval の等式，畳み込みとの関係
   - 直交関数系
   - 微分方程式への応用，線形システムへの応用，
   - 多次元の Fourier 級数．
     - D^2，$\mathbb{R}^2$ の矩形領域，S^2 上の Laplacian の固有値．
     - 熱方程式，波動方程式への応用．
3. Fourier 変換
   - 急減少クラスでの Fourier 変換と反転公式，Parseval の等式，畳み込みとの関係．
   - 超関数と Fourier 変換．
   - $\mathbb{R}^n$ での Fourier 変換．

- Fourier 変換と Peter-Weyl の定理
- 離散 Fourier 変換
  - 反転公式，Parseval の等式，畳み込み.
  - Shannon のサンプリング定理.
  - 高速 Fourier 変換
- Laplace 方程式，熱方程式と基本解，Poisson 核.

講義の感想

数学としての Fourier 変換を理解すると言うよりも，Fourier 変換が数学の随所に登場し，幅広く数学以外に応用されていることを解説したかったのだが，Fourier 変換の応用という部分が少なくなってしまった.

科目名 **社会構造数理学（応用系講義）** **担当教官** **浪川 幸彦・金井 雅彦・木村 芳文**

サブタイトル

対象学年 **大学院（昼夜開講コース）** **２単位** **選択**

教科書

参考書 R. Devaney, An Introduction to Chaotic Dynamical Systems (2nd ed.), Addison Wesley, 1989.（金井 雅彦）
矢野公一,「力学系 2」, 現代数学の基礎, 岩波書店, 1998.（金井 雅彦）

予備知識

講義内容

- 浪川 幸彦「連分数」

  §1 ユークリッドの互除法とその応用
  キーワード：剰余, ユークリッドの互除法, イデアル

  §2 連分数
  キーワード：連分数, 近似分数, 漸化式, 誤差

  §3 無限連分数
  キーワード：無限連分数, 近似分数, 漸化式, 無限連分数の値, 実数, フィボナッチ数列

  §4 最良近似分数
  キーワード：（第１種）最良近似分数, 第２種最良近似分数, 中間近似分数

  §5 同じ展開を持つ連分数（授業では出来なかった）

  §6 循環連分数キーワード：循環連分数, 純循環連分数, ２次の無理数, 被約無理数

- 金井 雅彦「1 次元力学系の初歩」

  1. $\mathbf{R}$ からそれ自身の中への連続写像の周期点（Sarkovskii の定理）
  2. S^1 からそれ自身の上への同相写像（回転数・Denjoy の定理等）

- 木村 芳文

  1. はじめに
     - 現象の記述について
       * 静的モデル（変分法的モデル）と動的モデル（力学系モデル）
     - モデルの分類について
       * 決定論的モデルと確率論的モデル

2. ２階線形常微分方程式の解法
   - バネー質量ー抵抗モデル
   - 解の分類
   - １階線形常微分方程式の話し
     * e の話し，放射能の話し
     * Euler の公式
     * 人口問題
   - 解の導出
   - 解の吟味

講義の感想

科目名　社会数理特論１（応用系討論）　**担当教官**　眞継 隆

サブタイトル

対象学年　大学院（昼夜開講コース）　**２単位**　**選択**

教科書
参考書

予備知識

講義内容

真継教授の司会・指導のもとに，前期に引き続き，受講生（大伊，福田，岡田の三名）に順次に一日一人の割り合いで，30 分のプレゼンテーションと約一時間の討論を，11 月と 12 月に各一サイクル，計 6 回行った．この討論は，応用系のみならず純粋系の教官にもアナウンスし，議論に加わった形で行った．

講義の感想

１９９９年度 集中講義内容要約

科目名　社会数理特論１（1/5）　**担当教官**　塩田 憲司・加藤 真弓

サブタイトル　コンピュータの課題と展望について

対象学年　４年　**２単位**　**選択**

教科書
参考書

予備知識

講義内容

現在のコンピュータの基礎となっているフォンノイマン型のコンピュータが誕生してからまだ半世紀しかたっていないが，コンピュータシステムは社会のインフラを形成し社会活動する上でなくてはならないものになっている．

またコンピュータの技術革新は急激であり，特に近年のパソコンブームにより，企業だけでなく個人の情報ツールとして情報化社会を乗り切るための必須アイテムになっている．

本講義ではコンピュータの先端技術の紹介だけではなく，ますます重要になってきているソフトウェア開発に関する最新状況と直面している課題及び今後の展望についても時間を割きたい．さらに，日常何気なく利用しているコンピュータ応用製品のインサイドに関しても紹介する．

ソフトウェア開発は抽象的な記号の列であるプログラムを組み合わせて，論理的に意味を持つ機能を実現するクリエイティブな仕事である．プログラムから複雑な処理の流れを考える能力が必要でありソフトウェア設計は数学的素養をかなり要求すると言える．

本講義の目次を以下に示す．

1. コンピュータの歴史
2. ワークステーション・パソコンの最近の動向
3. ソフトウェア開発上の重要課題
4. コンピュータの応用製品（システム技術）
5. 将来のコンピュータ
6. 数学科の学生への期待

講義の感想

科目名　社会数理特論１（2/5）　**担当教官**　大丸 隆正

サブタイトル　FA における計算機応用

対象学年　４年　**２単位**　**選択**

教科書
参考書

予備知識

講義内容

コンピュータと言うとパソコンやワークステーション，汎用計算機などを想像しがちであるが，現代の制御はほとんどがデジタル制御になってきており，その中心はマイクロプロセッサーというコンピュータである．これらのコンピュータは航空機・自動車や産業機械と言ったハイテク製品から洗濯機や冷蔵庫等の家庭電化製品に至るまで，およそ電気を使うあらゆる製品に応用されていると言っても過言ではない．本講義ではこれら「機器組込型」分野の中で FA（Factory Automation）と言われる工場の自動化設備や産業用機械制御に使用されるコンピュータの応用について紹介する．また，年々巨大化する組込用ソフトウェアの特徴と開発技術の動向についても述べる．

本講義の概略内容を以下に示す.

- 計算機応用分野
  汎用計算機と機器組込型計算機
- ＦＡ制御機器の紹介
  PC，NC，サーボ，インバータ，ネットワーク
  放電加工機，レーザ加工機，ロボット
  CAD/CAM（CAT，CAT）
  CIM，FMS，FMC
- 計算機制御の歴史
  マイクロプロセッサの登場
  サンプリング制御（離散値系）
  アナログからデジタルへ
- FA 制御機器の最新動向
  表示設定機能の高度化
  ネットワーク化
  非線型制御・現代制御等高度制御技術の取込
- 制御用組込み S/W の特徴
  リアルタイム OS 組込み

ROM システム，専用 H/W，高速・小メモリ
開発環境と実行環境

- S/W 開発環境と開発手法の動向
- 組込ソフト開発事例（放電加工機制御ソフトウェア）

講義の感想

最初にプロジェクタのセッティングに時間をとられ，その関係上時間超過になり申し訳有りません.

質問等有った方も見えられたようですが十分できませんでした．また機会があれば，質疑応答時間を確保したいと思います.

数学科の学生諸君がどのような事に興味があるのかもう一つ摑めず，いつもこれで良いのかなと思いながらやっています．内容も少しは変えておりますので反応が有ればうれしいかなと思います.

