

**2022年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題**

1日目

2022年2月5日 9:00～12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 問題用紙は表紙を除いて4枚1組である。試験開始後に各自確認すること。乱丁、落丁、印刷不鮮明な箇所などがあれば、ただちに監督者に申し出ること。
3. 問題は全部で4題ある。①，②，③，④の4題すべてに日本語または英語で解答すること。
4. 答案用紙は4枚1組である。各自確認すること。ホッチキスを外してはならない。
5. 答案用紙は、1枚目が①用，2枚目が②用，3枚目が③用，4枚目が④用となっている。間違えないこと。
6. すべての答案用紙の所定の欄に、受験番号と氏名を記入すること。
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが、その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること。
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合、あるいは計算用紙が足りなくなった場合は、監督者に申し出ること。
9. 試験終了後に提出するものは、4枚1組の答案用紙である。この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい。

記号について：

問題中の \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す。

1 c を実数とし, \mathbb{R}^4 の 3 つのベクトル

$$\begin{pmatrix} c+2 \\ c-2 \\ c \\ c-2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c+1 \\ c-2 \\ c-1 \\ c-1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c \\ c \\ c-2 \\ c \end{pmatrix}$$

が生成する部分空間を V , 2 つのベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が生成する部分空間を W で表す.

- (1) V の次元を求めよ.
- (2) $V + W$ の次元を求めよ.
- (3) $V \cap W$ の次元を求めよ.

2 t を実数とし、以下の行列 A について考える.

$$A = \begin{pmatrix} t^2 + 1 & 0 & -1 \\ 0 & -t^2 - \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -t^2 - 1 \end{pmatrix}$$

- (1) A の階数を求めよ.
- (2) A の固有値を求めよ.
- (3) A が対角化可能であるための t の必要十分条件を求めよ.

3 関数

$$f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y) \quad (-\pi \leq x < \pi, -\pi \leq y < \pi)$$

に関して、以下の問に答えよ。

- (1) x, y の 3 次多項式 $P(x, y)$ で

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - P(x, y)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

をみたすものを求めよ。

- (2) $f(x, y)$ の極値と極値を与える x, y を求めよ。

4 以下の問に答えよ.

(1) a を実数とし, \mathbb{R}^3 内の領域 D を

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, 1 - x^2 - y^2 \leq z\}$$

で定めるとき, 広義積分

$$\iiint_D \frac{1}{z^a} dx dy dz$$

が収束するための a の必要十分条件とそのときの積分値を求めよ.

(2) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ とするとき,

$$\iint_D |x - y| dx dy$$

の値を求めよ.