2018年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題

午後の部

2017 年 7 月 29 日　13:00〜16:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **4** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{3}}$, $\boxed{\mathbf{4}}$ の **4** 題すべてに日本語または英語で解答すること．
4. 答案用紙は **4** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない．
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{\mathbf{1}}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{\mathbf{2}}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{\mathbf{3}}$ 用，**4** 枚目が $\boxed{\mathbf{4}}$ 用となっている．間違えないこと．
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 V は線形空間, $f, g\colon V \to V$ は線形写像, $f \circ g = g \circ f$ とする.

(1) $\mathrm{Ker}(f \circ g) \supset \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Ker}\, g$ を示せ.

(2) $g(\mathrm{Ker}\, f) \subset \mathrm{Ker}\, f$ を示せ.

(2) より，g の $\mathrm{Ker}\, f$ 上への制限は, 線形写像 $\tilde{g}\colon \mathrm{Ker}\, f \to \mathrm{Ker}\, f$ を定める.

(3) $\tilde{g}$ が単射であるとき，$\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g = \{0\}$ を示せ.

(4) $\tilde{g}$ が全射であるとき，$\mathrm{Ker}(f \circ g) = \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Ker}\, g$ を示せ.

2 以下の各問に答えよ．その際，連続関数が有界閉区間上で可積分であることや，連続関数列の広義一様収束極限が連続関数となることは証明なしに用いてもよい．

(1) f を $\mathbb{R}$ 上の C^1 級実数値関数とし，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$a_n = \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

により定義する．このとき，次をみたす定数 C が存在することを示せ．

$$|a_n| \leq \frac{C}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

(2) $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ を $f_n(0) = 0$ をみたす $\mathbb{R}$ 上の C^1 級実数値関数の列とする．$f_n'(x)$ が $g(x)$ に $\mathbb{R}$ 上で広義一様収束するとき, $f_n(x)$ は $\displaystyle\int_0^x g(y)\, dy$ に $\mathbb{R}$ 上で広義一様収束することを示せ.

(3) $C > 0$ は定数，実数列 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ は

$$|a_k| \leq \frac{C}{k^3}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

をみたすとする．このとき $\mathbb{R}$ 上の関数の列

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

は $\mathbb{R}$ 上の C^1 級関数に一様収束することを示せ.

3 $a, b > 0$ とし，関数

$$f(z) = \frac{ze^{ibz}}{z^2 + a^2}, \quad z \in \mathbb{C}$$

を考える．以下の各問に答えよ．

(1) $f(z)$ のすべての極とその点における留数を求めよ．

(2) $R > 0$ とし，複素平面内の半円周

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0 \right\}$$

に反時計まわりの向きを入れたものを Γ_R とする．次を示せ．

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\, dz = 0.$$

(3) 極限 $\displaystyle \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} \frac{x \sin bx}{x^2 + a^2}\, dx$ の値を求めよ．

4 X, Y を位相空間とし，その直積 $X \times Y$ において次の部分集合族を考える．

$$\mathcal{B} = \{A \times B \mid A \text{ は } X \text{ の開集合}, B \text{ は } Y \text{ の開集合}\}.$$

上の $\mathcal{B}$ を開基底とする $X \times Y$ の位相を直積位相といい，以下，$X \times Y$ に直積位相を与える．また，写像 $f : X \times Y \to X$ を $f(x, y) = x$ $(x \in X,\, y \in Y)$ で定める．以下の各命題が真か偽かを述べよ．さらに，命題が真ならば，命題を証明し，偽であれば，命題の反例をあげ，それが反例であることを示せ．

(1) f は連続である．

(2) G が $X \times Y$ の開集合なら $f(G)$ は X の開集合である．

(3) F が $X \times Y$ の閉集合なら $f(F)$ は X の閉集合である．