科目名　　社会数理特論１（3/5）　　　　**担当教官**　黒沢 隆一

サブタイトル　車の運転

対象学年　　４年　　　　**２単位**　　**選択**

教科書
参考書　「歩行者 自動車 車 — 路上の運転と行動の科学」牛生扇（平尾収）三栄書房

予備知識

上手に運転しようと思うと，速度が高い方が難しいか，それとも低い方が難しいか考えて来ること．

講義内容

定量的に扱い難い人の行為（運転）の定式化を試み，一般交通環境での運転を簡単な微分方程式で表現する．

車の運転行為は,（１）運転している車両特性に合わせる,（２）交通環境に合わせる,（３）乗っている人の特性に合わせる，簡単に言えば，車，環境，人に合わせる行為に集約できる．

別な言い方をすると,（１）は車両の良し悪しに関わる部分,（２）は交通安全に関わる部分,（３）は運転の上手い下手に関わる部分である．

人の特性を基に（１）,（２）,（３）を定量的に扱う一つの方法を述べる．

講義の感想

名古屋大学の数学科の方はみなさん真面目な学生というのが一番の感想です．最近の学生は……，と何かと不真面目なことが多くマスコミに取り上げられているのを見聞きすることがありますが，そんな悪いところもあるんだと言う感じです．

真面目な学生でも，新緑の爽やかな季節に教室の中に閉じこめられて，下手な講義を聞かされるのは，一寸辛いですね．

私の方の問題ですが，人間は前もって見込んだ行動を取ることによってのろまな特性をカバーして遅れなく行動できるのですが，この見込んだ行動の定式化の説明は式が簡単なだけになお難しい，２年連続して遅れはどうなるのかとの質問を受けてしまった．来年はもう少しましな説明をしたい．

車の安全に関する認識で意外だったのは，シートベルトとエアバッグの救命効果はどっちが大きいかとの問いにほぼ全員躊躇無く正解のシートベルトと答えたことである．最初の年の講義では，質問の時間に「車は人を殺すので，僕は免許は取らないことにしていた．今日のお話を聞いて免許を取っても良いかなと思ってしまったけど本当に免許を取っても大丈夫しょうか.」というのがあった．　最近の数年間は若者（２９歳以下）の交通事故死者数が一本調子で激減しているが，運転がおとなしくなっただけではなく，安全意識も高くなっていることが，授業を担当したおかげで体感できた．

変わった質問では,「トヨタ自動車では事故を起こすと首になるのか？」と言うのがありました．　「事故を起こしてしまったことよりその後の行動によっては首になるかも知れません.」

交通安全意識を高めるには，できれば小学校，中学，高校で教育されると良いと思いますが，免許を取って車の運転ができる大学生になって事故はより身近になるので，大学での安全運転教育は必要と思ってました．　今回この質問を受けて，一寸した不注意で事故を起こしたときの対応は全人格的な秤にかけられること，また人の命にも関わる非常に重要なことなので，大学や研究室でも事故および安全に関わる何らかの指導が望まれると思いました．

科目名　社会数理特論１（4/5）　**担当教官**　原田 靖博

サブタイトル　最近の金融経済情勢と日本銀行の役割

対象学年　４年　**２単位**　**選択**

教科書
参考書

予備知識

講義内容

1. 最近の金融経済情勢と日本銀行の役割
   ９７年第四半期以降５四半期連続してマイナス成長となるなど景気低迷が長期化している状況下，日本銀行がどのような考え方に基づいて金融政策を運営しているか（最近の金融緩和政策の背景，調整インフレ論に対する考え等）について理解する．

2. 我が国金融システムの現状と課題
   金融機関経営のあり方を含め，我が国金融システムに対する信認を回復するための課題について考察する．

講義の感想

当方の講義のやり方に問題があったのかも知れないが，学生側の active participation が無かったことが，非常に残念．来年度以降，この講義を続けるとした場合，当方から，講義項目のドラフトを予め提示し，学生に項目毎に関心度の優先順位を示してもらうことを考えているが如何か．

科目名　社会数理特論１（5/5）　**担当教官**　島田 舒一

サブタイトル　デリバティブ取引とリスク管理について

対象学年　４年　**２単位**　**選択**

教科書
参考書

予備知識

講義内容

1. デリバティブ（金融派生商品）が内外の市場で飛躍的な成長を遂げ，金融ビジネスの中で大きな地位を占めている．このデリバティブ取引が，経済，金融活動に果たす役割や，経営上のリスク管理について論じる．
2. 実務的な観点から次の点を中心に話をする．
   - デリバティブが金融取引でどのように使われているか．
   - 金融商品にどのように生かされているか．
   - 企業経営においてどのような形でリスク管理が行われているか．
   - デリバティブが金融市場と経済に与えるインパクトと問題点．

講義の感想

1. デリバティブについて話を聞くのは初めてという前提で，極力平易な講義を心掛けました．終了後の感想で，デリバティブの事柄程度はご理解いただけたように思いましたので，一応の目的は達成できたのではないかと考えています．
2. 日本版ビックバンが進展し，規制緩和，グローバルスタンダードが経済の運営，企業の経営に浸透する中で，デリバティブの活用分野がますます広がっています．また，日本の金融が国際競争力を高めるには，これら金融工学を学んだ人が多く金融実務に携わることが不可欠です．関心のある方は参考書も数多くありますので目を通されることをお勧めします．
3. 学ぶにあたっては，デリバティブは市場と密接な関連を持っているので，単に，理論の習得にとどまらず，株式，債券，金利，為替などの市場についても関心を持って学ばれれば，現実的な理解が深まると考えます．

科目名　　**高次位相特論２**　　**担当教官**　**南 範彦**

サブタイトル　入門 Cryptography

対象学年　**４年**　　**２単位**　**選択**

教科書
参考書　N. コブリッツ 著，櫻井 幸一 訳,『数論アルゴリズムと楕円暗号理論入門』（シュプリンガー・フェアラーク東京，1997 年）
J. H. シルヴァーマン・J. テイト 著，足立 恒雄・木田 雅成・小松 啓一・田谷 久雄 訳,『楕円曲線論入門』（シュプリンガー・フェアラーク東京，1995 年）

予備知識

講義内容

この手中講義では，先ず最初に，Cryptography（暗号理論）の極く初等的な考え方を紹介し，その代表的な RSA 暗号の考察から,

1. 与えられた自然数が素数かどうかを判定する上手いアルゴリズムが有るか？
2. 与えられた整数を因数分解する上手いアルゴリズムが有るか？

という二つの整数論的問題が自然に出てくる事を注目します．そして，これらの応用的色彩の高い問題達が，実は抽象代数と極めて密接に関連している事を感じて頂く事を目的とします.

実際，1 は，例えば Solovay-Strassen の素数判定法を通してヤコビ記号の相互律（平方剰余の相互律の一般化）と関係しますし，2 は，例えば Lenstra によって有限体上の楕円曲線の話，特に（後に Deligne によって一般的に解かれた）Weil 予想（の特別な場合）とも密接に関係することが見出されました．それ故,平方剰余の相互律・ヤコビ記号の相互律の証明と，楕円曲線の極めて初等的な事柄の説明に講義の多くの時間を充てることとします.

この集中講義は主として学部学生の方々を対象にした初等的なものであることを，お断り致します.

講義の感想

参加された生徒さんの（主に専攻の違いから生じる）予備知識の差が余りにも大きいのにとまどいましたが，これは学部生向けの集中講義ですので生徒さんの状況に応じて必要事項の復習をしました． ただそのために時間延長が後半には恒常化し，通常１０時間のところが１５時間になってしまいました． しかしながら，すべての講義にお付き合いしてくださった熱心な生徒さんも何人かみえ，大変感心しました.

科目名　**基幹数理特論２**　**担当教官**　**真島 秀行**

サブタイトル　微分方程式の形式解と漸近解析

対象学年　**４年**　**２単位**　**選択**

教科書　まだ出版されていないが上智大学から講究録が出版される予定
参考書　Yasutaka SIBUYA, Linear Differential Equations in the Complex Domain : Problems of Analytic Continuation, AMS (1990)

予備知識

関数論の留数解析くらいまでと微分方程式の整級数による解の存在定理くらい.

講義内容

証明を与えることに必死にならなくても良いとの指示があったので，8 時間を 8 つに分けて，1 時間ごとにトピックス的にし全体として漸近解析が垣間見られるように話すことにした．興味をもってもらうため，初めの 4 時間で，3 つの例について少しくわしく述べた．すなわち，人工虹スクリーンにより虹の観察をしてもらった後に虹（エアリーの虹の関数）の話，$n!$ のスターリングの公式及びガンマ関数のスターリング・ビネの公式の話，オイラー方程式の形式解のいくつかの意味付け（解析的解釈，代数的解釈）の話をした．後半の 4 時間のうち 2 時間は，線形常微分方程式の特異点の分類，形式的変換による標準系への還元について話をし，最後の 2 時間で，形式解に漸近する解の存在，合流超幾何微分方程式への応用，不確定度等を話した.

