2018年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題（第 2 次募集）

午前の部

2018 年 2 月 6 日 9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **4** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{3}}$, $\boxed{\mathbf{4}}$ の 4 題すべてに日本語または英語で解答すること．
4. 答案用紙は **4** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない．
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{\mathbf{1}}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{\mathbf{2}}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{\mathbf{3}}$ 用，**4** 枚目が $\boxed{\mathbf{4}}$ 用となっている．間違えないこと．
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 t を実数とする. 行列

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 4t & 3-2t & -3-2t & 4t \\ 3-8t & -3+4t & 4t & 3-8t \\ 3-2t & -3+t & t & 3-2t \end{pmatrix}$$

によって定められる $\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^4$ への線形写像 $f_t(u) = A_t u \quad (u \in \mathbb{R}^4)$ を考える.

(1) 核 $\mathrm{Ker} f_t$ の次元を k とするとき，k を求めよ．また，$\mathrm{Ker} f_t$ の基底 $u_1, ..., u_k$ であり，どの u_j $(j = 1, ..., k)$ も t に依存しないものを一組求めよ.

(2) $\mathrm{Ker} f_t + \mathrm{Im} f_t$ の次元が 3 であるような t の値を求めよ.

2 $x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $y=(y_1,...,y_n)\in\mathbb{R}^n$ に対し $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^n x_iy_i$ とする．また，$v_1,v_2,\ldots,v_n\in\mathbb{R}^n$ および $w_1,w_2,\ldots,w_n\in\mathbb{R}^n$ は条件 $\langle v_i,w_j\rangle=\delta_{ij}\quad(1\le i,j\le n)$ をみたすとする. ただし, $i=j$ のとき, $\delta_{ij}=1$ とし, それ以外のとき, $\delta_{ij}=0$ とする.

(1) $w_1,w_2,\ldots,w_n$ は $\mathbb{R}^n$ の基底であることを示せ.

(2) n 次正方行列 A は, 全ての $x\in\mathbb{R}^n$ に対し

$$Ax=\sum_{i=1}^n w_i\langle v_i,x\rangle$$

をみたすとする. 行列 A を求めよ.

(3) $n=3$ とし, 3 次正方行列 B は, 全ての $x\in\mathbb{R}^3$ に対し

$$Bx=w_2\langle v_1,x\rangle+w_3\langle v_2,x\rangle+w_1\langle v_3,x\rangle$$

をみたすとする. B の固有値を求めよ. また, それぞれの固有値に対する固有ベクトルを w_1,w_2,w_3 を用いて表せ.

3 以下の問に答えよ．(1), (2) は独立な問題である．

(1) 次の広義積分が収束するための, $p > 0$ に関する必要十分条件を求めよ．

$$\int_0^1 x^{-p} \sin \frac{1}{x} \, dx.$$

(2) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$ とする．次の重積分を求めよ．

$$\int_D (x + y + z + 1)^{-3} \, dxdydz.$$

4 $x > 0$ に対し $f_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{x}{1+j^2x^2}$ $(n = 1, 2, ...)$ とする．

(1) 任意の $x > 0$ に対し, 極限 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在し，次の不等式をみたすことを示せ．

$$\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\, x \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\, x + \frac{x}{1+x^2}.$$

(2) 収束 $f_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ は $x > 0$ について一様か否かを判定し，その判定結果に証明を与えよ．

（以上）