2020年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題

午後の部

2019 年 7 月 27 日　13:00〜16:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **4** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{3}}$, $\boxed{\mathbf{4}}$ の **4** 題すべてに日本語または英語で解答すること．
4. 答案用紙は **4** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない．
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{\mathbf{1}}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{\mathbf{2}}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{\mathbf{3}}$ 用，**4** 枚目が $\boxed{\mathbf{4}}$ 用となっている．間違えないこと．
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 複素数を成分とする n 次正方行列 A, B が $A+B=I$ をみたし，さらに A は対角化可能であるとする．ただし，I は n 次単位行列を表す．このとき，以下の問に答えよ．

(1) B も対角化可能であることを示せ．

(2) A の任意の固有値 λ に対して B の固有値 μ が存在して $\lambda+\mu=1$ が成り立つことを示せ．

(3) A の階数と B の階数の和が n のとき，A, B はともに $0, 1$ 以外の固有値を持たないことを示せ．

2 以下の問に答えよ．

(1) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して，広義積分

$$\int_0^\infty e^{-t^2} \cos(xt)\, dt$$

が絶対収束することを示せ．

以後，$\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2} \cos(xt)\, dt$ を考える．

(2) $f(x)$ が $\mathbb{R}$ 上で微分可能であることを示せ．

(3) $y = f(x)$ が常微分方程式 $y' = -\dfrac{xy}{2}$ をみたすことを示せ．

(4) $f(2)$ の値を求めよ．

3 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して定まる複素関数

$$f(z) = \frac{e^{itz}}{(z^2+1)^2}$$

を考える．ただし，i は虚数単位を表す．以下の問に答えよ．

(1) $f(z)$ の複素平面 $\mathbb{C}$ 内の特異点をすべて求めよ．

(2) $f(z)$ の $\mathbb{C}$ 内の孤立特異点で虚部が正であるものそれぞれに対して，その点におけるローラン級数展開の主要部（負ベキの部分）を求めよ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{(x^2+1)^2}\,dx$ の値を求めよ．

4 n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 内の点列 $a(k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ が $a \in \mathbb{R}^n$ に収束すると仮定する．ただし，ユークリッド空間の通常の位相，すなわち，2 点 $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して距離 $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$ を考え，それから定まる位相を考えている．このとき，$\mathbb{R}^n$ の部分集合 $A = \{a(k)\,; k = 1, 2, \ldots\}$ に対して，以下の問に答えよ．

(1) A の $\mathbb{R}^n$ における閉包 $\overline{A}$ を求めよ．

(2) $\overline{A} \cap B = \emptyset$ をみたす $\mathbb{R}^n$ の閉部分集合 B に対して

$$\inf\{d(x, y)\,; x \in A,\ y \in B\} > 0$$

が成り立つか否かを答えよ．さらに，成り立つなら証明を与え，そうでなければ反例を与えよ．