2022年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題

2日目

2022 年 2 月 6 日　9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **4 枚 1 組**である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある．$\boxed{\mathbf{1}}$，$\boxed{\mathbf{2}}$，$\boxed{\mathbf{3}}$，$\boxed{\mathbf{4}}$ **の 4 題すべてに日本語または英語で解答すること．**
4. 答案用紙は **4 枚 1 組**である．各自確認すること．**ホッチキスを外してはならない．**
5. 答案用紙は，**1 枚目が** $\boxed{\mathbf{1}}$ **用，2 枚目が** $\boxed{\mathbf{2}}$ **用，3 枚目が** $\boxed{\mathbf{3}}$ **用，4 枚目が** $\boxed{\mathbf{4}}$ **用となっている．間違えないこと．**
6. **すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．**
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 V を 有限次元実ベクトル空間とし，V^* をその双対空間とする．すなわち，V^* は V から $\mathbb{R}$ への線形写像全体のなす集合に，演算を $(\phi+\psi)(v) = \phi(v)+\psi(v)$, $(c\phi)(v) = c\phi(v)$ $(\phi, \psi \in V^*, v \in V, c \in \mathbb{R})$ により定めた実ベクトル空間とする．次に $\{e_k \,|\, k \in I\}$ を V の基底とし，各 $j \in I$ に対し，$e_j^* \in V^*$ を条件

$$e_j^*(e_k) = \begin{cases} 1 & (j = k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases}$$

により定める．

(1) $\{e_j^* \,|\, j \in I\}$ は V^* の基底であることを示せ．

(2) V の元 v に対し $v = \displaystyle\sum_{k \in I} e_k^*(v) e_k$ を示せ．

以下，V は x を変数とする高々 n 次の実数係数多項式全体のなす実ベクトル空間とし，$I = \{0, 1, \ldots, n\}$, $e_k = x^k$ $(k \in I)$ とする．

(3) $v = p(x) \in V$ に対して，$e_k^*(v) = \dfrac{1}{k!} p^{(k)}(0)$ を示せ．ただし $p^{(k)}(x)$ は多項式 $p(x)$ の k 階導関数を表す．

(4) $v = p(x) \in V$ に対して $\hat{v} \in V^*$ を

$$\hat{v}(u) = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx \qquad (u = q(x) \in V)$$

で定義するとき，$\hat{v} = \displaystyle\sum_{j \in I} a_j e_j^*$ を成立させる $a_j \in \mathbb{R}$ $(j \in I)$ を $p^{(k)}(0)$ $(k \in I)$ を用いて表せ．

2 $[0,\infty)$ 上の関数列 $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\phi_n(x) = \dfrac{n}{1+n^2x^2}$ により定める．

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} \phi_n(x)\,dx$ の値を求めよ．

(2) 任意の $\delta > 0$ について，

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\delta}^{\infty} \phi_n(x)\,dx = 0$$

となることを示せ．

(3) 関数 $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ は有界かつ連続とする．このとき

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} f(x)\phi_n(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\,f(0)$$

が成り立つことを示せ．

3 複素関数

$$f(z) = \frac{e^{iz^2}}{z}$$

を考える．$R > \varepsilon > 0$ に対し

$$C_1 = \left\{ r \mid \varepsilon \le r \le R \right\} \qquad C_2 = \left\{ Re^{i\theta} \mid 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4} \right\}$$

$$C_3 = \left\{ re^{\frac{\pi}{4}i} \mid \varepsilon \le r \le R \right\} \qquad C_4 = \left\{ \varepsilon e^{i\theta} \mid 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4} \right\}$$

とし，閉曲線 $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ に反時計回りとなるように向きを定める．

(1) $0 < \theta \le \dfrac{\pi}{4}$ における $\dfrac{\sin(2\theta)}{\theta}$ の最小値を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{C_2} f(z)\,dz = 0$ を示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_4} f(z)\,dz = -\frac{\pi}{4}i$ を示せ．

(4) $\displaystyle\int_{C_3} f(z)\,dz$ は実数値であることを示せ．

(5) 広義積分

$$\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{x}\,dx$$

の値を求めよ．また，その理由を述べよ．

4 X を位相空間とする．X 上の関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が上半連続であるとは，任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $U_\lambda = f^{-1}\big((-\infty, \lambda)\big)$ が X の開集合であることをいう．以下の問に答えよ．

(1) $\mathbb{R}$ 上の関数

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 1 & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$

は上半連続かどうか，理由とともに答えよ．

(2) X がコンパクトであるとき，上半連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ は上に有界であることを示せ．

(3) X はコンパクト，$f : X \to \mathbb{R}$ は上半連続であるとし，$\alpha = \sup_{x \in X} f(x)$ とおく．このとき，ある $x_0 \in X$ が存在して $\alpha = f(x_0)$ をみたすことを示せ．