2023年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題

2日目

2022 年 7 月 31 日　9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて**4 枚 1 組**である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある．$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ **の 4 題すべてに日本語または英語で解答すること**．
4. 答案用紙は**4 枚 1 組**である．各自確認すること．**ホッチキスを外してはならない**．
5. 答案用紙は，**1 枚目が** $\boxed{1}$ **用，2 枚目が** $\boxed{2}$ **用，3 枚目が** $\boxed{3}$ **用，4 枚目が** $\boxed{4}$ **用**となっている．間違えないこと．
6. **すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること**．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 V を有限次元実ベクトル空間とし, V 上の内積を $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$ $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V)$ で表す. 線形写像 $p : V \to V$ が射影であるとは $p^2 = p$ が成り立つこととする. さらにこの p が直交射影であるとは, $\operatorname{Ker} p$ と $\operatorname{Im} p$ が直交するときをいう. 以下の問に答えよ.

(1) $p : V \to V$ が直交射影であるとき, 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して $\langle p(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v} - p(\boldsymbol{v}) \rangle = 0$ が成り立つことを示せ.

(2) $p : V \to V$ が直交射影であるとき, 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して $|p(\boldsymbol{v})| \leq |\boldsymbol{v}|$ が成り立つことを示せ. ここで $|\boldsymbol{x}| := \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}$ としている.

(3) $p : V \to V$ は射影とし, 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して $|p(\boldsymbol{v})| \leq |\boldsymbol{v}|$ が成り立つと仮定する. このとき, 任意の $\boldsymbol{u} \in \operatorname{Ker} p$, $\boldsymbol{w} \in \operatorname{Im} p$ と任意の実数 t に対して

$$|\boldsymbol{u}|^2 + 2t\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle \geq 0$$

が成り立つことを示せ.

(4) (3) の仮定のもとで, p は直交射影になることを示せ.

2 f と g は区間 $[0,\infty)$ 上で定義された連続な実数値関数で, f^2 と g^2 は $[0,\infty)$ 上で広義積分可能とする. 以下の問に答えよ.

(1) $m>0$ とする. 2 変数 x,y の関数 $(|f(x)||g(y)|-|f(y)||g(x)|)^2$ の $[0,m]\times[0,m]$ 上での積分を考察することにより,

$$\left(\int_0^m |f(x)g(x)|\,dx\right)^2 \leq \int_0^m f(x)^2\,dx \int_0^m g(x)^2\,dx$$

が成り立つことを示せ.

(2) $u(x)=\displaystyle\int_0^\infty f(x+y)g(y)\,dy$ が区間 $[0,\infty)$ 上の有界な関数として定まることを示せ.

(3) 任意の正の整数 m に対して, $[0,\infty)$ 上の関数 $u_m(x)=\displaystyle\int_0^m f(x+y)g(y)\,dy$ を考える. L を任意の正の実数とするとき, $u_m(x)$ は区間 $[0,L]$ 上で一様連続であることを示せ.

(4) (3) の関数列 $\{u_m\}$ が (2) の関数 u に $[0,\infty)$ 上で一様収束することを示せ.

3 以下の問に答えよ.

(1) 実数 θ に対して $z = e^{i\theta}$ とおくとき，関数

$$f(\theta) = \frac{1}{33 - 40\cos\theta + 8\cos 2\theta}$$

を z の関数として表せ.

(2) 積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta$ の値を求めよ.

4 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続写像とする．以下の問に答えよ．

(1) f が条件

$$(*) \quad \mathbb{R} \text{ の任意の有界部分集合 } K \text{ の逆像 } f^{-1}(K) \text{ は有界集合}$$

を満たすとする．このとき f は閉写像になること, すなわち, 任意の閉集合 F に対してその像 $f(F)$ が閉集合になることを示せ．

(2) f が上の条件 $(*)$ を満たすことと $\lim_{x\to\pm\infty} |f(x)| = \infty$ となることが同値であることを示せ．