2023年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題

1日目

2023 年 2 月 4 日　9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて**4 枚 1 組**である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある．**$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ の 4 題すべてに日本語または英語で解答すること**．
4. 答案用紙は**4 枚 1 組**である．各自確認すること．**ホッチキスを外してはならない**．
5. 答案用紙は，**1 枚目が $\boxed{1}$ 用，2 枚目が $\boxed{2}$ 用，3 枚目が $\boxed{3}$ 用，4 枚目が $\boxed{4}$ 用**となっている．間違えないこと．
6. **すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること**．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 a, b を実数とし, 行列 A とベクトル $\boldsymbol{b}$ を

$$A = \begin{pmatrix} a & -a & 0 & 0 \\ a & 0 & 2-a & -1 \\ -a & a & a-2 & 1 \\ 2a & -2a & -a+2 & -1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ b \\ -1 \end{pmatrix}$$

で定める. $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ に関する連立一次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

について, 以下の問に答えよ.

(1) 行列 A の階数を求めよ.

(2) この連立一次方程式が解を持つための a, b に対する必要十分条件を求めよ.

(3) a, b が (2) の条件を満たすとき, この連立一次方程式の一般解を求めよ.

2 実数 t を用いて行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} t+3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -t-4 & t-2 & -1 & -3 \\ -t-1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と定める．以下の問に答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) A のジョルダン標準形を，必要ならば t の値に関して場合分けして答えよ．ただし，$P^{-1}AP$ がジョルダン標準形となるような正則行列 P は求めなくてもよい．

3 $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $g(x,y)=x^2+xy+y^2-1$ および $f(x,y)=xy$ に対し, 以下の問に答えよ.

(1) $g(x,y)=0$ のグラフを描け.

(2) 原点 $(x,y)=(0,0)$ 以外のある点 $(x,y)=(a,b)$ において $\lambda\nabla g=\nabla f$ となる $\lambda\in\mathbb{R}$ を全て求めよ. ただし

$$\nabla g(x,y)=\begin{pmatrix} g_x(x,y) \\ g_y(x,y) \end{pmatrix}, \qquad \nabla f(x,y)=\begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix}$$

とする.

(3) $g(x,y)=0$ の条件のもとでの f の最大値と最小値およびそれらをとる点を全て求めよ.

4 以下の問に答えよ.

(1) $u = u(x, y)$ を $\mathbb{R}^2$ 上で定義された C^2 級の実数値関数, θ を実数とする. (x, y) を $\mathbb{R}^2$ 上の任意の点とするとき, 極限値

$$\lim_{t \to 0} \frac{u(x + t\cos\theta, y + t\sin\theta) + u(x - t\cos\theta, y - t\sin\theta) - 2u(x, y)}{t^2}$$

を u の 2 階偏導関数と θ で表せ.

(2) $\mathbb{R}^3$ 上の関数 $f = f(x, y, z)$ を

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} + z \right\}$$

で定める. $\alpha > 0$ をパラメータとして, 広義積分

$$\int_{x^2+y^2+z^2>1} f(x, y, z)^{-\alpha}\, dxdydz$$

を極座標変換

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta \quad (r \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

によって (r, θ, φ) の積分にかき直し, これが収束するための $\alpha > 0$ に対する必要十分条件を求めよ.

（2023 年 2 月 4 日）　　（以上）