2022年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題

1日目

2021 年 7 月 31 日　9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **4 枚 1 組**である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある．$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ **の 4 題すべてに日本語または英語で解答すること．**
4. 答案用紙は **4 枚 1 組**である．各自確認すること．**ホッチキスを外してはならない．**
5. 答案用紙は，**1 枚目が** $\boxed{1}$ **用，2 枚目が** $\boxed{2}$ **用，3 枚目が** $\boxed{3}$ **用，4 枚目が** $\boxed{4}$ **用となっている．**間違えないこと．
6. **すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．**
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 t を実数に値をとるパラメータとする．4 次の実正方行列

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -1+2t & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2+t & -1-t & -5+t & 3 \end{pmatrix}$$

によって定まる $\mathbb{R}^4$ の 1 次変換を f とする．$\mathbb{R}^4$ には標準内積が与えられているものとする．以下の問に答えよ．

(1) すべての t に対し $f(\boldsymbol{u}_1) = \mathbf{0}$ をみたすような，$\mathbb{R}^4$ の長さ 1 の元 $\boldsymbol{u}_1$ をひとつ与えよ．

(2) $\mathrm{Ker}\, f$ の次元を k とするとき，k を求めよ．また $k \geq 2$ のときは，$\{\boldsymbol{u}_1, ..., \boldsymbol{u}_k\}$ が $\mathrm{Ker}\, f$ の正規直交基底になるように $\boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_k$ を与えよ．

(3) $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f$ の次元が 1 であるような t の値をすべて求めよ．また，そのとき $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f$ の $\mathbf{0}$ でない元を与えよ．

2 2 次の複素正方行列全体のなす $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間を V とし，その基底 $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ を

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

により定める．次に，$A \in V$ に対し，線型写像 $f_A : V \to V$ を

$$f_A(X) = {}^tAXA \quad (X \in V)$$

で定める．ただし，${}^tA$ は A の転置行列とする．また 行列 B を

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

により定める．以下の問に答えよ．

(1) f_B の基底 $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ に関する表現行列を求めよ．

(2) f_B の固有値を求めよ．また f_B の各固有値に対し，対応する固有空間の基底を一組ずつ与えよ．

(3) A が異なる 2 つの固有値 α, β をもつ実 2 次対称行列であるとき，f_A の固有値と対応する固有空間の次元を求めよ．

3　(1) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0,\ y>0\}$ において 4 つの曲線 $xy=1$, $xy=2$, $y=x$, $y=3x$ によって囲まれる領域を D とする．このとき

$$\iint_D \frac{y}{x}\,dxdy$$

の値を求めよ．

(2) $a,b\in\mathbb{R}$ とする．広義積分

$$\int_1^{\infty} x^a(\log x)^b\,dx$$

が収束するための a,b に関する必要十分条件を求めよ．

4 $\mathbb{R}^2$ 上の C^2 級の実数値関数 $f(x, y)$ は単位円周 $S = \{(\cos\theta, \sin\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ 上で $f = 0$ かつ $(f_x)^2 + (f_y)^2 = 1$ をみたし，原点を出発する任意の方向への半直線上で，原点から離れるにしたがって単調に増大するものとする．(a, b) を S 上の任意の点とするとき，以下の問に答えよ．

(1) ふたつのベクトル $(f_x(a, b), f_y(a, b))$ と $(-b, a)$ は互いに直交することを示せ．

(2) $f_x(a, b) = a,\ f_y(a, b) = b$ であることを示せ．

(3) 行列

$$A = \begin{pmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{pmatrix}$$

は $A\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ をみたすことを示せ．

(4) 極限

$$\lim_{n \to \infty} n^2 f\left(a - \frac{b}{n}, b + \frac{a}{n}\right)$$

の値を求めよ．