

**2019年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士前期課程
入学試験問題**

午前の部

2019年2月6日 9:00～12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 問題用紙は表紙を除いて**4枚1組**である。試験開始後に各自確認すること。乱丁、落丁、印刷不鮮明な箇所などがあれば、ただちに監督者に申し出ること。
3. 問題は全部で4題ある。**①**、**②**、**③**、**④**の4題すべてに日本語または英語で解答すること。
4. 答案用紙は**4枚1組**である。各自確認すること。ホッチキスを外してはならない。
5. 答案用紙は、1枚目が**①**用、2枚目が**②**用、3枚目が**③**用、4枚目が**④**用となっている。間違えないこと。
6. **すべての答案用紙の所定の欄に、受験番号と氏名を記入すること。**
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが、その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること。
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合、あるいは計算用紙が足りなくなった場合は、監督者に申し出ること。
9. 試験終了後に提出するものは、4枚1組の答案用紙である。この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい。

記号について：

問題中の \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} はそれぞれ整数, 有理数, 実数, 複素数全体のなす集合を表す。

1 a, b, c を実数に値をとるパラメータとする. 3 次の実正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}$$

によって定まる \mathbb{R}^3 の 1 次変換を f とする. このとき, 以下の間に答えよ.

(1) f の階数が 1 になるための a, b, c が満たすべき必要十分条件を求めよ.

(2)

$$\det(A) = 0 \quad \text{かつ} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Im}(f)$$

となるための a, b, c が満たすべき必要十分条件を求めよ.

2 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ に対し、次の問に答えよ.

- (1) 行列 A の固有値とその重複度 (固有方程式または特性方程式の根としての重複度) を求めよ.
- (2) 行列 A の固有空間を求めよ.
- (3) $n \geq 2$ を整数とするとき、行列 A^n を求めよ.

3 以下の問に答えよ。各問は独立である。

(1) α を正の定数とする。 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$ が成り立つことを示せ。

(2) n を正の整数とし、 $z \in \mathbb{C}$ とする。関数

$$F(z) = \frac{1}{1 + z + z^2 + \cdots + z^n}$$

を $z = 0$ のまわりで冪 (べき) 級数に展開し、その収束半径を求めよ。

(3) 関数 f は $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 上の C^2 級関数で、極座標 (r, θ) に関して

$$f_{rr} = f_{\theta\theta}$$

を満たすものとする。このとき $\mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R} | r > 0\}$ 上の関数

$$E(r) = \int_0^{2\pi} (f_r^2 + f_\theta^2) d\theta$$

は定数関数であることを示せ。

4 次の問に答えよ.

(1) $p > 1$ である実数 p に対し, 極限

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{\cos t}{t^p} dt$$

は収束することを示せ. なお, 極限值を求める必要はない.

(2) 極限

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \sin(x^2) dx$$

は収束することを示せ. なお, 極限值を求める必要はない.