2024年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題

1日目

2023 年 7 月 29 日　9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **4 枚 1 組**である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある．$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ **の 4 題すべてに日本語または英語で解答すること**．
4. 答案用紙は **4 枚 1 組**である．各自確認すること．**ホッチキスを外してはならない**．
5. 答案用紙は，**1 枚目が** $\boxed{1}$ **用，2 枚目が** $\boxed{2}$ **用，3 枚目が** $\boxed{3}$ **用，4 枚目が** $\boxed{4}$ **用**となっている．間違えないこと．
6. **すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること**．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 $\mathbb{R}^4$ の 2 つのベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

が生成する部分空間を V, 3 つのベクトル

$$\begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t+2 \\ t-1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t+1 \\ -1 \\ t+1 \\ t+1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t-1 \\ 0 \\ t \\ t-2 \end{pmatrix}$$

が生成する部分空間を W_t とおく. ここで, t は実数のパラメータとする. 以下の問に答えよ.

(1) $\mathbb{R}^4$ の標準内積のもとで, V の $\mathbb{R}^4$ における直交補空間を $V^\perp$ とおく. $V^\perp$ の次元と一組の基底を求めよ.

(2) V が解空間となる連立 1 次方程式を一組求めよ.

(3) W_t が解空間となる連立 1 次方程式を一組求めよ.

(4) 部分空間 $V \cap W_t$ の次元と一組の基底を求めよ.

2 $V = \{a + bx + cx^2 + dx^3 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ を変数 x についての 3 次以下の多項式全体のなす実線形空間とする．実数 α に対し，線形写像 $\Phi_\alpha : V \to \mathbb{R}^4$ を

$$\Phi_\alpha(f(x)) = \begin{pmatrix} f(\alpha) \\ f'(\alpha) \\ f''(\alpha) \\ f'''(\alpha) \end{pmatrix}, \qquad f(x) \in V$$

により定める. ただし, 第 $2, 3, 4$ 成分はそれぞれ f の $x = \alpha$ での $1, 2, 3$ 階微分係数を表す. 以下の問に答えよ.

(1) V の基底 $\{1, x, x^2, x^3\}$ と $\mathbb{R}^4$ の標準基底に関する Φ_α の表現行列 A_α を求めよ.

(2) 問 (1) で求めた A_α は正則行列であることを示し, その逆行列 A_α^{-1} を求めよ.

(3) $\alpha \neq \beta$ とするとき，行列 $A_\alpha^{-1} A_\beta$ の Jordan 標準形を求めよ (ただし, 標準形に変換する正則行列は求めなくてよい).

3 以下の問に答えよ.

(1) $\mathbb{R}^2$ 上において, 曲線 $x^3 + 2y^3 = 10$ と点 $(0,0)$ との距離を求めよ. ただし, 距離は $\mathbb{R}^2$ 上の Euclid 距離とする.

(2) $\mathbb{R}^3$ における立体

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid e^z \leq x^2 + y^2 \leq (e-1)z + 1\}$$

の体積を求めよ.

(3) $\mathbb{R}$ 上の有理関数

$$f(x) = \frac{1}{2x^2 - 3x + 1}$$

の $x = 0$ のまわりでの Taylor 級数展開とその収束半径を求めよ.

4 $\rho \geq 1$ に対して, $\mathbb{R}^2$ の領域 D_ρ を 2 次形式

$$f(x,y) = 5x^2 + 8xy + 5y^2$$

を用いて

$$D_\rho = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) > \rho^2\}$$

とおく. また, パラメータ α, $\beta > 0$ を含む D_ρ 上の広義積分 J_ρ を

$$J_\rho = \iint_{D_\rho} \big(f(x,y) - 1\big)^\alpha f(x,y)^{-\alpha-1} \big(\log f(x,y)\big)^{-\beta}\, dx\, dy$$

で定める. 以下の問に答えよ.

(1) 任意の $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

をみたす 2 次実対称行列 A とその固有値を求めよ.

(2) J_3 が収束するか発散するかは α に依らないことを示し, J_3 が収束するための β に対する必要十分条件を求めよ.

(3) J_1 が収束するための α, β に対する必要十分条件を求めよ.