2020年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題（第 2 次募集）

午前の部

2020 年 2 月 6 日 9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて**4 枚 1 組**である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある．$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ の 4 題すべてに日本語または英語で解答すること．
4. 答案用紙は**4 枚 1 組**である．各自確認すること．**ホッチキスを外してはならない**．
5. 答案用紙は，**1 枚目が** $\boxed{1}$ **用，2 枚目が** $\boxed{2}$ **用，3 枚目が** $\boxed{3}$ **用，4 枚目が** $\boxed{4}$ **用**となっている．間違えないこと．
6. **すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．**
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 a, b, c, d を実数の定数とし，x, y, z, w を未知数とする次の 2 つの連立 1 次方程式を考える．

$$\begin{cases} 2x - y - z + 4w = -3 \\ 3x - 2y + z + 3w = -1 \\ x + aw = b \end{cases} \qquad \begin{cases} x + z + w = 3 \\ x + y + 3w = 4 \\ x + cz = d \end{cases}$$

このとき，次の問に答えよ．

(1) 共通の解が 2 個以上存在するように a, b, c, d を定めよ．

(2) (1) の場合の共通の解をすべて求めよ．

(3) 共通の解が存在しないための a, b, c, d に関する必要十分条件を与えよ．

2 以下の問に答えよ．

(1) 定数 $c > 0$ に対して，広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-cx^2}\,dx$ $(n = 0, 1, 2)$ の値を求めよ．

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ を直交行列により対角化せよ．

(3) A を (2) の行列とする．このとき，広義重積分

$$b_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_i x_j \exp\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle\,dx_1 dx_2, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$(i, j = 1, 2)$ により定まる行列 $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ を求めよ．ただし，

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$ と定める．

3 以下の問に答えよ．なお，各問は独立である．

(1) 不等式

$$|e^x - p(x)| \leqq 10^{-1} \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

をみたす多項式 $p(x)$ を 1 つ与えよ．ただし，$e < 3$ は既知とする．

(2) 広義重積分 $\displaystyle\int_0^\infty \left(\int_y^\infty x^2 e^{-x^2}\, dx \right) dy$ の値を求めよ．

(3) 2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y) = (2x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$ の停留点をすべて求め，それらの点で極値をとるか否かを判定せよ．

4 すべての実数列からなる集合 V は

$$\begin{array}{lll} \text{和:} & \{x_n\}_{n=1}^{\infty} + \{y_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty}, & \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in V, \\ \text{スカラー倍:} & \alpha\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\alpha x_n\}_{n=1}^{\infty}, & \alpha \in \mathbb{R},\ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in V \end{array}$$

に関して実ベクトル空間である．このとき，漸化式

$$(*) \qquad x_{n+3} - 6x_{n+2} + 11x_{n+1} - 6x_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

をみたす実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 全体がなす V の部分集合を W と表す．以下の問に答えよ．

(1) W が V の部分空間であることを確認し，その次元を求めよ．

(2) 線型変換 $S : V \to V$ を

$$S(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{x_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$$

と定める．このとき，$S(W) \subseteqq W$ であることを確認し，S を W に制限することにより得られる線型変換 $T : W \to W$ の固有値をすべて求めよ．

(3) (2) の線型変換 T の表現行列が対角行列になるような W の基底を 1 組与えよ．

(4) $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$ の条件の下で，漸化式 $(*)$ をみたす実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の一般項 x_n を求めよ．