2019年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題

午前の部

2018 年 7 月 28 日　9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **4** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{1}$ ， $\boxed{2}$ ， $\boxed{3}$ ， $\boxed{4}$ の **4** 題すべてに日本語または英語で解答すること．
4. 答案用紙は **4** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない．
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{1}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{2}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{3}$ 用，**4** 枚目が $\boxed{4}$ 用となっている．間違えないこと．
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 以下の問に答えよ．

(1) $\mathbb{R}^4$ の 3 本のベクトル $\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}$ は 1 次独立であることを示せ．

(2) $\mathbb{R}^4$ の 3 本のベクトル $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$ は 1 次独立であることを示せ．

(3) V_1, V_2 をそれぞれ (1), (2) の 3 本のベクトルで生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間とする．$\mathbb{R}^4$ の部分空間 $V_1 + V_2$ の次元を求めよ．

(4) V_1, V_2 を (3) のとおりとする．$V_1 \cap V_2$ の次元と一組の基底を求めよ．

2 行列

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

に対して次に答えよ．

(1) $U^{-1}TU$ が対角行列になるユニタリ行列 U を求めよ．

(2) 3 次の複素行列で T と交換可能な行列全体は 3 次元複素ベクトル空間をなすことを示せ．

(3) 3 次の複素行列で T および

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

と交換可能な行列をすべて求めよ．答だけでなく根拠も述べること．

3 以下の問に答えよ．なお，各問は独立である．

(1) 関数

$$F(z) = \frac{1}{1 + z + z^2}$$

を原点のまわりで z の冪級数に展開し，その収束半径を求めよ．

(2) $n \geq 2$ とし，A を n 次実対称行列とする．$\mathbb{R}^n$ 上の関数 $f(\mathbf{x})$ を $f(\mathbf{x}) = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ により定義する．ただし $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は通常のユークッリッド内積である．このとき，微分写像

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{y} \mapsto (Df)_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})}{h} \in \mathbb{R}$$

を A を用いて表せ．また，$S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1\}$ 上で f が最大になる点 $\mathbf{x}$ は A の固有ベクトルであることを示せ．

(3) 重積分

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(s^2 - st + t^2)} ds dt$$

を求めよ．ヒント：平方完成．

4 以下の問に答えよ．

(1) $0 < \theta \leq 1$ のとき極限

$$\lim_{n\to\infty}\left[\max_{x\geq n}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-\theta x}\right\}\right]$$

を求めよ．

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^\infty \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-x}\,dx = 0$$

が成り立つことを示せ．