2024年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題

2日目

2023 年 7 月 30 日　9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて**4 枚 1 組**である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ **の 4 題すべてに日本語または英語で解答すること**．
4. 答案用紙は**4 枚 1 組**である．各自確認すること．**ホッチキスを外してはならない**．
5. 答案用紙は，**1 枚目が** $\boxed{1}$ **用，2 枚目が** $\boxed{2}$ **用，3 枚目が** $\boxed{3}$ **用，4 枚目が** $\boxed{4}$ **用**となっている．間違えないこと．
6. **すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること**．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 n 次複素正方行列全体のなす複素線形空間を $M_n(\mathbb{C})$ で表す．$A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して

$$Z(A) = \{X \in M_n(\mathbb{C}) \mid AX = XA\}$$

とおく．以下の問に答えよ.

(1) $A, B, P \in M_n(\mathbb{C})$ であって, P は正則とする．$B = P^{-1}AP$ が成り立つとき,

$$\dim Z(A) = \dim Z(B)$$

を示せ.

(2) $A \in M_n(\mathbb{C})$ の固有値 α に対する広義固有空間を $W_\alpha = \ker(A - \alpha I)^n$ で定める．ただし, I は n 次単位行列を表す．任意の $X \in Z(A)$ と $v \in W_\alpha$ に対して, $Xv \in W_\alpha$ が成り立つことを示せ.

(3) 対角成分が α の n 次 Jordan 細胞 J を

$$J = (J_{ik}), \qquad J_{ik} = \begin{cases} \alpha & (k = i,\ 1 \leq i \leq n), \\ 1 & (k = i+1,\ 1 \leq i \leq n-1), \\ 0 & (\text{その他の}\ i,\ k), \end{cases}$$

で定める．ただし, $n = 1$ のときは $J = \alpha$ とする．任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して $\dim Z(J) = n$ となることを示せ.

(4) $A \in M_n(\mathbb{C})$ の Jordan 標準形において各固有値に対する Jordan 細胞が 1 個ずつ現れるとき, $\dim Z(A) = n$ となることを示せ.

2 区間 $[0,\infty)$ 上で定義された連続な実数値関数 f は $[0,\infty)$ 上で広義積分可能であるとする．以下の問に答えよ．

(1) 任意の $\delta>0$ に対して数列 $\left\{\int_{n\delta}^{(n+1)\delta} f(x)\,dx\right\}_{n=0}^{\infty}$ は $n\to\infty$ のとき 0 へ収束することを示せ．

(2) $\lim_{n\to\infty} x_n=\infty$ をみたす正数列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ が存在して

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=0$$

が成り立つことを示せ．

(3) さらに f が $[0,\infty)$ 上で一様連続であるとき，

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$$

が成り立つことを示せ．

3 複素関数 f を

$$f(z) = \frac{\log z}{z^2+4}$$

で定める. ただし, 複素平面 $\mathbb{C}$ から原点および下半平面にある虚軸を除いた領域を D とし, D における $\log z$ の分枝を正の実軸上で実数値となるように定めることで, $\log z$ を D 上で定義された一価関数とみる. $R > 2 > \varepsilon > 0$ に対して

$$C_1 = \{x \mid \varepsilon \le x \le R\},$$

$$C_2 = \{Re^{i\theta} \mid 0 \le \theta \le \pi\},$$

$$C_3 = \{-y \mid \varepsilon \le y \le R\},$$

$$C_4 = \{\varepsilon e^{i\theta} \mid 0 \le \theta \le \pi\}$$

とおき，D 内の閉曲線 $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ に C で囲まれる内部を左手に見て進む向きを定める. 以下の問に答えよ.

(1) $z = re^{i\theta}$ $(r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2})$ に対し，$\log z$ を r と θ で表せ.

(2) 複素積分 $\displaystyle\int_C f(z)dz$ の値を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_2} f(z)dz = 0$ および $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_4} f(z)dz = 0$ を示せ.

(4) 実関数の積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+4}dx$ の値を求めよ.

4 以下の問に答えよ.

(1) コンパクト位相空間 X の閉部分集合 A はコンパクトであることを示せ.

(2) Hausdorff 位相空間 Y のコンパクト部分集合 B は閉集合であることを示せ.

(3) 位相空間 X から位相空間 Y への連続写像 f と X のコンパクト部分集合 A に対して, 像 $f(A)$ は Y でコンパクトであることを示せ.

(4) コンパクト位相空間 X から Hausdorff 位相空間 Y への全単射連続写像 f は同相写像であることを示せ.