2018年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題（第 2 次募集）

午後の部

2018 年 2 月 6 日 13:00〜16:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **4** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ の 4 題すべてに日本語または英語で解答すること．
4. 答案用紙は **4** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない．
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{1}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{2}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{3}$ 用，**4** 枚目が $\boxed{4}$ 用となっている．間違えないこと．
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 A は n 次実正方行列，${}^tA$ はその転置とする．以下を示せ．

(1) $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n$ が直交し，かつ共に ${}^tAA$ の固有ベクトルであるとき，Au_1, Au_2 は直交する．

(2) A は n 次実正則行列とする．n 次実直交行列 U, V, および成分が非負実数の対角行列 D で，$AU = VD$ をみたすものが存在する．

(3) A は n 次実正則行列とする．n 次実直交行列 T, および全ての固有値が非負の n 次実対称行列 R で，$R^2 = {}^tAA$, $A = TR$ をみたすものが存在する．

(4) 上記 (2),(3) は A が非正則な n 次実正方行列の場合でも成立する．

注意：小問 (2), (3) に対し A が非正則な場合も含めて解答した場合は，小問 (4) にも解答したとみなす．その場合，改めて小問 (4) に解答する必要はない．

2 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ について，全ての $x\in\mathbb{R}$ に対し有限な右極限 $\ell_+(x)=\lim_{\substack{y\to x\\ y>x}} f(y)$, および有限な左極限 $\ell_-(x)=\lim_{\substack{y\to x\\ y<x}} f(y)$ が存在すると仮定する.

(1) 実数 $\ell_+(x)$ が右極限 $\lim_{\substack{y\to x\\ y>x}} f(y)$ であることの定義を ε-δ 論法により述べよ.

(2) 全ての $x\in\mathbb{R}$ に対しある $\delta>0$ が存在し，f は区間 $(x-\delta,x+\delta)$ 上で有界であることを示せ.

(3) f は, 任意の有界区間上で有界であることを示せ.

3 $L>0$ に対し，複素平面内で $0,\ L,\ L+iL$ を頂点とする三角形の周に反時計周りの向きをつけた経路を C とする．関数 $f(z)=\exp(-z^2/2)$ $(z\in\mathbb{C})$ の C に沿った積分を利用することにより，次の広義積分の値を求めよ．

$$\int_0^\infty \exp(-ix^2)\,dx.$$

その際，等式 $\int_0^\infty \exp(-x^2/2)\,dx=\sqrt{\pi/2}$ を証明なしで用いてもよい．

4 (X, d) を d を距離とする距離空間とする．空でない $A, B \subset X$ に対し $d(A, B)$ を次のように定める．

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b)\ ;\ a \in A,\ b \in B\}.$$

また，$x \in X$ に対し，$d(x, B) = d(\{x\}, B)$ と定める．

(1) 空でない $A, B \subset X$ に対し次の等式を示せ．

$$d(A, B) = \inf\{d(a, B)\ ;\ a \in A\}.$$

(2) $x, y \in X$, 空でない $B \subset X$ に対し次の不等式を示せ．

$$|d(x, B) - d(y, B)| \leq d(x, y).$$

(3) 次の命題が正しいか否かを述べよ．さらに，正しい場合は命題を証明せよ．また，正しくない場合は命題の反例をあげ，それが反例であることを示せ．

「$A, B \subset X$ が共に空でない閉集合，$A \cap B = \emptyset$ なら，$d(A, B) > 0$ である．」

(4) 次の命題が正しいか否かを述べよ．さらに，正しい場合は命題を証明せよ．また，正しくない場合は命題の反例をあげ，それが反例であることを示せ．

「$A \subset X$ が空でないコンパクト集合，$B \subset X$ が空でない閉集合，$A \cap B = \emptyset$ なら，$d(A, B) > 0$ である．」

（2018 年 2 月 6 日） （以上）