2018年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題

午前の部

2017 年 7 月 29 日　9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **4** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{\mathbf{1}}$ ， $\boxed{\mathbf{2}}$ ， $\boxed{\mathbf{3}}$ ， $\boxed{\mathbf{4}}$ の **4** 題すべてに日本語または英語で解答すること．
4. 答案用紙は **4** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない．
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{\mathbf{1}}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{\mathbf{2}}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{\mathbf{3}}$ 用，**4** 枚目が $\boxed{\mathbf{4}}$ 用となっている．間違えないこと．
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：
問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 実変数 x についての 3 次以下の実係数多項式のなす実線形空間を V とする．p, q, r は実数とし，線形写像 $T : V \to V$ を

$$T(f(x)) = pf(x) + (qx + r)f'(x)$$

により定義する．以下の問いに答えよ．

(1) V の基底 $\{1, x, x^2, x^3\}$ に関する T の表現行列を求めよ．

(2) $\mathrm{Ker}\, T$ の次元が 0 となるための p, q, r の必要十分条件を求めよ．

(3) $\mathrm{Im}\, T$ の次元が 3 となるための p, q, r の必要十分条件を求めよ．

2 複素 2 次正方行列全体を $M_2(\mathbb{C})$, また $M_2(\mathbb{C})$ の中の正則行列全体を $GL_2(\mathbb{C})$ と書く．さらに，$A \in M_2(\mathbb{C})$ に対し，$X \in M_2(\mathbb{C})$ であり，$AX = XA$ となるもの全体を $Z(A)$ と書く．以下を示せ．

(1) $A, X \in M_2(\mathbb{C})$, $P \in GL_2(\mathbb{C})$ のとき，

$$X \in Z(A) \iff P^{-1}XP \in Z(P^{-1}AP).$$

(2) $A \in GL_2(\mathbb{C})$ が相異なる二つの固有値を持つとき，ある $P \in GL_2(\mathbb{C})$ が存在し，

$$Z(A) = \left\{ P \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} P^{-1} \,;\ x, y \in \mathbb{C} \right\}.$$

(3) $A \in GL_2(\mathbb{C})$ が対角化可能でないとき，ある $P \in GL_2(\mathbb{C})$ が存在し，

$$Z(A) = \left\{ P \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} P^{-1} \,;\ x, y \in \mathbb{C} \right\}.$$

3 以下の各問に答えよ．各問は独立である．

(1) $\cos : (0,\pi) \to (-1,1)$ の逆関数を $\cos^{-1} : (-1,1) \to (0,\pi)$ とする．さらに実数 a に対し $f(x) = \cos(a\cos^{-1} x)$ $(x \in (-1,1))$ と定める．このとき，$x \in (-1,1)$ の関数 $(1-x^2)f''(x)$ は，$f(x)$, $xf'(x)$ の線形和であることを示し，係数を求めよ．

(2) $p, q \geq 0$ とする．また，$(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) \neq (0,0)$ のとき，

$$f(x,y) = \frac{|x|^p|y|^q}{x^2+y^2}$$

と定める．$f(0,0)$ の値を適切に定めることにより，$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が原点において全微分可能になるための，p, q に関する必要十分条件を求めよ．

(3) a,ϵ を正の実数,

$$D_\epsilon = \{(x,y) \,|\, \epsilon \leq x \leq 1,\ x^a \leq y \leq 1\}$$

とする. 次の極限を求めよ.

$$\lim_{\epsilon \to 0} \iint_{D_\epsilon} \log y \, dxdy.$$

4 $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ を連続かつ単調非増加とする．以下を示せ．

(1) ある $a > 0$ に対し $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f(na) < \infty$ であるとき，$\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx < \infty$.

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)|\sin x|dx < \infty$ であるとき，$\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx < \infty$.