講義の感想

熱心に受講してもらえたと思う.

科目名　社会数理特論２（1/5）　**担当教官**　松崎 雅人

サブタイトル　エネルギーと地球環境問題 — 都市ガスの果たす役割 —

対象学年　４年　**２単位**　**選択**

教科書
参考書

予備知識

講義内容

地球温暖化が何に起因するのか，それがどのような影響を人類のもたらすのか．その要因の一つに炭酸ガスに拠るモノがある．エネルギー活用時に排出される炭酸ガスがその太宗を占める．エネルギー利用は人類にとって必要不可欠である．エネルギー源消費を極小化することで地球温暖化の抑制，出来れば回復する種々の取組み，あるべき姿を，都市ガスが果たす役割の観点から考察する．

講義の感想

１．講義に望むに当たって

数理に直接的に関連する講義内容ではないが，以下の３点を中心とした気付きをして貰えればの思いで講義に望んだ．

(1) 地球環境問題がクローズアップされており，我が日本が果たす役割，構成要素である個人の行動はどうあるべきかを確認する．

(2) 種々の取り組みを知り，己・個人の行動のあり方の参考にする．かつ，視点を変えれば違うモデルが見えてくる．強いて言えば，数理でモデル化する場合の視点・目の付け所を感じとる．

(3) グループ討議の必要性と，個人の考えが集団の中でどのように整理・集約されるか，の過程の面白さを認識する．

２．講義を終えて

講義中に，前半と後半の 2 回アンケート形式で質問 (*) に答えてもらう機会を作り，同時にグループ討議もしてもらった結果を踏まえ，以下の感想を持った．

(1) 前記１．(1) 項について

情報提供を焦るあまり，十分理解を得られなかった．また，それをお補うため，ＯＨＰのような安易な手法のみに拠らず，後部席の方からでもよく見えるパワーポイント等を用い，プレゼンテーション・ツールに工夫を要する．

勝手ながら,「地球環境問題が，他人事ではなく，自らがどう行動するかが重要である」の認識する機会と捉えて貰いたい．

(2) 前記１．(2) 項について

具体的サンプル事例を列挙・提示する必要があった．サンプル事例には，数理モデルであれば，さらに良い．講義の中から盗み取れということでは，不十分であると感じた．

(3) 前記１．(3) 項について

自分の主張の軸を持って，始めて相手と議論が出来る．また，相手の言うことに耳を傾けることが出来る．平素，自己の殻に閉じ込み過ぎの傾向があるのか，解らないなりに議論するのに慣れていないと感じた．しかし，グループ討議する楽しむきキッカケ作りになればと，今後を期待したい．

注 (∗)

質問１：地球環境問題対応に付いて自分ならどうする（提言は？）．

質問２：商品の価格表示に環境対応費用も含め記載すべきか否か?．もし，すべきであるならば，どの程度を標記すれば良いか?．

科目名　社会数理特論２（2/5）　**担当教官**　松沼 正平

サブタイトル　移動体通信市場の現状と将来

対象学年　４年　**２単位**　**選択**

教科書
参考書

予備知識

講義内容

移動体通信事業は，２１世紀への入口にさしかかった処で，一種の転機を迎えている．ショートメッセージサービス，E mail 等の非音声系サービスの呼量が音声系を上回り，極く近い将来，移動系データ通信市場が大きく成長することを示唆している．一方競争も激化を増し，事業主体である各社にとって，今後の事業遂行を的確に行う上で，現状の把握・分析を行って近未来の変化を予測し，それに基づく魅力的な商品・サービスの市場への早期投入が，これまで以上に重要となる．

このような認識のもとに，次の項目を中心に述べることにしたい．

(1) 移動電話の種類と仕組み

(2) 日本及び外国の事情

(3) 事業主体にとっての課題

講義の感想

不慣れな講義で，お聞き苦しい点も多々あったかと思いますが，御静聴感謝致します．携帯電話の簡単な原理から次世代携帯電話まで，多くの話題がありましたが，どうも平板的な話になってしまった点，学生の皆様にも参加していただく討議形式を取り入れたり等，もう一工夫必要だったと反省しています．

ただ，日本での講演会や講義では，外国に比べて質問や意見等の発言が少ないように思います．学界・研究界であれ，官界・産業界であれ，国際化・ボーダレス化が進む２１世紀を生き抜くためにも，自らの意志を積極的に発言するような気風を持つことが必要と考えます．

科目名　社会数理特論２（3/5）　**担当教官**　石川 茂樹

サブタイトル　顧客情報分析による顧客理解と商品開発へのフィードバック

対象学年　４年　**２単位**　**選択**

教科書

参考書　「日本経営品質賞とは何か」社会経済生産性本部編，生産性出版

予備知識

講義内容

経済のグローバル化により，消費者は求めるものを世界中から手に入れることが可能になった．魅力に欠ける特徴のない商品しか出せない企業は，価格競争のなか市場から撤退をよぎなくされている．企業は生き残りのため，他社と差別化された高付加価値商品を市場に送り出す必要に迫られている．そのために，顧客ニーズをつかむことが，企業活動の中でも重要な意味を持つようになった．

本講義では，企業活動における顧客情報活用の実態について，事例を紹介しながら話を進めていく．これにより，企業活動の現場での数値解析応用について，理解を深めてもらいたい．

本講義の内容（予定）

(1) ブラザー工業の企業紹介

(2) 画像システム事業部のファクス事業の概要

(3) 顧客理解と対応について

(4) 顧客情報の活用事例紹介

(5) 数値解析への期待

講義の感想

これから社会に出てゆく学生の皆さんに，大学で学んでいる知識が実社会でどのように役立っていくのかを理解いただき，勉学の動機付けにしていただきたいと思い講師を引き受けました．企業活動の実際を事例を中心に紹介させていただきましたが，学生の皆さんも熱心に講義をうけていただき感謝しております．講義途中でアンケートのような形で意見を集めさせていただきましたが，問題意識をもって講義に臨んでいる学生の方が多く頼もしく思いました．

科目名　社会数理特論２（4/5）　**担当教官**　奥村 誠史

サブタイトル　最近の流通業の概況について

対象学年　４年　**２単位**　**選択**

教科書
参考書
・日本経済新聞社「流通経済の手引き 2000」日経流通新聞編
・日本経済新聞社「ゼミナール流通入門」田島／原田編
・東洋経済新報社「全解明流通革命新時代」長銀総合研究所編

予備知識

講義内容

歴史的発展過程や現在の消費動向を通じて，流通業の役割を理解する．また，新しい手法を含め小売業の具体的な企業活動を見ながら，流通業の現況と課題について理解を深める．

(1) 流通業の位置と役割

(2) 効率化の進展と小売業の将来

(3) 統計からみた小売業

(4) 小売業の具体的な企業

(5) 流通業界を取り巻く法的規制
百貨店に関連する法律，規制緩和の流れ，大規模店舗立地法

(6) 百貨店業界の現況

講義の感想

学生諸君の受講態度は大変にまじめで，不慣れな小生にとっても講義が進めやすく，その点では非常に良かった．

ただ欲を言えば，質問などの発言がなかったので，講義が一方的になり，もの足りない感想を持った．もっと発言を引き出すような説明や質問の仕方に工夫をすべきであったと，反省している．

科目名　社会数理特論２（5/5）　**担当教官**　味藤 圭司

サブタイトル　保険数理とアクチュアリー

対象学年　４年　**２単位**　**選択**

教科書

参考書
・国沢清典編，確率論とその応用，岩波書店
・竹内啓，数理統計学，東洋経済新報社
・二見隆，生命保険数学，生命保険文化研究所
・日本アクチュアリー会，年金数理，日本アクチュアリー会
・新井清光，現代会計学，中央経済社
・伊藤元重，入門経済学，日本評論社
・日本証券アナリスト協会，証券投資論，日本経済新聞社
・Hans Buhlmann, Mathematical Methods in Risk Theory, Springer
・大滝勉，年金保険数学，日本アクチュアリー会
・沢木勝茂，ファイナンスの数理，朝倉書店

