2020年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題

午前の部

2019 年 7 月 27 日　9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **4** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{3}}$, $\boxed{\mathbf{4}}$ の **4** 題すべてに日本語または英語で解答すること．
4. 答案用紙は **4** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない．
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{\mathbf{1}}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{\mathbf{2}}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{\mathbf{3}}$ 用，**4** 枚目が $\boxed{\mathbf{4}}$ 用となっている．間違えないこと．
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 4 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ 内の $t \in \mathbb{R}$ に依存するベクトルの組

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$$

を考える．このとき，$\mathbf{a}, \mathbf{b}_t$ が生成する部分空間を V_t，$\mathbf{c}, \mathbf{d}_t$ が生成する部分空間を W_t とする．以下の問に答えよ．

(1) $V_t + W_t$ の次元を求めよ．

(2) $V_t \cap W_t$ が 0 次元にならない t を決定し，その場合に $V_t \cap W_t$ の基底を一組与えよ．

(3) ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ を V_t に含まれるベクトルと W_t に含まれるベクトルの和として表すことのできる t を決定し，その場合に $\mathbf{x}$ を V_t に含まれるベクトルと W_t に含まれるベクトルの和として表せ．

2 $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$ から定まる 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$

に対して，以下の問に答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) A を対角化し，A の n 乗 A^n を求めよ．

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} A^n$ を求めよ．ただし, 3 次正方行列のなす列の極限は成分ごとに極限をとって定まる 3 次正方行列とする．

3 以下の問に答えよ．なお，各問は独立である．

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^p+2019)^q}$ の収束・発散を調べよ．ただし，p, q は正の実数とする．

(2) 2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ を定義域とする C^1 級の実数値関数 $f(x, y)$ が

$$y\,\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x\,\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

をみたすとする．このとき, $f(x, y)$ はある 1 変数実数値関数 $g(t)$ を用いて

$$f(x, y) = g(r), \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

と表されることを示せ．

(3) 有理関数 $\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2$ を $x = 0$ のまわりでテイラー級数展開せよ．

4 以下，$p, q \in \mathbb{R}$ は $p^2 + q^2 = 1$ をみたすとする．2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)\,;\, x, y \in \mathbb{R}\}$ 内で，楕円に囲まれる閉領域

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1\right\} \quad (0 < a < b)$$

と方程式

$$px + qy = 0$$

が定める直線 $\ell_{p,q}$ を考える．以下の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\iint_D x^2\,dxdy$ および $\displaystyle\iint_D y^2\,dxdy$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy = 0$ を示せ．

(3) D 内の点 (x, y) と直線 $\ell_{p,q}$ の間の距離（すなわち，点 (x, y) から直線 $\ell_{p,q}$ に下ろした垂線の長さ）を $r_{p,q}(x, y)$ とする．このとき，

$$I(p, q) = \iint_D r_{p,q}(x, y)^2\,dxdy$$

を最小にする p, q を求めよ．