2022 年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題

2 日目

2021 年 8 月 1 日　9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **4 枚 1 組**である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある．$\boxed{\mathbf{1}}$，$\boxed{\mathbf{2}}$，$\boxed{\mathbf{3}}$，$\boxed{\mathbf{4}}$ **の 4 題すべてに日本語または英語で解答すること．**
4. 答案用紙は **4 枚 1 組**である．各自確認すること．**ホッチキスを外してはならない．**
5. 答案用紙は，**1 枚目が** $\boxed{\mathbf{1}}$ **用，2 枚目が** $\boxed{\mathbf{2}}$ **用，3 枚目が** $\boxed{\mathbf{3}}$ **用，4 枚目が** $\boxed{\mathbf{4}}$ **用**となっている．間違えないこと．
6. **すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．**
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 n 次複素正方行列 A は条件 $P^2 = P$ をみたすとする．ただし，$P = A^*A$ で $A^* = {}^t\overline{A}$（A のすべての成分をその複素共役におきかえて転置をとった行列）とする．また $\mathbb{C}^n$ の元 $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = {}^t(y_1, \ldots, y_n)$ の標準エルミート内積を $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ により定め，$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) $\mathbb{C}^n$ の元 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し，$\langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{y} \rangle$ を示せ．また $\langle P\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, P\boldsymbol{y} \rangle$ を示せ．

(2) I を n 次単位行列とする．$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ をそれぞれ $\mathrm{Im}(P)$, $\mathrm{Im}(I-P)$ の任意の元とするとき $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$ を示せ．また，$\mathbb{C}^n = \mathrm{Im}(P) \oplus \mathrm{Im}(I-P)$ を示せ．ただし，n 次複素正方行列 B に対し, $\mathrm{Im}(B)$ は B の定める線形写像 $f_B : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ ($f_B(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}$) の像を表すものとする．

(3) $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Im}(P)$ に対し $|A\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x}|$ を示せ．また，$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Im}(I-P)$ に対し, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を示せ．

(4) A の任意の固有値 λ は $|\lambda| \leqslant 1$ をみたすことを示せ．

2 n は正整数とする．$\mathbb{R}$ 上の関数 g_n を

$$g_n(x) = \begin{cases} n & (x \in [0, 1/n]) \\ 0 & (x \notin [0, 1/n]) \end{cases}$$

と定める．また f は $\mathbb{R}$ 上の連続関数とし，$\mathbb{R}$ 上の関数 f_n を

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g_n(x - t)\, dt$$

と定める．以下の問に答えよ．

(1) 各 n に対して f_n は連続関数であることを示せ．

(2) 各 $x \in \mathbb{R}$ に対して $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ を示せ．

(3) (2) で示した収束は一様収束か否かを判定せよ．一様収束であるならばその証明を与え，一様収束でないならば反例をあげ，それが反例になっていることを示せ．

3 2 次式 $f(z) = z^2 - 2pz + 1$ および 4 次式 $g(z) = z^4 - z^3 + z^2 - z + 1$ を考える．ここで p は実数定数である．以下の問に答えよ．

(1) $g(z)$ を $f(z)$ で割ったときの余りを p を用いて表せ．

(2) $p = \cos\dfrac{\pi}{5}$ とするとき，$f(\alpha) = 0$ をみたす複素数 α は $g(\alpha) = 0$ もみたすことを示せ．

(3) $\cos\dfrac{\pi}{5}$ の値を求めよ．

(4) $p = \cos\dfrac{\pi}{5}$ とするとき，次の広義積分の値を文字 p を用いて虚数単位 i を含まない形で表せ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{g(t)}\,dt$$

4 X, Y を位相空間とし，写像 $f : X \to Y$ を考える．f が連続写像であるとは Y の任意の開集合 O に対してその f による逆像 $f^{-1}(O)$ が X の開集合となることをいい，f が閉写像であるとは X の任意の閉集合 E に対してその f による像 $f(E)$ が Y の閉集合となることをいう．また，X の部分集合 A および Y の部分集合 B に対し，$\bar{A}$ は A の X における閉包，$\bar{B}$ は B の Y における閉包をそれぞれ表すものとする．以下の問に答えよ．

(1) f が閉写像であることと，X の任意の部分集合 A に対して $\overline{f(A)} \subset f(\bar{A})$ が成り立つことは，同値であることを示せ．

(2) f が連続写像であることと，Y の任意の閉集合 F に対して $f^{-1}(F)$ が X の閉集合となることは，同値であることを示せ．

(3) f が連続写像であることと，X の任意の部分集合 A に対して $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ が成り立つことは，同値であることを示せ．