予備知識

講義内容

目的：保険数理の基礎を学習し，かつ保険数理の専門家としてのアクチュアリーの本来的機能は，数理的アプローチによる保険社会のリスクマネージメントであることを理解する．

内容：

(1) アクチュアリーの歴史

(2) 保険数学の基礎

(3) 責任準備金

(4) 資産運用リスク

(5) 保険会社のリスク管理におけるアクチュアリー手法の例

(6) アクチュアリーの活躍フィールド

(7) アクチュアリー資格試験

講義の感想

ほぼ教室が埋まるといった出席状況の好さにまず驚きました．

講義内容をどうするかといったところで，大学で学習するような数学を扱った内容にしたかったのですが，残念ながら「保険」の基本となるところは，高校生でもわかるような内容が多く，受講生には歯ごたえがなかったかもしれません．一方，アクチュアリーの最先端領域においては，いわゆる「金融工学」が中心

となり私自身がフォローしきれていない状態で，受講生には歯痒さが残ったものと思われます．しかしその分，数学専攻の学生にはほとんど馴染みは無いのですが社会人としては必ず必要な法令の読み方等を若干織り込みました．

科目名　高次位相特論２　　**担当教官**　谷口 雅彦

サブタイトル　共形力学系入門

対象学年　４年　　**２単位**　**選択**

教科書
参考書　上田・谷口・諸澤「複素力学系序説」培風館

予備知識

メビウス変換の基本的性質．例えば，円円対応や等角性などを知っていることが望ましい．また，自己相似集合などのフラクタル集合の知識があれば興味が持てるだろう．

講義内容

メビウス変換（一次分数変換）から生成される群が離散的である時，クライン群と呼ぶ．力学系としてのクライン群に対する基本的事柄を解説する．

講義の感想

基礎知識をほとんど仮定しなかったので，前半はそんなに難しくなかったと思う．ただ，その後遺症で最後の日，主定理の証明が出来なかったのは残念だった．またグラフィックを見せられればもっと良かったかもしれない．

科目名 **高次位相特論２** **担当教官** **宮岡 礼子**

サブタイトル 可積分系理論入門

対象学年 **４年** **２単位** **選択**

教科書
参考書

１．R. Palais : The symmetries of Solitons, Bull. A. M. S. **34** (1997) 339-403
２．和達三樹 : 非線形波動（岩波書店）
３．CL. Terng and K. Uhlenbeck : Surveys in Differential Geometry IV, Integrable Systems (International Press) (1999)
４．アーノルド : 古典力学の数学的方法（岩波書店）

予備知識

講義内容

微分方程式論においては，解の存在，一意性，正則性が論じられる一方，解を具体的に構成してみせることが，計算機の進歩にも力を借り，可能になっている．

可積分ということばは，本来は解が求積法で求まる，という意味の可積分を意味しているが，Liouville-Arnord の定理の意味での可積分性は，無限次元においても作用・角変数の存在として一般化され，また厳密解が求められる場合をより広く可積分ともよぶようである．

ソリトン解をもつ微分方程式は可積分系としてとらえられることが多く，その代表例が KdV 方程式である．この講義では，ソリトン理論の発展を大きく促した KdV 方程式を中心にいわゆる可積分系理論の入門を幾何学の立場（すなわち非専門家の立場）から行う．３年次までの数学の知識を仮定し，できるだけ平易に次の内容のいくつかに触れていきたい．

1. ソリトンをみる
   (1) コンピューターグラフィックスでソリトンをみる
   (2) ソリトンの歴史
   (3) ソリトンと幾何学
2. 古典力学とシンプレクティック多様体
   (1) ニュートン方程式，ラグランジュ方程式，ハミルトン方程式
   (2) ネターの原理と対称性
   (3) エルゴード性と運命論
3. KdV 方程式とヒエラルヒー
   (1) KdV 方程式のハミルトン定式化
   (2) Schrödinger 作用素と Lax 表示

(3) KdV ヒエラルヒーと KP ヒエラルヒー

4. 逆散乱法

(1) フーリエ変換と散乱変換

(2) 散乱データの時間発展

(3) Gel'fand-Levitan-Marchenko 方程式

5. 散乱変換と群作用

(1) いろいろなソリトン方程式を零曲率方程式として記述する（ZS-AKNS スキーム）.

(2) 散乱データを定義し，散乱データの空間を記述する.

(3) 散乱データの時間発展の方程式を述べる.

(4) その解をループ群作用で構成する.

(5) 逆散乱変換をループ群作用の言葉で述べる.

(6) ヒエラルヒーをループ群作用の言葉で述べる.

(7) Bäcklund 変換をループ群作用の言葉で述べる.

講義の感想

ソリトンがどんなものであるかは，コンピューターグラフィックスを見れば一目瞭然である．講義のはじめに，１次元と２次元のソリトン波を見てもらい，そのひとつを記述する KdV 方程式の解法を講義の目的のひとつにあげて学生の関心を呼び起こすようつとめた．前提として，古典力学，シンプレクティック多様体，ハミルトン方程式の関係について学部レベルの話を２回行ったので，院生には少し退屈だったかも知れない．後半，逆散乱法による解法と，その代数的説明であるポアッソン群作用の話を行った．逆散乱法は解析的にきちんと述べきれないところもあり，反省している．ポアッソン群作用の話も時間的に無理があったが，代数的手法で方程式がとけたり，解空間の構造を探ることができる面白さを少しは伝えられたらと思い，こちらにとっては，やりがいのある講義であった.

科目名　**基幹数理特論２**　　**担当教官**　**古田 幹雄**

サブタイトル　Elliptic genus について

対象学年　**大学院**　　**２単位**　**選択**

教科書
参考書

予備知識

多様体，ベクトル束，微分作用素の基礎知識

講義内容

Witten が予想と物理的な解釈をあたえ，Bott-Taubes が数学的に証明した elliptic genus の rigidity の証明を紹介した．なお，その準備として，S^1 群作用がある場合の指数定理を，固定点が離散的である場合に説明した．rigidity の証明の第一のポイントは，無限個の作用素の指数の母函数を，収束冪級数として考察することであり，第二のポイントは，S^1 の全ての巡回部分群に対して，それの固定部分多様体に対して不動点公式を考察することである．その際，多様体がスピンであるという条件が本質的に使われる．

講義の感想

講義の流れをさえぎっても構わないから，あるいは講義の後でもかまわないから，質問を積極的にしてくれると,（お互いに）もっと稔りある時間となったと思います.

科目名　　**基幹数理特論４**　　**担当教官**　**斎藤 毅**

サブタイトル　Fermat 予想の証明

対象学年　　**大学院**　　**２単位**　**選択**

教科書　A. Wiles, Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem, Annals of Math., 141 (1995), 443-551
K. Ribet, On modular representations of Gal($\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$) arising from modular forms, Inventiones Math., 100 (1990), 431-476

参考書　G. Cornell, J. Silverman, G. Stevens (eds.), Modular Forms and Fermat's Last Theorem, Springer, 1997
H. Darmon, F. Diamond, R. Taylor, Fermat's Last Theorem, in J. Coates, S. T. Yau eds., Elliptic Curves, Modular Forms and Fermat's Last Theorem, 2nd ed. Intern. Press, 1997, pp. 2–140

予備知識

楕円曲線，保型形式，Galois 表現など

講義内容

Wiles と Ribet による Fermat 予想の証明をなるべくわかりやすく解説する．

この講義では，Fermat 予想の証明について解説します．4 回しかないので，証明に使われるものの紹介と，証明の大体のあらすじの解説ということになると思います．証明の流れは，

1. Fermat 予想に反例があったとして，それから楕円曲線をつくる．
2. その楕円曲線が modular なことを示す．
3. 2 ででてくる保型形式と合同な重さ 2 で level が 1 か 2 の保型形式があることを示し，矛盾を導く．

