2021年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題（第 2 次募集）

2日目

2021 年 2 月 7 日 10:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **3** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 3 題ある．$\boxed{\mathbf{1}}$，$\boxed{\mathbf{2}}$，$\boxed{\mathbf{3}}$ の 3 題すべてに日本語または英語で解答すること．
4. 答案用紙は **3** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない．
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{\mathbf{1}}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{\mathbf{2}}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{\mathbf{3}}$ 用となっている．間違えないこと．
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，3 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 n 次実正方行列 A は $A^2 = {}^tA$ をみたすとする．ただし，${}^tA$ は A の転置行列とする．$\mathbb{C}^n$ の元 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ に対して，$\langle x, y \rangle$ は標準エルミート内積 $\sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}$ を表すものとする．以下の問に答えよ．

(1) v を固有値 α に対する A の固有ベクトルとする．$\langle v, Av \rangle$ を考察することにより $\alpha^2 = \overline{\alpha}$ を示せ．

(2) 異なる固有値に対する A の固有ベクトルは直交することを示せ．

以下，$n = 3$ とし，A は条件

「$A^2 = {}^tA$ が成り立ち, 正則であり, かつ単位行列でない」

をみたすとする．

(3) A の固有値のうち少なくとも一つは実数であることを示し，さらに A の固有値をすべて求めよ．また，A はユニタリ行列により対角化されることを示せ．

(4) 条件をみたす A の例を与えよ．

2 $I=[0,1]$ とする．I 上で定義された関数 φ は，ある $M>0$ が存在して I の任意の分割

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$$

に対して

$$\sum_{j=0}^{n-1}|\varphi(t_{j+1})-\varphi(t_j)|\le M$$

をみたすとき，I で有界変動であるという．以下の問に答えよ．

(1) f は I を含む開区間で微分可能で，その導関数 f' は I で有界とする．このとき f は I で有界変動であることを示せ．

(2) 次の関数は I で有界変動かどうか，理由とともに答えよ．

(i) $g(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x\ne 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$　　(ii) $h(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x} & (x\ne 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$

3 以下の問に答えよ．

(1) $\mathbb{R}^n$ の開集合 $U\ (\neq \emptyset)$ 上の実数値関数 $f\colon U \to \mathbb{R}$ が C^1 級で偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ が U 上で恒等的に零であるとする．U が条件

「U の任意の 2 点は U 内の C^1 級曲線で結べる」

をみたすならば，f は定数関数であることを示せ．

(2) 位相空間 $X\ (\neq \emptyset)$ 上の実数値関数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ が局所定数関数であるとは，任意の $p \in X$ に対して，p を含む開集合 V が存在して，f が V 上で定数関数であることとする．X が連結ならば，X 上の局所定数関数は X 上の定数関数であることを示せ．

（以上）