

**2023年度 名古屋大学大学院  
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）  
入学試験問題**

**1日目**

2022年7月30日 9:00～12:00

**注意事項：**

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 問題用紙は表紙を除いて**4枚1組**である。試験開始後に各自確認すること。乱丁、落丁、印刷不鮮明な箇所などがあれば、ただちに監督者に申し出ること。
3. 問題は全部で4題ある。**①**、**②**、**③**、**④**の4題すべてに日本語または英語で解答すること。
4. 答案用紙は**4枚1組**である。各自確認すること。ホッチキスを外してはならない。
5. 答案用紙は、1枚目が**①**用、2枚目が**②**用、3枚目が**③**用、4枚目が**④**用となっている。間違えないこと。
6. **すべての答案用紙の所定の欄に、受験番号と氏名を記入すること。**
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが、その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること。
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合、あるいは計算用紙が足りなくなった場合は、監督者に申し出ること。
9. 試験終了後に提出するものは、4枚1組の答案用紙である。この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい。

**記号について：**

問題中の  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  はそれぞれ整数, 有理数, 実数, 複素数全体のなす集合を表す。

**1**  $a$  を実数とする. 以下の 3 次の実正方行列を考える.

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a(1-a) \\ 0 & 2-a & a(1-a) \\ 0 & 0 & 2+a \end{pmatrix}$$

以下の問に答えよ.

- (1) 行列  $A$  の固有値を求めよ.
- (2) 行列  $A$  は対角化可能であることを示せ.
- (3) 3 次の実正方行列  $M$  と可換な 3 次の実正方行列全体のなす実ベクトル空間を  $V(M)$  とする. (2) で得られる対角行列を  $B$  としたとき,  $\dim V(A) = \dim V(B)$  となることを示せ.
- (4)  $\dim V(A)$  を求めよ.

**2** 4 次の実正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

によって定まる  $\mathbb{R}^4$  の線形写像を  $f$  とする.  $\mathbb{R}^4$  には標準内積が与えられているものとする. 以下の問に答えよ.

(1) 線形写像  $f$  の像  $\text{Im } f$  と核  $\text{Ker } f$  の次元を求めよ. また, それぞれの基底を一組求めよ.

(2)  $t$  は実数とする.  $\mathbb{R}^4$  内の 2 つのベクトル

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} t+3 \\ t \\ -t+2 \\ -t \end{pmatrix}$$

が生成する部分空間を  $V$  とする. また,  $V$  の  $\mathbb{R}^4$  における直交補空間を  $W$  とする. このとき  $W$  の次元を求めよ.

(3) 線形写像  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  を  $W$  に制限した写像を  $f|_W : W \rightarrow \mathbb{R}^4$  と表すとき,  $\text{Ker}(f|_W)$  と  $\text{Im}(f|_W)$  の次元を求めよ.

**3**

(1)  $(x, y, z) = (1, -1, 1 + \sqrt{2})$  のある近傍で, 関係式

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 1$$

をみたす 2 変数  $C^1$  級関数  $z = f(x, y)$  が一意的に定まることを示せ. さらに

$\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1)$  と  $\frac{\partial f}{\partial y}(1, -1)$  の値を求めよ.

(2) 広義積分

$$\iint_D x^3 e^{-y} \frac{\sin y}{y^2} dx dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq x^2\}$$

の値を求めよ.

4  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$  上で定義された関数  $u = u(x, t)$  を

$$u(x, t) = t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{t}} \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0)$$

で定める. 関数  $u$  の変数  $t$  による  $k$  階偏導関数を  $\partial_t^k u$  で表す. 以下の問に答えよ.

- (1)  $u$  の変数  $t$  による 1 階偏導関数を求めよ.
- (2) 任意の正の整数  $k$  に対して  $k$  次多項式  $p_k$  が存在して,

$$\partial_t^k u(x, t) = t^{-k} p_k\left(\frac{x^2}{t}\right) u(x, t)$$

が任意の  $x \in \mathbb{R}$  と  $t > 0$  に対して成り立つことを示せ.

- (3) 正の整数  $k$  を任意に一つ固定する. このときある定数  $C$  が存在して不等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\partial_t^k u(x, t)| dx \leq C t^{-k}$$

が任意の  $t > 0$  に対して成り立つことを示せ.