というものだということは，聞いたことがあると思います．いちばんかんじんな 2 の部分を詳しく話したいと思います．各回ごとの内容は，一応次のように予定しています．

1. （月）証明の方針：Wiles の定理「$\mathbb{Q}$ 上の semistable elliptic curve は modular」（上の 2）と，保型形式の合同と level についての Ribet の定理（上の 3）から，どのようにして，Fermat 予想が導かれるか（上の 1）の解説．および Wiles の定理は，その 3 等分点が既約という特別な場合に帰着して証明されるので，その証明の紹介．
2. （火）modular 曲線の reduction：Ribet の定理は，$p \not\equiv 1 \bmod l$ の場合には，modular curve の mod p reduction を使って比較的簡単に証明できる．この Mazur による証明の紹介．
3. （木）Wiles の証明 I：第 1 回に紹介する Wiles の定理は,「普遍変形環 R とヘッケ環 R との標準写像が同型であること」といいかえられる．このいいかえの解説．

4. （金）Wiles の証明 II：同型 $R \to T$ の証明．あるいは前日までにいいたりなかったことの補足．

予備知識としては，楕円曲線，保型形式，modular 曲線とその reduction，l 進表現などなど．一応講義中で定義などは復習する予定ですが，前もって知っていたほうが，よく理解できるはずです．

講義の感想

証明で使われる数論幾何の理論は多岐にわたり，それをわかりやすく解説するのは大変だということを改めて実感した．基本的な概念については，一応講義中で定義はのべたが，その実例などで具体的に親しむことができればもっとよかったと思う．今この証明について本を書いているが，この準備のためには大変に役に立っている．講義をする機会を与えてもらったことに感謝したい．

科目名　**高次位相特論２**　**担当教官**　**神保 道夫**

サブタイトル　Baxter を読む

対象学年　**大学院**　**２単位**　**選択**

教科書　なし
参考書　R. J. Baxter, Exactly Solved Models in Statistical Mechanics, Academic Press, London, 1982.

予備知識

初等的な代数（含線型代数）と解析（留数定理くらい）

講義内容

可解格子模型に関する Baxter の論文から次の 2 編をとりあげ，その（あまり忠実でない）紹介を行うとともに，それらの仕事の現在の時点から見た位置づけについて解説を試みた．

[**1**] R. J. Baxter, Partition function of the eight-vertex lattice model, *Ann. of Phys.* **70**, 193–228, 1972.

[**2**] R. J. Baxter, Corner transfer matrices of the eight-vertex model. I. Low temperature expansions and conjectured properties, *J. Stat. Phys.* **15**, 485–503, 1976.

論文 [1] では eight-vertex model の分配関数が初めて求められた．その過程で可換な転送行列族，今日の Yang-Baxter 方程式などもっとも基本的な方法が確立されている．論文の筋道を概観した後に，これらが量子群の表現論の言葉によってどのように理解されるか，未解決の点もこめて説明した．

論文 [2] は corner transfer matrix（CTM）の方法を提出した最初の論文である．CTM の考え方は一見突飛で人工的ながら，格子模型のみならず共形場理論など周辺の分野にも大きな影響を与えた．論文では泥臭い摂動展開を経て，可解模型の場合には CTM が著しい性質をもっている事実を発見していく過程が述べられる．講義では，その後 CTM の方法が量子群の表現空間としての「状態空間」の理解へと展開していくことに触れた．

講義の感想

やや欲張り過ぎて表面的な「お話」に終始してしまいました．どちらかに絞ってもう少し細部の計算をお話すべきだったかも知れません．

科目名　**数理解析特論２**　**担当教官**　**臼井 三平**

サブタイトル　Log 幾何学と Hodge 理論

対象学年　**大学院**　**２単位**　**選択**

教科書　なし
参考書　なし

予備知識

複素多様体，Hodge 分解，学部での代数学の基礎知識

講義内容

加藤和也氏との共同研究による，以下の内容についての講義をしました．

If D is a Hermitian symmetric domain then a quotient of D by an arithmetic group has toroidal compactifications by Mumford et al. We generalize this to the case where D is the classifying space of polarized Hodge structures of arbitrary Hodge type, by using log geometry. Our enlarged space has a structure of generalized fs logarithmic analytic space which is a fine moduli space of polarized logarithmic Hodge structures of certain type. This realizes one of the dreams of Griffiths in P. A. Griffiths, Periods of integrals on algebraic manifolds: Summary of main results and discussions of open problems, Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970), pp. 228–296.

講義の感想

内容がハードで盛りだくさんすぎて聴くほうは大変だっただろうなと反省しています．代数幾何学関係のセミナーを受けている人達にもっと出て欲しかったです．またもっと食い下がった質問等をしてほしかったです．

科目名　自然数理特論３　　**担当教官**　小澤 徹

サブタイトル　Fourier 制限定理と Strichartz 型評価

対象学年　大学院　　**２単位**　**選択**

教科書

参考書　E. M. Stein の本 3 兄弟（長男 1970 生，次男 1971 生，三男 1993 生）

予備知識

Fourier 変換，函数空間論

講義内容

線型の波の時空に於ける大域的な評価を与えるものが Strichartz の評価で，非線型発展方程式の初期値問題や散乱問題に多くの応用が有る．本講義では先ず，その数学的機構を Fourier 制限定理の立場から解説する．これは Fourier 変換を曲面上に制限したときの有界性を与えるものであるが，方程式との関連で言うとその曲面は線型作用素から決まる特性多様体となる．次に，Strichartz 型評価の証明の枠組を述べる．これは，双対性の議論として一般化可能な部分と，方程式特有の評価の部分に大別される．後者の典型は所謂停留位相の方法から従うものである．以上を或る程度一般的に論じられるものと具体的に計算できるものとに分けて解説する．以下の予定で講義を行う．

1. 停留位相の方法
   - 1.1 振動積分の三大原理
   - 1.2 一次元の場合
   - 1.3 多次元の場合
2. Fourier 制限定理
   - 2.1 単位球の場合
   - 2.2 非退化 Gauss 曲率をもつ有界曲面の場合
   - 2.3 非有界二次曲面の場合
3. Strichartz 型評価
   - 3.1 対角型の場合
   - 3.2 双対性の議論
   - 3.3 非対角型の場合

講義の感想

受講者は多数いたが，レポートを提出した者は少数であったことに悲しみを覚えます．質問等も皆無で残念に思います．

科目名　**自然数理特論４**　**担当教官**　**川田 浩一**

サブタイトル　サークル・メソッドとワーリング問題

対象学年　**大学院**　**２単位**　**選択**

教科書　なし

参考書
[1] R. C. Vaughan, “The Hardy-Littlewood Method”, 2nd ed.; Cambridge Tracts in Math. 125, Cambridge Univ. Press, 1997.
[2] M. B. Nathanson, “Additive Number Theory: The Classical bases”; Graduate Text in Math. 164, Springer 1996.
[3] T. M. Apostol, “Introduction to Analytic Number Theory”; Undergraduate Text in Math., Springer-Verlag, 1976.
など．その他，プリントを少々配りました．

予備知識

初等整数論や基本的な解析学．その他の予備知識は特になくてもだいたい理解できるよう努めたつもりです．

講義内容

サークル・メソッドとは，ゴールドバッハ問題やワーリング問題をはじめとする，非常に多くの加法的問題（特定の形の和による自然数の表現を考察する問題）に応用される方法ですが，その方法の概要を，ワーリング問題を題材にして，主に 1940 年以前の古典的な結果の解説を中心に，紹介しました．例えば，次の２つの結果の証明を紹介しました．

(1) 自然数 $k \geq 2$ に対し,「充分大きい自然数は s 個の k 乗数の和として表せる」ような最小の s を $G(k)$ とするとき,

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{G(k)}{k\log k} \leq 3.$$

つまり（少し雑にいえば），充分大きい自然数は，$(3+o(1))k\log k$ 個の k 乗数の和で表せる．

(2) 自然数 N を s 個の k 乗数の和で表すとき，その表し方の数を $R(N) = R(N; s, k)$ とすると，$s \geq 2^k+1$ ならば

$$R(N) = \Gamma(1+1/k)^s\Gamma(s/k)^{-1}S(N)N^{s/k-1} + o(N^{s/k-1}), \quad (N\to\infty).$$

