2019年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士前期課程
入学試験問題

午後の部

2019 年 2 月 6 日　13:00〜16:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **4 枚 1 組**である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{1}$ ， $\boxed{2}$ ， $\boxed{3}$ ， $\boxed{4}$ **の 4 題すべてに日本語または英語で解答すること**．
4. 答案用紙は **4 枚 1 組**である．各自確認すること．**ホッチキスを外してはならない**．
5. 答案用紙は，**1 枚目が** $\boxed{1}$ **用，2 枚目が** $\boxed{2}$ **用，3 枚目が** $\boxed{3}$ **用，4 枚目が** $\boxed{4}$ **用**となっている．間違えないこと．
6. **すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること**．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^k$ のベクトルの列の収束を各成分の収束で定義する．このとき，次の問に答えよ．

(1) A を 3 次ジョルダンブロック $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ $(\alpha \in \mathbb{C})$ とする．A^n $(n \geq 2)$ を求めよ．

(2) A を (1) のとおりとする．任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^3$ に対し $\mathbb{C}^3$ のベクトルの列 $\{A^n \mathbf{x}\}_{n=0}^{\infty}$ が収束するための α が満たすべき必要十分条件を求めよ．

(3) B を一般の k 次複素正方行列とする．任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^k$ に対し $\mathbb{C}^k$ のベクトルの列 $\{B^n \mathbf{x}\}_{n=0}^{\infty}$ が収束するための B が満たすべき必要十分条件を求めよ．

2 $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ の通常の内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で表す．n 次実対称行列 $A = (a_{ij})$ が正定値であるとは，任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対し $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ であって，$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ ならば $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ であることと定義する．また，n 次実対称行列 $A = (a_{ij})$ が半正定値であるとは，任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対し $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ であることと定義する．$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ はともに n 次の正定値実対称行列で，$A - B = (a_{ij} - b_{ij})$ が半正定値であるとする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 正定値実対称行列 C に対し，$V(C) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle C\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle < 1\}$ と定める．このとき

$$V(A) \subset V(B)$$

であることを示せ．

(2) $V(A)$ の体積

$$\int_{V(A)} 1 \, dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

を $\mathbb{R}^n$ の単位球 $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle < 1\}$ の体積 ω_n と $\det(A)$ を用いて表せ．なお，ω_n の具体的な値を求める必要はない．

(3) $\det(A) \geq \det(B)$ であることを示せ．

3 次の問に答えよ．

(1) $\mathbb{C}$ 上の有理型関数

$$\pi\cot(\pi z) = \pi\,\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$$

の極は $z = n \in \mathbb{Z}$ であり，各点 n における極の位数は 1，留数は 1 であることを示せ．

(2) n を正の整数とし，複素平面上の曲線 C_n を，4 点 $\pm(n+\frac{1}{2}) \pm (n+\frac{1}{2})i$ を頂点とする正方形の周とする．このとき，ある定数 M が存在して，任意の正の整数 n に対し C_n 上で $|\cot(\pi z)| \leq M$ が成り立つことを示せ．

(3) 曲線 C_n を (2) のとおりとして，反時計回りの向きを入れる．関数 $f(z)$ を

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

により定める．このとき，

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{C_n} f(z)\pi\cot(\pi z)dz = 0$$

が成り立つことを示せ．

(4) 極限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{1+k^2}$$

を求めよ．

4 次の問に答えよ．

(1) 距離空間 (X, d) の部分集合 A が閉集合であることの定義を点列の言葉で述べよ．

(2) (X, d) をコンパクトな距離空間とし，

$$X \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \cdots$$

を空集合でない閉部分集合の単調減少列とする．このとき $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ は空集合でないことを示せ．

(3) (X, d) がコンパクトでない距離空間のとき，(2) と同じ主張は正しいか．正しければ証明し，正しくなければ反例をあげて正しくないことを示せ．

（2019 年 2 月 6 日） （以上）