2023年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題

2日目

2023 年 2 月 5 日　9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて**4 枚 1 組**である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある．**$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ の 4 題すべてに日本語または英語で解答すること**．
4. 答案用紙は**4 枚 1 組**である．各自確認すること．**ホッチキスを外してはならない**．
5. 答案用紙は，**1 枚目が $\boxed{1}$ 用，2 枚目が $\boxed{2}$ 用，3 枚目が $\boxed{3}$ 用，4 枚目が $\boxed{4}$ 用**となっている．間違えないこと．
6. **すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること**．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 X と Y を実交代行列とする．すなわち，${}^tX$ と ${}^tY$ を X と Y の転置行列とするとき ${}^tX = -X$ と ${}^tY = -Y$ が成り立つとする．以下の問に答えよ．

(1) $(XY - YX)^2$ が実対称行列であることを示せ．

(2) $\mathrm{tr}(XY - YX)^4 \geq 0$ を示せ．

(3) X と Y が可換であることと (2) で等号が成り立つことは同値であることを示せ．

2 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$ をみたす実数列 $\{a_k\}$ を用いて, $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ 上の関数 $u(x, t)$ を

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (\sin kx) e^{-k^2 t} \qquad (x \in \mathbb{R},\, t \geq 0)$$

で定める. 以下の問に答えよ.

(1) $u(x, t)$ は $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ 上の連続関数であることを示せ.

(2) $u(x, t)$ は $t \to 0$ のとき $u(x, 0)$ に $\mathbb{R}$ 上で一様収束することを示せ.

(3) $u(x, t)$ は $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ 上で C^1 級であることを示せ.

3 $0 < \alpha < 2$ に対して, 複素関数 f を $f(z) = \dfrac{z^{\alpha-1}}{1+z^2}$ で定める. 以下の問に答えよ.

(1) $z = re^{i\theta}$ $(r > 0,\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2})$ に対して, $z^{\alpha-1}$ を r と θ で表せ.

(2) 複素平面 $\mathbb{C}$ から原点および下半平面にある虚軸を除いた領域を D とする. 問 (1) に従って, f を D 上定義された一価関数とみる. $0 < \varepsilon < 1 < R$ に対して, 以下で定義される閉曲線に反時計まわりの向きを入れた積分路 $C(\varepsilon, R)$ を

$$C(\varepsilon, R) = C_R \cup [-R, -\varepsilon] \cup C_\varepsilon \cup [\varepsilon, R]$$

で定める. ただし

$$C_\rho = \{z = \rho e^{i\theta} \mid 0 \le \theta \le \pi\} \quad (\rho = \varepsilon,\ R),$$

$$[-R, -\varepsilon] = \{z = re^{i\pi} \mid \varepsilon \le r \le R\},$$

$$[\varepsilon, R] = \{z = r \mid \varepsilon \le r \le R\}$$

としている. このとき, 複素積分

$$\int_{C(\varepsilon,R)} f(z)\,dz$$

の値を求めよ.

(3) $\displaystyle\int_{[-R,-\varepsilon]} f(z)\,dz = -e^{i\pi\alpha} \int_{[\varepsilon,R]} f(z)\,dz$ を示せ.

(4) 実関数の定積分

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x^2}\,dx$$

の値を求めよ.

4 X を位相空間とし，X の部分集合 S に対して S の閉包を $\overline{S}$ と表す．また，直積集合 $X \times X = \{(x, y) \mid x, y \in X\}$ には直積位相を入れる．すなわち $W \subset X \times X$ が開集合であるとは，任意の $(x, y) \in W$ に対して X の開集合 U, V が存在して $x \in U$, $y \in V$ かつ $U \times V \subset W$ が成り立つときをいう．ここで，位相空間 X に関する次の 3 つの条件を考える：

(i) 任意の相異なる 2 点 $x, y \in X$ に対して，X の開集合 U, V が存在して $x \in U, y \in V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ が成り立つ.

(ii) 任意の $x \in X$ に対して $\{x\} = \bigcap \left\{\overline{U} \mid U \text{ は } x \text{ を含む開集合}\right\}$ が成り立つ.

(iii) 集合 $\Delta = \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}$ は $X \times X$ の閉集合となる.

このとき，以下の問に答えよ.

(1) 条件 **(i)** と **(ii)** は同値であることを示せ.

(2) 条件 **(i)** と **(iii)** は同値であることを示せ.

(3) $f, g : X \to X$ は連続写像であるとする．X が条件 **(i)** をみたすとき，集合 $A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ は X の閉集合であることを示せ.