ただし，$\Gamma(x)$ はガンマ関数，またここでは $S(N) = S(N; s, k)$ の定義は省略するが，それは $1 \ll S(N) \ll 1$ をみたす．

講義の感想

整数論を必ずしも専門としない人に，サークルメソッドの紹介をする，というのが目標でしたが，その面では一応の成果を挙げられたのではないか，と考えております．ただ，そのため紹介する結果はかなり絞ることとなりました．実際に講義を聞いてくれた方のうちの多くは解析的整数論について一定以上の知識をもっていましたので，もっと講義のスピードをあげて，当該分野での最近の進展の概要についても紹介した

方が良かったのかもしれない，という気もしないではありません．その意味では，予備知識をもっと多く要求して，初めから解析的整数論に興味をもっている大学院生に対象を限定した方が良かったかもしれない，とも思っております．

科目名　**社会数理特論２**　**担当教官**　**渡辺 信三**

サブタイトル　確率微分方程式と確率的流れ

対象学年　**大学院**　**２単位**　**選択**

教科書　なし

参考書　H. Kunita, Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations, Cambridge Univeristy Press, 1990

N. Ikeda and S. Watanabe, Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes, North-Holland/Kodansha, 1989

予備知識

確率過程論の基本的知識，確率解析の初歩的知識

講義内容

- 確率的流れ（stochastic flow）の定義
- local characteristics
- stochastic flow の存在定理
- 確率微分方程式による構成
- coalescing stochastic flow の存在定理と例
- それの生成するノイズ
- 特に non Gaussian noise (non white noise）の例

講義の感想

前半は，知られている事実を話したが，local characteristic の概念を用いてまとめ方に工夫した点に価値があるものと思っている．後半は，stochastic differential equation が弱い解しか持たない場合，それでも stochastic flow が対応する例，特にそれが non Gaussian noise を生成する例を述べたが，新しい理論を展開するまでにはいたらなかった．これが今後どう発展していくのか不明であるが，さらに研究を続けて行きたいと思っている．

科目名　　**高次位相特論４**　　　　**担当教官**　**井関 裕靖**

サブタイトル　負曲率空間への離散群の作用の剛性

対象学年　　**大学院**　　　　**２単位**　**選択**

教科書　指定しなかった.
参考書　指定しなかった.

予備知識

特に仮定しなかった.

講義内容

負曲率 Riemann 多様体の一般化である $CAT(-1)$ 空間への離散群の作用の剛性について講義する. $CAT(-1)$ 空間とは, 測地的距離空間であり, 測地三角形が定曲率 -1 の実双曲平面 $\mathbb{H}^2(-1)$ の測地的三角形よりやせているような空間のことをいう.

負曲率 Riemann 多様体の幾何学的性質の多くが, $CAT(-1)$ 空間においても成立することが知られているが, それらの事実から次のような剛性定理が導かれる.

定理. (M. Bourdon) H を階数 1 の非コンパクト型対称空間, Γ を H のココンパクト格子とする. H の実次元は 3 以上とする. また, X を $CAT(-1)$ 空間, Γ' を Γ と同型で X にココンパクトに作用する X の等長変換群の離散部分群とする. もし X の理想境界の Hausdorff 次元が H の理想境界の Hausdorff 次元と一致しているならば, H/Γ と X/Γ' は等長的である. すなわち Γ, Γ' に関して同変な等長写像 $H \longrightarrow X$ が存在する.

$CAT(-1)$ 空間 X の理想境界とは, X の測地半直線の集合において互いに有界な距離にある測地半直線を同値とみなして得られる商空間として定義される. この理想境界には M. Gromov により定義された距離が存在する. X の理想境界の Hausdorff 次元とは, この距離に関する Hausdorff 次元を意味する. M. Bourdon によるこの定理は, 階数 1 の場合の Mostow 剛性定理, および U. Hamenstädt によるコンパクト負曲率 Riemann 多様体の測地流に関するエントロピー剛性定理を特別な場合として含む非常に一般的な定理である. その一方で, 証明は測地三角形が $\mathbb{H}^2(-1)$ の測地三角形よりやせているということだけからなされるので, ある意味で非常に初等的であるし, Mostow の剛性定理等の証明に現われる議論の本質的な部分を抜き出したものになっているといってよい.

講義ではこの定理の証明を目標にする. できれば関連したトピックについても触れたい. 話の背景等まで理解するには負曲率 Riemann 多様体に関する知識がある方が望ましいが, 考察の対象が距離空間なので特に予備知識は仮定しない. 講義する項目は概ね以下の通りである.

- 双曲平面, 双曲三角法
- $CAT(-1)$ 空間
- $CAT(-1)$ 空間の理想境界

- $CAT(-1)$ 空間の測地流
- M. Bourdon の定理の証明
- 関連した話題

講義の感想

講義に出席した学生の数は少なかったが，熱心に聞いてくれたと思う．提出されたレポートもよく書かれていた．出席していたのは修士１年生ということで基礎的なことに時間を割いたため，最後は駆け足になってしまったことを反省している．

科目名　自然数理特論６　　**担当教官**　宮川 鉄朗

サブタイトル　Navier-Stokes 方程式の解の漸近挙動について

対象学年　大学院　　**２単位**　**選択**

教科書　なし
参考書　なし

予備知識

学部程度の（多変数）微分積分学と積分論の常識的な知識．フーリエ変換の初歩について知っていることが望ましいが，知らなくても差し支えはない．

講義内容

全空間上で Navier-Stokes 方程式の初期値問題を考え，解の時間・空間両変数に関する漸近形を導いてみせた．

講義の感想

講義で提示された結果は新しい結果であるが，推論と計算は「予備知識」の項に記した程度の予備知識（完全でなくてもよい）があれば何とかフォロー出来る程度のものである．解析専攻の院生には理解は容易であったろうと思っている．２，３の学生が興味を示してくれたのはうれしかった．

科目名　　**高次位相特論３**　　**担当教官**　**原 隆**

サブタイトル　Stochastic geometric models の臨界現象

対象学年　　**大学院**　　**２単位**　　**選択**

教科書
参考書
- Self-Avoiding walk については，*Self-Avoiding Walk* by N. Madras and G. Slade (Birkhäuser, 1993).
- Percolation については，*Percolation* by G. Grimmett (Springer, 1999).
- くりこみ群については，**くりこみ群の方法** by 江沢，鈴木，渡辺，田崎（岩波，1993）．特に３，４章を奨める．

予備知識

講義内容

主題について：

ここで Stochastic geometric models と言うのは Self-Avoiding Walk，Percolation，Lattice Animals 等のモデルをさす．これらは確率論のモデルとしても重要であると共に，場の理論のプロトタイプとして，また高分子のモデルとして，物理や化学でも重要な意味を持っている．この講義ではこれらのモデルの示す臨界現象に焦点を絞り，臨界現象とは何か，臨界現象を厳密に解析する方法（特に私自身も関わっている lace expansion の方法）などについて解説する．予備知識は特に仮定しない．教養課程程度の実・複素解析の知識があれば十分である．

各回毎の講義内容は以下の通りであった：

第一講： Self-avoiding walk の臨界現象と lace expansion

今回扱う内ではもっとも簡単な，self-avoiding walk（自分自身と交わらないランダムウォーク）の示す臨界現象について述べ，それを lace expansion の手法で調べる．

談話会： 臨界パーコレーションの scaling limit

パーコレーションの系のしめす臨界現象，特に連結クラスターの連続極限についてのべる．談話会と言う性質上，証明はあまりできないので，詳細は第二講に譲る.（この談話会も集中講義の一部として参加を奨励した.）

