2020 年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題（第 2 次募集）

午後の部

2020 年 2 月 6 日 13:00〜16:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて**4 枚 1 組**である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ の 4 題すべてに日本語または英語で解答すること．
4. 答案用紙は**4 枚 1 組**である．各自確認すること．**ホッチキスを外してはならない**．
5. 答案用紙は，**1 枚目が $\boxed{1}$ 用，2 枚目が $\boxed{2}$ 用，3 枚目が $\boxed{3}$ 用，4 枚目が $\boxed{4}$ 用**となっている．間違えないこと．
6. **すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．**
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 $\mathbb{R}$ 上で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0), \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases}$$

について以下の問に答えよ．

(1) $f(x)$ が $x = 0$ で微分可能であることを示せ．

(2) $x > 0$ において，$f(x)$ の n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ がある多項式 $p_n(t)$ を用いて

$$f^{(n)}(x) = p_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$$

と表されることを示せ．さらに，$p_n(t)$ の次数を求めよ．

(3) 任意の正の整数 n に対して，$f(x)$ が $x = 0$ で n 回微分可能であることを示せ．

2 有限次元実ベクトル空間 V 上の線型変換 $S : V \to V$ に対して，線型変換 $T : V \to V$ を

$$T(\mathbf{v}) = S(\mathbf{v}) + \mathbf{v} \qquad (\mathbf{v} \in V)$$

により定める．また，I により V 上の恒等変換を表し，T の核と像をそれぞれ $\mathrm{Ker}(T)$, $\mathrm{Im}(T)$ と表す．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $S \circ S = I$ ならば，$V = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$ が成立することを示せ．

(2) $S \circ S = I$, $S \neq \pm I$ と仮定し，さらに $(v_1, \cdots, v_m)$, $(v_{m+1}, \cdots, v_n)$ をそれぞれ $\mathrm{Ker}(T)$, $\mathrm{Im}(T)$ の基底とする．このとき，V の基底 $(v_1, \cdots, v_m, v_{m+1}, \cdots, v_n)$ に関する S の表現行列を求めよ．

(3) $V = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$ が成り立っているとする．このとき $S \circ S = I$ は正しいか？　正しければ証明し，誤りであれば反例を与えよ．

3 複素関数

$$f(z) = \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3}$$

を考える．ただし，i は虚数単位を表す．また，$R > \varepsilon > 0$ に対して

$$\Gamma_R = \{Re^{i\theta} \in \mathbb{C}\,;0 \leqq \theta \leqq \pi\},$$

$$C_\varepsilon = \{\varepsilon e^{i\theta} \in \mathbb{C}\,;0 \leqq \theta \leqq \pi\},$$

$$I_{(\varepsilon,R)} = \{x \in \mathbb{R}\,;\varepsilon \leqq x \leqq R\},$$

$$J_{(\varepsilon,R)} = \{x \in \mathbb{R}\,;-R \leqq x \leqq -\varepsilon\}$$

とし，閉曲線 $I_{(\varepsilon,R)} \cup \Gamma_R \cup J_{(\varepsilon,R)} \cup C_\varepsilon$ に反時計回りとなるように向きを定める． 以下の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz$ を求めよ．

(3) 広義積分

$$\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3}\,dx$$

の値を求めよ．

4 距離空間 (X, d) を考える．任意の空ではない部分集合 $A \subsetneqq X$ に対して

$$d_A(x) = \inf\{d(x, a)\,;\, a \in A\} \qquad (x \in X)$$

により関数 $d_A : X \to [0, +\infty)$ を定める．以下の問に答えよ．

(1) 任意の $x, y \in X$ に対して，

$$|d_A(x) - d_A(y)| \leqq d(x, y)$$

が成り立つことを示せ．

(2) A が閉集合のとき，$\{x \in X\,;\, d_A(x) = 0\}$ を求めよ．答えだけでなく理由も述べよ．

(3) $A, B \subsetneqq X$ がともに空ではない閉集合で $A \cap B = \emptyset$ であるとする．このとき，

$$d_A(x) = (d_A(x) + d_B(x))f(x)$$

がすべての $x \in X$ に対して成り立つような関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が存在することを示せ．

(4) (X, d) が連結であるとき，(3) で存在を示した関数の値域 $\{f(x)\,;\, x \in X\}$ を求めよ．答えだけでなく理由も述べよ．