2019年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題

午後の部

2018 年 7 月 28 日　13:00〜16:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **4** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{\mathbf{1}}$ ， $\boxed{\mathbf{2}}$ ， $\boxed{\mathbf{3}}$ ， $\boxed{\mathbf{4}}$ の **4** 題すべてに日本語または英語で解答すること．
4. 答案用紙は **4** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない．
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{\mathbf{1}}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{\mathbf{2}}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{\mathbf{3}}$ 用，**4** 枚目が $\boxed{\mathbf{4}}$ 用となっている．間違えないこと．
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 $\mathbb{C}^n$ の標準エルミート内積を，$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ に対し

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$ で表す．次の問に答えよ．

(1) 次の条件 (I) を満たす n 次複素行列 A はエルミート行列であることを示せ：

(I) 任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ に対して $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ は実数である．

(2) 次の条件 (II) を満たす n 次複素行列 B は正則であることを示せ：

(II) 任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ に対して $\langle B\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ は実数で，$\langle B\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ ならば $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ である．

(3) 次の条件 (III) を満たす n 次複素行列 C, D に対し，$\operatorname{rank} C \geq \operatorname{rank} D$ が成り立つことを示せ：

(III) 任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ に対して $\langle C\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ と $\langle D\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ はともに実数で
$\langle C\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq \langle D\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ である．

2 次の命題が正しければ証明し，正しくなければ反例をあげることによって正しくないことを示せ．

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束すれば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である．

(2) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を満たせば級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する．

(3) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少で $a_n > 0$ $(\forall n = 1, 2, \ldots)$ とする．

このとき，もし $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束すれば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$ である．

(4) 正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束すれば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$ である．ただし正項級数とは各項が非負の級数を意味する．

3 次の問に答えよ．

(1) $x \in [0, \pi]$, $y \geq 0$, $(x, y) \neq (0, 0)$ に対し，$\log(\sin(x+iy))$ の実部と虚部を実数のみを含む式で表せ．ただし，対数は主値をとるものとする．

(2) x, y は実数とする．このとき，極限

$$\lim_{y \to \infty} \left(\int_0^{\pi} \{\log(\sin(x+iy)) - y\} dx \right)$$

を求めよ．ただし対数は主値をとるものとする．

(3) 積分

$$\int_0^{\pi} \log(\sin x)\, dx$$

を求めよ．

4 $f(x)$ を半開区間 $(0,1]$ で定義された連続関数とする．部分集合 $I \subset \mathbb{R}$ を次のように定める：実数 a が I の元であるとは，区間 $(0,1]$ のある点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ かつ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$ が成り立つことと定義する．

(1) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ のときに I を求めよ．答だけでよい．

(2) 一般に，I が空でないとき，連結な閉集合であることを示せ．