第二講： パーコレーションの臨界現象と lace expansion

パーコレーションの臨界現象を lace expansion の手法で解析する．比較のために，lattice trees，lattice animals と呼ばれる系も簡単に触れる．Self-avoiding walk よりも系が複雑であるから，その分，解析も複雑になるが，その過程でこれらのモデルの違いが明らかになってくる．

第三講： 背後にあるもの — くりこみ群の描像

この最終回では数学的厳密性にはとらわれずこれらのモデル（や関係する統計力学のモデル）の示す

臨界現象について，物理学者がどのように理解しようとしているのか，粗筋を述べる．この理解は「くりこみ群」の描像と言われる物であり，非常にスッキリした物の見方を与える．しかし，数学的に見た場合,「くりこみ群」の解析が厳密に行えるのは非常に限られた場合であり，この集中講義であつかった Stochastic geometric models ではまだ成功していない.（従って，この描像が本当に良いのかどうか，数学的には白紙の状態である.）それでも，この描像の与える物の見方は大変にきれいで,これが間違っているとは（私には）感じられないことから，敢えて一日を割いて述べることとした.（この最終日は内容の複雑さもあり，少し時間切れの観があった.）

講義の感想

かなり専門的な話にもかかわらず思ったよりたくさんの方が参加され，活気はあったと思う．このような題材を研究している人が日本では少ないことを考え，多少専門的になっても第一線の空気を伝えられる様,努力した．ただ，そのような講義が出来たかどうかは自信がない.

特に，内容はともかく，講義時間が全体的に不足した観は否めない.（Lace expansion とくりこみ群という２つの題材を押し込めたのはちょっと野心的すぎたかも知れない.）レポートでも「面白かったが，もっとゆっくり聞きたかった」との感想が見受けられた．途中に祝日が入っていたこともあり，それぞれの講義時間を長めにして対応したが，結果的には満足なものにはならなかったと反省している.

なお，レポートを提出してくれた学生さんの中に，休暇を取って参加してくれた昼夜開講の方がおられたのが印象的だった.

科目名　**高次位相特論４**　**担当教官**　**脇本 実**

サブタイトル　Conformal 代数への入門

対象学年　**大学院**　**２単位**　**選択**

教科書

参考書

1) V. G. Kac : Vertex Algebras for Beginners, 2nd edtition, AMS, University Lecture Series 10, 1998

2) D. B. Fuks : Cohomology of Infinite-dimensional Lie Algebras, Consultant Bureau, 1986

予備知識

講義内容

$\mathcal{R}$ を rank が有限な free $\mathbb{C}[\partial]$-module とする．$\mathcal{R}$ の各元 a，b に対して，$\mathrm{End}\,\mathcal{R}$ の元の family $\{a_{(n)}b\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が与えられていて，この対応

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}\times\mathcal{R} & \longrightarrow & \mathrm{End}\,\mathcal{R} \\ (a,b) & \longmapsto & a_{(n)}b \end{array} \quad (n\in\mathbb{Z})$$

が次の条件 (C0) ～ (C3) を満たすとき，$\mathcal{R}$ を conformal algebra と呼ぶ.

(C0) $a_{(n)}b=0$ if $n\gg 0$.

(C1) $(\partial a)_{(n)}b=-na_{(n-1)}b$.

(C2) $a_{(n)}b=-\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j+n}\frac{\partial^j}{j!}\left(b_{(n+j)}a\right)$　(skew-symmetry)

(C3) $a_{(m)}\left(b_{(n)}c\right)-b_{(n)}\left(a_{(m)}c\right)=\displaystyle\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\left(a_{(j)}b\right)_{(m+n-j)}c$　(Borcherds-Jacobi identity)

generating function

$$a\underset{\lambda}{\cdot}b:=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}a_{(j)}b$$

を導入すれば，条件 (C0) ～ (C3) は次の様に云いかえられる：

(C0') $a\underset{\lambda}{\cdot}b$ は（$\mathcal{R}$ の元を係数とする）λ の多項式.

(C1') $(\partial a)\underset{\lambda}{\cdot}b=-\lambda a\underset{\lambda}{\cdot}b$.

(C2') $a\underset{\lambda}{\cdot}b=-b\underset{-\partial-\lambda}{\cdot}a$.

(C3') $a\underset{\lambda}{\cdot}\left(b\underset{\mu}{\cdot}c\right)-b\underset{\mu}{\cdot}\left(a\underset{\lambda}{\cdot}c\right)=\left(a\underset{\lambda}{\cdot}b\right)\underset{\lambda+\mu}{\cdot}c$.

Conformal algebra $\mathcal{R}$ の表現とは，free $\mathbb{C}[\partial]$-module V （rank は有限）と

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}\times V & \longrightarrow & \mathrm{End}\,V \\ (a,v) & \longmapsto & a_{(n)}v \end{array} \quad (n\in\mathbb{Z})$$

で，上の条件の内で (C2) 以外に相当するものを満たすもののことである．すなわち，generating function

$$a\underset{\lambda}{\cdot}v:=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}a_{(j)}v$$

で云えば，

i) $a \underset{\lambda}{\cdot} v \in (\mathrm{End}V)[\lambda]$.

ii) $(\partial a) \underset{\lambda}{\cdot} v = -\lambda a \underset{\lambda}{\cdot} v$.

iii) $a \underset{\lambda}{\cdot} (\partial v) = (\partial + \lambda) a \underset{\lambda}{\cdot} v$.

iv) $a \underset{\lambda}{\cdot} \left(b \underset{\mu}{\cdot} v \right) - b \underset{\mu}{\cdot} \left(a \underset{\lambda}{\cdot} v \right) = \left(a \underset{\lambda}{\cdot} b \right) \underset{\lambda+\mu}{\cdot} v$.

Note. conformal algebra のとき，上の iii) は (C1)，(C2) から自動的に出る．表現のときは (C2) がないので，iii) を書き加えておかねばならない.

Note. 「rank が有限」というのは，適宜ゆるめることも必要になる.

rank が 1 で，non-trivial な conformal algebra は,

$$\mathcal{R} = \mathbb{C}[\partial]L \quad （L \text{ は } \mathbb{C}[\partial]\text{-module としての生成元}）$$
$$L \underset{\lambda}{\cdot} L = (\partial + 2\lambda)L$$

この $\mathcal{R}$ を “Virasoro conformal algebra” と呼ぶ.

講義では，この Virasoro conformal algebra について，その表現の様子を解説した.

1) Virasoro conformal algebra の既約表現は rank 1 である．すなわち,

表現空間： $V = \mathbb{C}[\partial]v$

L の作用： $L \underset{\lambda}{\cdot} v = (\partial + a\lambda)v$

（$a \in \mathbb{C}$ は任意）

2) Virasoro conformal algebra の表現の extension を計算する方法を解説し，この方法で得られる結果は，Virasoro algebra の cohomology のデータ（Fuks による）と一致していることを話した.

講義の感想

２年ほど前にやったことを題材にして話をしたが，思い出しながら準備をするのが苦しかった．この話自体は，ほとんど予備知識なし（線型代数だけ）で理解出来ると思う．出席していた大学院生たちは真面目に聴いてくれていたようで，うれしかった.

科目名　数理解析特論４　**担当教官**　戸田 誠之助

サブタイトル

対象学年　大学院　**２単位**　**選択**

教科書

参考書

1. 守屋悦朗著「チューリングマシンと計算量の理論」培風館.
2. Koebler, Toran and Schoening 他著「The Graph Isomorphism」Klauwer.

予備知識

講義内容

この講義では，確率型計算モデル（確率型チューリングマシン）の基本的な性質から，このモデルによって定義される計算量クラスや計算構造の性質について講義します.

まず，計算量理論の基本的な事項について解説したあとで，基礎事項として代表的な確率型計算量クラス（ZPP，RP，BPP，PP）の計算複雑さについて解説します．そのあとで，RP，BPP を抽象化した計算構造の性質である swaping property やこの構造と他の構造を交互に組み合わせた計算構造の階層が collapse してしまうことを解説します．また，PP と数え上げ問題との関係，ならびに数え上げの計算構造の複雑さについても解説したいと思います.

講義の感想

科目名　**基幹数理特論３**　**担当教官**　**蔵野 和彦**

サブタイトル　Dutta multiplicities and Roberts rings

対象学年　**大学院**　**２単位**　**選択**

教科書

参考書

[1] W. Fulton, *Intersection Thoery, 2nd edition*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1997.

[2] P. Roberts, *Multiplicities and Chern Classes in Local Algebras*, Cambridge University Press, 1998.

予備知識

講義内容

d 次元局所環 A のパラメーター $a_1, \ldots, a_d$ による Koszul 複体 $\mathbb{K}.(\underline{a}; A)$ のホモロジーの長さの交代和は，イデアル $(a_1, \ldots, a_d)$ に関する環 A の重複度と一致する（特に，いつも正である）ことが，Serre によって示されている．この概念を，A 上の自由加群の複体でホモロジーの長さが有限であるものに自然に拡張したものが，複体の Dutta multiplicity である．intersection multiplicity の計算には dutta multiplicity がしばしば登場し，Roberts の New Intersection Theorem の証明の中でも Dutta multiplicity の計算が非常に重要な役割を果たした．

Koszul 複体 $\mathbb{K}.(\underline{a}; A)$ の場合は，その Dutta multiplicity とホモロジーの長さの交代和は一致するのであるが，一般には一致しないのである．原因は，特異リーマン・ロッホ写像 $\tau_A : \mathrm{K}_0(A)_{\mathbb{Q}} \to A_*(A)_{\mathbb{Q}}$ によるサイクル $[A]$ の像が，有理係数のチャウ群 $A_*(A)_{\mathbb{Q}}$ の中で斉次にならないことにある．

上で，$[A]$ の像がチャウ群の中で斉次になるものを Roberts 環ということにする．簡単に言うと，（A が正標数のときは）A にフロベニウス写像 $f : A \to A$ を通して別の A-加群の構造を与えたものを ${}_fA$ とおいたとき，A が Roberts 環になるための必要十分条件は，有理係数の有限生成 A-加群のグロタンディェク群 $\mathrm{K}_0(A)_{\mathbb{Q}}$ の中で $[{}_fA]$ が $p^d[A]$ と一致することである．完全交差なら Roberts 環であるが，Gorenstein 環は Roberts 環になるとは限らないことが知られている．

この講義では，Dutta multiplicity や Roberts 環の基本的性質や応用について話したい．

可換環論・代数幾何の基本的な用語は仮定して講義する予定である．

講義の感想

単位を出した学生は，きちんと出席して，ノートを取っていた．

科目名　数理解析特論３　　**担当教官**　榎 一郎

サブタイトル　ケーラー多様体の埋め込みと変形

対象学年　大学院　　**２単位**　選択

教科書
参考書

予備知識

de Rham コホモロジィ，ベクトルバンドルの接続，曲率と第一 Chern 類，複素多様体の定義.

講義内容

1．談話会

任意のコンパクトケーラー多様体（の複素構造）は，ある射影代数多様体まで，変形可能であることを最近証明できた（と思う）ので，証明の概略と応用について述べる.

2．集中講義

談話会で述べる結果のうち，任意のコンパクトケーラー多様体が，ある射影代数多様体と微分同相になる，ことの証明をていねいに述べる.（談話会で，基礎的な定義と証明の概略を述べる予定なので，集中講義に出席される人は，談話会にも出席してほしい.）

証明は，小平の埋め込み定理の証明の C^∞ な類似を考えてゆくことになる.（埋め込み定理の証明は，知らなくとも良い.）複素多様体に関する定理であるが，複素解析的な手法は，ほとんど用いない．実際，C^∞ な直線バンドルをあつかうので，コホモロジィ群がない．その代わりに，Dirac 作用素の解の存在を，零点の位数も込めて，考える．その際，標準的な計量の $\mathbb{C}^n$ 上での解の様子を調べるという，具体的な問題が，重要なステップとなる.

講義の感想

科目名　自然数理特論５　　**担当教官**　倉田 和浩

サブタイトル

対象学年　大学院　　**２単位**　**選択**

教科書

参考書　[GT] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, 2nd ed., Springer-Verlag(1983).
[JT] A. Jaffe, C. Taubes, *Vortices and Monopoles*, Birkhäuser, 1980.
[LL] E. Lieb, M. Loss, *Analysis*, Amer. Math. Soc., 1997.

予備知識

Sobolev 空間の初歩，偏微分方程式の初歩（最大値原理，弱解の概念など）などを習んであることが望ましい．

講義内容

$\mathbf{R}^2$ 上の Ginzburg-Landau 方程式に焦点をあて，その定常解の存在，構造についての基本的結果を紹介した．第一回は，超電導現象に対する 2 次元 Ginzburg-Landau モデルの説明を簡単に行ない，Ginzburg-Landau エネルギーを最小にする波動関数および磁場ポテンシャルを求める変分問題への帰着を説明した．まず，遠方である意味で減衰する外磁場を与えた場合の変分問題の最小解の存在に関する Y. Yang の結果を述べた．第二回は，求めた解の性質，特に無限遠で超電導状態になること，全磁束の量子化などにつて説明，証明を行なった．しかし，与える外磁場と付随する全磁束の量子数（整数）との関係は未解決問題であることを述べた．第三回は，特に self-dual な場合に対して，全磁束の値を与えたもとでのエネルギー最小解の存在についての C. Taubes の結果を紹介した．第四回は，non-self-dual な場合に全磁束の値を与えたもとでのエネルギー最小解を求める問題に対し，球対称なクラスでの解の存在を示す Berger-Chen の結果を紹介した．関連する事項および最近の進展，問題などにつて軽く言及した．

講義の感想

講義では，いくつか計算を省略し，実際の計算をレポート問題として学生に委ねた．最後に，新たに講義で用いた関数解析の基礎的事項や関連する演習問題を出し，レポート提出で成績を判定した．結果的に修士 1 年の学生５–６人が提出したが，少し難しかったのかなという印象を受けた．

科目名 **基幹数理特論６** **担当教官** **若林 功**

サブタイトル Thue 方程式について

対象学年 **大学院** **２単位** **選択**

教科書
参考書

予備知識

代数的整数論の基礎があると第２回にはよい．関数論の基礎があると第３回にはよい．

講義内容

- 第１回「不定方程式概説」
  不定方程式論で扱われてきた問題，未解決問題について概説する．
- 第２回「Baker の方法」
  Thue 方程式を解くための一般的方法である Baker の方法を説明する．
- 補講：談話会「ある 3 次の Thue 不等式について」
  結果の紹介
- 第３回，第４回「3 次 Thue 不等式の解法」
  Padé 近似の方法，Rickert 積分，3 次式の立方完成，Legendre の定理の一般化を説明し，談話会で述べた 3 次 Thue 不等式の解法を説明する．

講義の感想

常時十数人から二十人ほどの人が講義を聴いてくれて大変嬉しく思いました．中には他大学から来てくれた人，例えば，新潟大学の院生，静岡大学，名古屋周辺の高専の先生等，もいましたし，名古屋大学の先生も何人か聴いてくれまして，私は非常に緊張しましたが，講義のし甲斐もありました．院生は，履修登録者以外も込めて，七，八名はいたようです．皆さん大変熱心に聴いてくれたので講義も気持ち良くできました．

講義時間は各回二時間に定められていましたが，場合によっては３時間などに延ばしてもよいようになっていると良いと思いました．理由は，まとまった内容のものを話そうとすると，もう少し時間が欲しいと思う場合もあることと，講義内容に関する問題演習の時間を講義後に取りたく思ったからです．

Thue 方程式を解く Baker の方法については，講義での説明後に，一例について全員に問題演習としてしてもらいました．理解の助けになったと思います．

不定方程式概説では，手頃と思われる問題を１０題出し，最終日にその一，二を時間をとってしてもらいました．思った以上に解くのに四苦八苦していましたが．残りはレポートにしました．レポート提出者の感

想に，“レポートの問で久々に具体的方程式をいじってみてなかなか楽しめました．代数も解析も具体的な場合に用いてみると良く分かって面白かったです．”と有りました．